МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1986

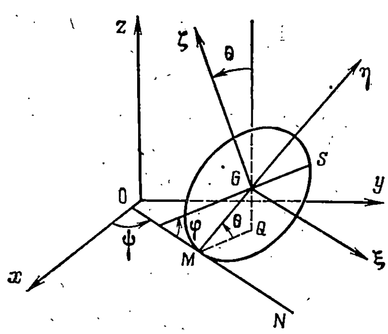
УДК 531.38

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ДИСКА НА ГЛАДКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЛЬДУ

МАРКЕЕВ А. П.

Для тяжелого круглого диска, движущегося по гладкому горизонтальному льду, найдено семейство стационарных движений и получены необходимые и достаточные условия их устойчивости.

1. Пусть круглый диск радиуса a и массы m движется в однородном поле тяжести по неподвижной горизонтальной поверхности гладкого льда, касаясь ее одной из точек своего острого края. Центр тяжести диска совпадает с его геометрическим центром. Движение диска отнесем к неподвижной системе координат $Oxyz$ с началом в некоторой точке O опорной поверхности и вертикально направленной осью Oz. Введем также систему координат $G\xi\eta\zeta$ с началом в центре тяжести диска, двужущуюся как относительно диска, так и относительно системы $Oxyz$; ось $G\xi$ горизонтальна, $G\zeta$ перпендикулярна плоскости диска, а $G\eta$ проходит через точку M диска, которой он касается льда. Диск предполагается динамически симметричным с осью симметрии $G\zeta$, его моменты инерции относительно осей $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$ обозначим A и C. Пусть S — какая-либо фиксированная точка на окружности диска. Ориентацию диска зададим при помощи углов Эйлера. На фиг. 1 линия узлов MN является касательной к окружности диска и, следовательно, параллельна оси $G\xi$, угол собственного вращения φ есть угол между GS и MN; через Q обозначена проекция центра тяжести диска на плоскость льда.



Пусть u, v, w и p, q, r — компоненты вектора скорости центра тяжести $\mathbf{v}_G$ и вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ диска в системе координат $G\xi\eta\zeta$. Справедливы кинематические уравнения

$$p=\theta^{\cdot}, \quad q=\psi^{\cdot}\sin\theta, \quad r=\psi^{\cdot}\cos\theta+\varphi^{\cdot} \tag{1.1}$$

На диск при его движении по гладкому льду наложена неинтегрируемая кинематическая связь: вектор скорости $\mathbf{v}_M$ точки M параллелен горизонтальному диаметру диска. Проектируя обе части векторного равенства

$$\mathbf{v}_M=\mathbf{v}_G+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{GM} \tag{1.2}$$

на оси $G\eta$ и $G\zeta$, получаем уравнения связи

$$v=0, \quad w-pa=0 \tag{1.3}$$

Обозначим через M^* геометрическую точку, которая принадлежит седлу, вычерчиваемому точкой касания M диска со льдом; при своем движении диск соприкасается точками M, лежащими на его окружности, с соответствующими точками M^* следа. Скорость точки M^* в неподвижной системе координат $Oxyz$ обозначим $\mathbf{v}_{M^*}$. Можно показать, что вектор $\mathbf{v}_{M^*}$ в подвижной системе координат $G\xi\eta\zeta$ задается компонентами

$$u+(r-\varphi^{\cdot})a,\ 0,\ 0 \tag{1.4}$$

Отсюда и из (1.1) следует, что координаты x, y точки M^* следа касания на льду определяются уравнениями

$$x^{\cdot}=(u+aq\operatorname{ctg}\theta)\cos\psi, \qquad y^{\cdot}=(u+aq\operatorname{ctg}\theta)\sin\psi \tag{1.5}$$

Для получения дифференциальных уравнений движения диска воспользуемся теоремами об изменении количества движения и кинетического момента, причем при применении последней в качестве полюса примем точку M^*. Обозначая символом d'/dt операцию дифференцирования по времени в системе координат $G\xi\eta\zeta$, имеем

$$m(d'\mathbf{v}_G/dt+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_G)=m\mathbf{g}+\mathbf{R} \tag{1.6}$$

$$d'\mathbf{K}/dt+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{K}=m\mathbf{v}_G\times\mathbf{v}_{M^*}+\mathbf{MG}\times m\mathbf{g} \tag{1.7}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость системы координат $G\xi\eta\zeta$, $\mathbf{R}$ — реакция льда, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, $\mathbf{K}$ — кинетический момент диска относительно полюса M^*. Реакция $\mathbf{R}$ ортогональна линии узлов MN, так как связь, наложенная на диск, не препятствуя вращению диска вокруг оси симметрии, исключает возможность «подрезания» льда.

Векторы $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ имеют в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компоненты $(A+ma^2)p$, Aq, $Cr-mau$ и p, q, $r-\varphi^{\cdot}$ соответственно. Проектирование уравнения (1.6) на ось $G\xi$ и уравнения (1.7) на оси $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$ дает с учетом равенств (1.3) следующие четыре уравнения

$$\begin{gathered}(A+ma^2)\,dp/dt+(Cr-mau)\,q-Aq^2\operatorname{ctg}\theta+mga\cos\theta=0\\ Adq/dt+A\operatorname{ctg}\theta pq-Cpr=0\\ dr/dt=0, \qquad du/dt+apq=0\end{gathered} \tag{1.8}$$

Вместе с первым из кинематических равенств (1.1) эти уравнения образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно пяти неизвестных функций времени p, q, r, u, θ. Если эти функции найдены, то углы Эйлера ψ и φ находятся из второго и третьего равенств (1.1) посредством двух квадратур; затем вновь при помощи двух квадратур из уравнений (1.5) можно найти траекторию точки касания на поверхности льда и закон движения точки M^* по этой траектории.

Уравнения движения допускают следующие четыре первых интеграла:

$$^1/_2[(A+ma^2)p^2+Aq^2+Cr^2+mu^2]+mga\sin\theta=h=\text{const} \tag{1.9}$$

$$r=r_0=\text{const} \tag{1.10}$$

$$Aq\sin\theta+Cr\cos\theta=c_1=\text{const} \tag{1.11}$$

$$u+(ac_1/A)\ln\operatorname{tg}\theta/2-(Cra/A)\ln\sin\theta=c_2=\text{const} \tag{1.12}$$

Равенство (1.9) есть интеграл энергии; равенства (1.10) — (1.11) — интегралы площадей, которые означают, что проекция угловой скорости диска на его ось симметрии и проекция кинетического момента диска относительно центра тяжести на вертикаль постоянны во все время движения. Существование интегралов (1.10) — (1.12) впервые и другим путем установлено в [1].

2. Уравнения движения допускают частное решение

$$\theta=\theta_0, \qquad p=0, \qquad q=q_0, \qquad r=r_0, \qquad u=u_0 \tag{2.1}$$

где постоянные θ_0, q_0, r_0, u_0 связаны соотношением

$$Aq_0^2\operatorname{ctg}\theta_0-(Cr_0-mau_0)\,q_0-mga\cos\theta_0=0 \tag{2.2}$$

Решение (2.1) отвечает стационарным движениям диска, при которых его плоскость наклонена к поверхности льда под постоянным углом θ_0, при этом угловые скорости ω_1 и ω_2 собственного вращения и прецессии диска постоянны

$$\omega_1=r_0-q_0\operatorname{ctg}\theta_0,\qquad \omega_2=q_0/\sin\theta_0 \tag{2.3}$$

а вектор скорости центра тяжести диска горизонтален и имеет постоянную длину $|u_0|$. Если $u_0+ar_0\neq0$, то стационарное движение диска происходит со скольжением, в противном случае — без скольжения.

Уравнение (1.5) на решении (2.1) принимает вид $x^\bullet=(u_0+a\omega_2\cos\theta_0)\times\times\cos\psi(t)$, $y^\bullet=(u_0+a\omega_2\cos\theta_0)\sin\psi(t)$, $\psi(t)=\omega_2t+\psi(0)$.

Отсюда видно, что если на стационарном движении $\omega_2\neq0$, то следом точки касания будет окружность радиуса $|(u_0+a\omega_2\cos\theta_0)/\omega_2|$; траекторией центра тяжести также будет окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости льда на расстоянии $GQ=a\sin\theta_0$ от последней и имеющая центр на вертикали, проходящей через центр окружности — следа точки касания. Радиус окружности, описываемой центром тяжести, равен $|u_0/\omega_2|$; если $u_0=0$, то эта окружность вырождается в точку, т. е. на стационарном движении центр тяжести диска неподвижен.

Если же $\omega_2=0$ (что, согласно (2.2), (2.3), возможно лишь при $\theta_0=={}^1/_2\pi\ldots$), то при $u_0\neq0$ траекторией точки касания на льду будет прямая; при $u_0=0$ эта прямая вырождается в точку; плоскость диска при этом вертикальна. Если в рассматриваемом случае $r_0=0$, то диск совершает поступательное движение вдоль указанного прямолинейного следа или (при $u_0=0$) покоится; если же $r_0\neq0$, то диск при движении вдоль прямой вращается вокруг своей оси симметрии, занимающей горизонтальное положение, с постоянной угловой скоростью $\omega_1=r_0$, при $u_0=0$ ось симметрии диска неподвижна и диск «буксует» на месте, вращаясь вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\omega_1=r_0$.

В общем случае соотношение (2.2) определяет трехпараметрическое семейство стационарных движений диска. В частных случаях это семейство может быть описано при помощи меньшего числа параметров. Если, например, $\theta_0={}^1/_2\pi$, то равенство (2.2) определяет два семейства двухпараметрических стационарных движений диска, в которых плоскость диска вертикальна. Для одного из них (ω_2 — произвольная величина):

$$\theta_0={}^1/_2\pi,\qquad mau_0=Cr_0 \tag{2.4}$$

а для другого — (u_0, r_0 — произвольные величины):

$$\theta_0={}^1/_2\pi,\qquad \omega_2=0 \tag{2.5}$$

Механический смысл движений (2.5) (а также и движений (2.4) при $\omega_2=0$) описан выше. Рассмотрим движения (2.4) при $\omega_2\neq0$. В этих движениях плоскость диска вертикальна, а центр тяжести диска и точка касания движутся по окружностям одинаковых радиусов, равных $|u_0/\omega_2|$; сам диск движется так, как если бы он был основанием прямого кругового конуса, имеющего неподвижную вершину, расположенную на высоте a над плоскостью льда, и движущегося соприкасаясь со льдом одной из точек окружности своего основания; движение конуса происходит со скольжением или без скольжения, в зависимости от того, выполняется неравенство $u_0+ar_0\neq0$ или нет. Второе из равенств в (2.4) есть условие осуществимости такого движения (регулярной прецессии) упомянутого конуса, если считать, что вся масса конуса сосредоточена в его основании. Отметим, что такое стационарное движение диска в случае его движения по абсолютно гладкой или абсолютно шероховатой плоскости не существует.

Если в движении (2.4) $u_0=0$, то диск вращается вокруг его неподвижного вертикального диаметра с произвольной постоянной угловой скоростью ω_2.

3. Для исследования устойчивости стационарных движений введем возмущения x_i ($i=1, 2, \ldots, 5$), положив $\theta=\theta_0+x_1$, $p=x_2$, $q=q_0+x_3$, $r==r_0+x_4$, $u=u_0+x_5$. Линеаризованные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$x_1^{\cdot}=x_2, \quad x_2^{\cdot}=a_{21}x_1+a_{23}x_3+a_{24}x_4+a_{25}x_5$$

$$x_3^{\cdot}=a_{32}x_2, \quad x_4^{\cdot}=0, \quad x_5^{\cdot}=a_{52}x_2 \tag{3.1}$$

$$a_{21}=\sigma(mga\sin\theta_0-A\sin^{-2}\theta_0q_0^2)$$

$$a_{23}=\sigma(2A\operatorname{ctg}\theta_0q_0+mau_0-Cr_0)$$

$$a_{24}=-Cq_0\sigma, \quad a_{25}=maq_0\sigma, \quad a_{32}=(C/A)r_0-\operatorname{ctg}\theta_0q_0$$

$$a_{52}=-aq_0, \quad \sigma=(A+ma^2)^{-1}$$

Характеристическое уравнение системы (3.1):

$$\lambda^3(\lambda^2-a_{21}-a_{23}a_{32}-a_{25}a_{52})=0 \tag{3.2}$$

не имеет корней с положительной вещественной частью, если выполняется неравенство $a_{21}+a_{23}a_{32}+a_{25}a_{52}\leqslant 0$, которое в развернутой форме может быть представлено в виде

$$C^2r_0^2/A-3C\operatorname{ctg}\theta_0q_0r_0+(A+ma^2+3A\operatorname{ctg}^2\theta_0)q_0^2+ \tag{3.3}$$

$$+mau_0(\operatorname{ctg}\theta_0q_0-Cr_0/A)-mga\sin\theta_0\geqslant 0$$

Неравенство (3.3) необходимо для устойчивости. Для получения достаточных условий воспользуемся теоремой Ляпунова об устойчивости движения [2]. Интегралы (1.9)—(1.12) в возмущенном движении могут быть записаны в виде

$$V_1\equiv 2mga\cos\theta_0x_1+2Aq_0x_3+2Cr_0x_4+2mu_0x_5-$$

$$-mga\sin\theta_0x_1^2+(A+ma^2)x_2^2+Ax_3^2+Cx_4^2+$$

$$+mx_5^2+\ldots=\text{const}, \quad V_2\equiv x_4=\text{const}$$

$$V_3\equiv 2(A\cos\theta_0q_0-C\sin\theta_0r_0)x_1+2A\sin\theta_0x_3+2C\cos\theta_0x_4-(A\sin\theta_0q_0+$$

$$+C\cos\theta_0r_0)x_1^2+2A\cos\theta_0x_1x_3-2C\sin\theta_0x_1x_4+\ldots=\text{const}$$

$$V_4\equiv 2x_5+2aq_0x_1+a(C/Ar_0-\operatorname{ctg}\theta_0q_0)x_1^2-$$

$$-2aC/A\ln\sin\theta_0V_2+2a/A\ln\operatorname{tg}\theta_0/2V_3+\ldots=\text{const}$$

Многоточием в выражениях для V_1, V_3, V_4 и далее обозначены члены выше второго порядка относительно возмущений.

Функцию Ляпунова возьмем [3] в виде суммы квадратов интегралов уравнений возмущенного движения $V=V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2$. Функция V будет определенно-положительной в том и только том случае, когда знакоопределенной будет функция V_1 при значениях возмущений x_i ($i=1, 2, \ldots$ $\ldots, 5$), удовлетворяющих уравнениям $V_j=0$ ($j=2, 3, 4$). Из этих уравнений имеем величины x_3, x_4, x_5 в виде рядов по степеням величины x_1

$$x_3=(Cr_0/A-\operatorname{ctg}\theta_0q_0)x_1+{}^1/_2[(1+2\operatorname{ctg}^2\theta_0)q_0-(C/A)\operatorname{ctg}\theta_0r_0]x_1^2+\ldots$$

$$x_4=0, \quad x_5=-aq_0x_1-{}^1/_2a(Cr_0/A-\operatorname{ctg}\theta_0q_0)x_1^2+\ldots \tag{3.4}$$

При условиях (3.4) V_1 будет функцией от x_1 и x_2, причем ее часть, линейная относительно x_1, обратится в нуль в силу равенства (2.2). Имеем $V_1=\alpha x_1^2+(A+ma^2)x_2^2+\ldots$ где выражение для коэффициента α, как показывают выкладки, совпадает с левой частью неравенства (3.3).

Таким образом, условие (3.3) является необходимым и (с точностью до знака равенства) достаточным условием устойчивости стационарного движения диска (2.1).

Если $u_0+ar_0=0$, т. е. в невозмущенном движении (2.1) скольжение диска по льду отсутствует, то условия (2.2) и (3.3) существования и устойчивости стационарных движений диска на гладком льду переходят в соответствующие условия для движения диска на абсолютно шероховатой плоскости [4].

Рассмотрим условие устойчивости (3.3) в частных случаях (2.4), (2.5), когда плоскость диска в стационарном движении занимает вертикальное положение. При $\theta_0={}^1/{}_2\pi$ неравенство (3.3) принимает вид

$$C^2r_0^2+A(A+ma^2)q_0^2-maCu_0r_0-mgaA\geqslant 0 \qquad (3.5)$$

Отсюда следует, что движение (2.4) устойчиво (независимо от значений величин u_0 и r_0), если угловая скорость прецессии $\omega_2=q_0$ диска достаточно велика $\omega_2^2>\omega_2^{*2}=mga\sigma$. Отметим, что это условие совпадает с условием устойчивости стационарного вращения диска вокруг его неподвижного вертикального диаметра в случае абсолютно шероховатой плоскости [4].

При $\omega_2=q_0=0$ из (3.5) получаем, что движение (2.5) устойчиво, если угловая скорость собственного вращения $\omega_1=r_0$ удовлетворяет неравенству $C^2\omega_1^2-maCu_0\omega_1-mgaA>0$.

Отсюда при $u_0=0$ следует, что буксующий на месте диск устойчив, если выполняется условие

$$\omega_1^2>\omega_1^{*2}=mgaA/C^2 \qquad (3.6)$$

Это условие совпадает с условием устойчивости буксующего диска на абсолютно гладкой плоскости [5], но на гладкой плоскости для устойчивости не требовалось равенства нулю величины u_0: там буксование могло сопровождаться поступательным движением диска вдоль прямой с произвольной скоростью. В случае же диска на гладком льду условия устойчивости при $u_0\neq 0$ не будут совпадать с условиями (3.6).

При $u_0\neq 0$ стационарное движение диска (2.5) будет устойчивым, если (при $u_0>0$) выполняется одно из неравенств

$$\omega_1>\frac{mau_0}{2C}\left[1+\left(1+\frac{4Ag}{mau_0^2}\right)^{1/2}\right] \text{ или } \omega_1<\frac{mau_0}{2C}\left[1-\left(1+\frac{4Ag}{mau_0^2}\right)^{1/2}\right] \qquad (3.7)$$

При $u_0<0$ знаки в неравенствах (3.7) надо изменить на противоположные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* О теоремах динамики.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 28–33.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— В кн.: Собр. соч. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2, с. 7–263.
3. *Пожарицкий Г. К.* О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 2, с. 145–154.
4. *Дувакин А. П.* Об устойчивости движений диска.— Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 1, с. 3–9.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 778–784.

Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1985