МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.376

ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАСТУЩИХ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ СТАРЕНИЯ И РАЗГРУЗКИ

АРУТЮНЯН Н. Х., ГЕОГДЖАЕВ В. О., НАУМОВ В. Э.

В настоящей статье рассматриваются модельные задачи о наращивании тел, первоначально находившихся в вязкоупругопластическом состоянии. Показано, что при наращивании с предварительным напряжением добавляемых элементов материала возможно проявление как эффекта догружения, так и разгрузки исходного тела в зависимости от знака преднапряжения. В первой части статьи решается задача о наращивании полого цилиндра при кручении, во второй – изгибаемой консольной балки, в третьей – вращающегося диска. Решения всех задач иллюстрируются примерами для случая упругопластического материала.

1. Наращивание вязкоупругопластического полого цилиндра при кручении. *1.1. Постановка задачи.* Пусть в начальный момент времени $t=0$ имеется полый цилиндр с внутренним радиусом R_0 и наружным радиусом R_1, изготовленный из однородного стареющего вязкоупругопластического материала. Будем считать, что цилиндр подвержен действию скручивающего момента M и находится в условиях плоской осесимметричной деформации. Внешняя и внутренняя цилиндрические поверхности свободны от напряжений. Предположим, что в момент приложения нагрузки $t=0$ в цилиндре образовалась зона пластического состояния материала.

Пусть далее, начиная с момента времени $t=0$, осуществляется непрерывное наращивание скручиваемого тела бесконечно тонкими цилиндрическими слоями материала, добавляемыми к внешней поверхности тела. Наращивание осуществляется таким образом, что внешний радиус цилиндра определяется монотонно возрастающей непрерывной функцией $R(t)$, так, что $R(0)=R_1$ (фиг. 1).

Уравнения состояния в вязкоупругой зоне исходного ядра поперечного сечения $R_0\leqslant r\leqslant R_*$ и области наращивания $R_1\leqslant r\leqslant R(t)$ запишем в следующем виде

$$\tau_{z\varphi}(t,r)=G\left[\gamma_{z\varphi}(t,r)-\int_0^t\gamma_{z\varphi}(\tau,r)S(t,\tau)\,d\tau\right],\qquad R_0\leqslant r\leqslant R_* \tag{1.1}$$

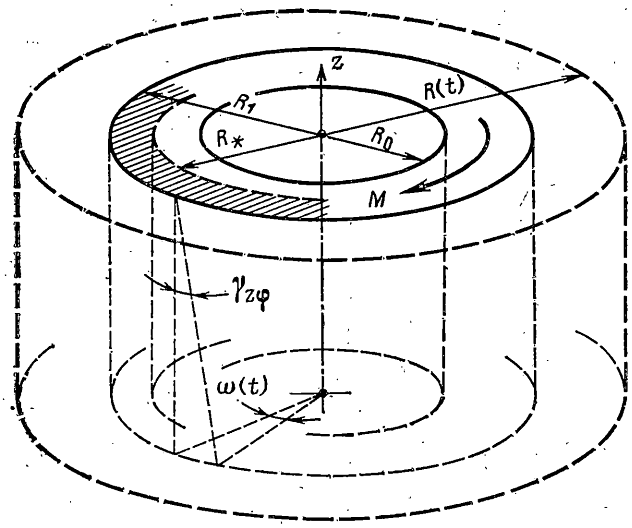
$$\tau_{z\varphi}(t,r)=G\left[\gamma_{z\varphi}(t,r)-\int_{\tau^*(r)}^t\gamma_{z\varphi}(\tau,r)S(t-\tau^*(r),\tau-\tau^*(r))\,d\tau\right],\qquad R_1\leqslant r\leqslant R(t) \tag{1.2}$$

Здесь $\gamma_{z\varphi}$ – деформация сдвига, $\tau_{z\varphi}$ – единственная отличная от нуля компонента тензора напряжения, $S(t,\ \tau)$ – ядро релаксации стареющего материала, $\tau^*(r)$ – момент зарождения элементарного цилиндрического слоя материала радиуса r, совпадающий с моментом сращивания этого слоя с основным цилиндром. Уравнение (1.2) учитывает возникающую в процессе наращивания возрастную неоднородность материала [1].

Условие пластичности запишем в виде

$$\tau_{z\varphi}=k,\qquad k=\mathrm{const},\qquad R_*\leqslant r\leqslant R_1 \tag{1.3}$$

где k – предел пластичности при чистом сдвиге.



Фиг. 1

Интегральное уравнение равновесия цилиндра на произвольном этапе наращивания имеет вид

$$M=2\pi\int\limits_{R_0}^{R(t)}\tau_{z\varphi}(t,r)\,r^2\,dr,\qquad M=\text{const}\tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение функцию времени $\omega(t)$, равную углу закручивания исходного цилиндра ($R_0\leqslant r\leqslant R_1$) на единицу его длины под действием момента M, которая связана со сдвиговой деформацией $\gamma_{z\varphi}$ очевидным соотношением: $\gamma_{z\varphi}(t,r)=\omega(t)r$, $R_0\leqslant r\leqslant R_1$.

Мгновенное упругопластическое состояние, реализующееся в начальный момент времени $t=0$, определяется на основе известных соотношений [2].

Введем безразмерные величины

$$\rho=r/R_1,\qquad a=R_0/R_1,\qquad c=R_*/R_1,\qquad b(t)=R(t)/R_1$$

$$\sigma=\tau_{z\varphi}/k,\qquad m=3M/(2\pi kR_1^3),\qquad \theta=R_1\omega,\qquad \alpha=G/k$$

Время будем считать измеряющимся в условных безразмерных единицах.

Поскольку приращиваемые цилиндрические слои материала перед стыковкой с основным телом имеют, вообще говоря, произвольный угол закручивания, никак не связанный с круткой основного цилиндра в текущий момент времени, то деформированное состояние элементов наращиваемой зоны будем характеризовать безразмерным углом закручивания $\Theta(t,\rho)$, $1\leqslant\rho\leqslant b(t)$, являющимся функцией как времени, так и радиальной координаты.

Условие сращивания, т. е. совместного деформирования элементарного слоя некоторого радиуса $\rho\geqslant1$ с основным телом после момента стыковки, который считается совпадающим с моментом зарождения, сформулируем в виде

$$\Theta(t,\rho)=\theta(t)-\theta(\tau^*(\rho))+\theta^\circ(\rho)\tag{1.5}$$

где $\theta^\circ(\rho)$ — некоторая заданная функция радиуса, которую будем трактовать как предварительный (начальный) угол закручивания слоя радиуса ρ перед сращиванием с основным цилиндром. Соотношение (1.5) устанавливает равенство приращений углов поворота сечений ядра цилиндра и слоя произвольного радиуса, расположенного в зоне наращивания.

Заметим, что начальный угол закручивания может быть как одинакового знака с круткой ядра сечения θ, так и противоположного. Будем говорить, что в первом случае имеет место положительный натяг слоя, а во втором — отрицательный. Возможны также процессы *ненапряженного* наращивания, когда $\theta^\circ \equiv 0$.

Ясно, что наращивание с положительным натягом первоначально вызывает частичную разгрузку ядра сечения и ранее стыкованных слоев, так как реакция преднапряженных слоев в этом случае компенсирует действие внешнего момента. Наращивание с отрицательным натягом вызывает, наоборот, догружение основного тела, так как реакция сращиваемых слоев по направлению действия совпадает с действием внешнего момента.

1.2. Разгрузка вязкоупругопластического цилиндра. Рассмотрим процесс непрерывного преднапряженного наращивания вязкоупругопластического цилиндра с положительным углом начального закручивания приращиваемых слоев ($\theta^\circ(\rho)>0$, $\rho\geqslant 1$). Часть величины внешнего момента, которая приходится на исходное ядро поперечного сечения ($a\leqslant\rho\leqslant 1$), на некотором этапе наращивания обозначим $m_0(t)$. В начальный момент времени $t=0$, очевидно, $m_0(0)=m$.

Поскольку исходный цилиндр является однородным вязкоупругим, то напряжения в нем после разгрузки, согласно известным принципам соответствия, будут совпадать с напряжениями в случае чисто упругопластического цилиндра после уменьшения внешнего момента от величины m до величины $m_0(t)$ и определяются на основе известной теоремы о разгрузке [3]:

$$\sigma(t,\rho)=\rho\left[\frac{1}{c_0}-\frac{4}{3}\frac{m-m_0(t)}{1-a^4}\right],\qquad a\leqslant\rho\leqslant c_0 \tag{1.6}$$

$$\sigma(t,\rho)=1-\frac{4}{3}\rho\frac{m-m_0(t)}{1-a^4},\qquad c_0\leqslant\rho\leqslant 1 \tag{1.7}$$

Обращение определяющего уравнения (1.1) с учетом переобозначения безразмерных величин запишем в операторной форме

$$\theta(t)=\frac{1}{\alpha\rho}\mathbf{K}_0^t[\sigma(t,\rho)],\qquad \mathbf{K}_0^t[\sigma(t,\rho)]=\sigma(t,\rho)-\int_0^t\sigma(\tau,\rho)K(t,\tau)\,d\tau \tag{1.8}$$

где $K(t,\tau)$ — ядро ползучести стареющего материала.

Подставив выражение для напряжения (1.6) в соотношение (1.8), определим крутку исходного ядра цилиндра

$$\theta(t)=\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{1}{c_0}-\frac{4}{3}\frac{m}{1-a^4}\right)\mathbf{K}_0^t(1)+\frac{4}{3(1-a^4)}\mathbf{K}_0^t[m_0(t)]\right] \tag{1.9}$$

Уравнение состояния (1.2) также перепишем в операторной форме

$$\sigma(t,\rho)=\alpha\rho\mathbf{S}^t_{\tau^*(\rho)}[\Theta(t,\rho)],\qquad 1\leqslant\rho\leqslant b(t),\qquad t\geqslant\tau^*(\rho)$$

$$\mathbf{S}^t_{\tau^*(\rho)}[\Theta(t,\rho)]=\Theta(t,\rho)-\int_{\tau^*(\rho)}^t\Theta(\tau,\rho)S(t-\tau^*(\rho),\tau-\tau^*(\rho))\,d\tau$$

С учетом связи (1.5) и выражения (1.9) для определения напряжений в зоне наращивания будем иметь

$$\sigma(t,\rho)=\rho\left\{\frac{4}{3(1-a^4)}\mathbf{S}^t_{\tau^*(\rho)}(\mathbf{K}_0^t[m_0(t)])+\right. \tag{1.10}$$

$$\left.+\left[\alpha\theta^\circ(\rho)-\frac{4}{3(1-a^4)}m_0(\tau^*(\rho))\right]\mathbf{K}_0^{\tau^*(\rho)}(1)\mathbf{S}^t_{\tau^*(\rho)}(1)\right\}$$

Интегрируя это выражение по ρ от 1 до $b(t)$, получим следующее интегральное уравнение для определения функции $m_0(t)$:

$$m-m_0(t)=\int\limits_1^{b(t)}\left\{\frac{4}{3(1-a^4)}\mathbf{S}^t_{\tau^*(\rho)}(\mathbf{K}_0{}^t[m_0(t)])+\right. \tag{1.11}$$

$$\left.+\left[\alpha\theta^\circ(\rho)-\frac{4}{3(1-a^4)}m_0(\tau^*(\rho))\right]\mathbf{K}_0^{\tau^*(\rho)}(1)\mathbf{S}^t_{\tau^*(\rho)}(1)\right\}\rho^3\,d\rho$$

После решения этого уравнения крутка $\theta(t)$ определяется по формуле (1.9).

1.3. Случай упругопластического материала. При отсутствии вязких эффектов ($K(t,\tau)\equiv 0$, $S(t,\tau)\equiv 0$) уравнение (1.11) принимает вид

$$m_0(t)\left[1+\frac{b^4(t)-1}{1-a^4}\right]-\frac{4}{1-a^4}\int\limits_0^t m_0(\xi)b^3(\xi)b'(\xi)\,d\xi=m-3\alpha\int\limits_1^{b(t)}\theta^\circ(\rho)\rho^3\,d\rho \tag{1.12}$$

Дифференцирование уравнения (1.12) по t дает (здесь и далее штрих наверху означает производную по единственному аргументу)

$$m_0'=-3\alpha(1-a^4)\theta^\circ(b)b^3b'/(b^4-a^4)$$

Интегрируя это выражение по времени с учетом начального условия $m_0(0)=m$, получим

$$m_0(t)=m-3\alpha(1-a^4)\int\limits_1^{b(t)}\theta^\circ(\rho)\frac{\rho^3\,d\rho}{\rho^4-a^4} \tag{1.13}$$

Это выражение справедливо для произвольных зависимостей $\theta^\circ(\rho)$ и $b(t)$.

В случае $\theta^\circ=\mathrm{const}$ выражение (1.13) принимает вид

$$m_0(t)=m-{}^3/_4\alpha\theta^\circ(1-a^4)\ln\{[b^4(t)-a^4]/(1-a^4)\} \tag{1.14}$$

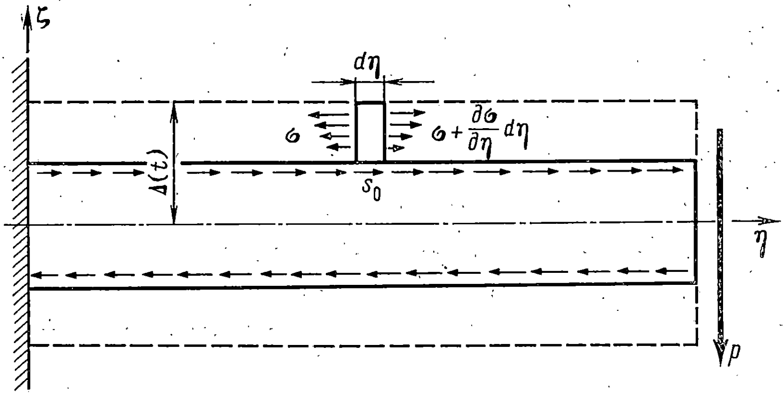
Видно, что при $\theta^\circ>0$ часть внешнего момента, приходящаяся на исходный полый цилиндр, монотонно уменьшается. Из равенства (1.14) можно определить значение внешнего радиуса наращиваемого цилиндра, при котором скручивающий момент, действующий на исходное ядро, становится равным нулю. Обозначив этот радиус через b_*, а соответствующий ему момент времени через t_*, будем иметь

$$b_*=b(t_*)=\{(1-a^4)\exp[4m/(3\alpha\theta^\circ(1-a^4))]\}^{1/4}$$

Таким образом, в момент времени $t_*=\tau^*(b_*)$ внешняя закручивающая нагрузка на исходный полый цилиндр ($a\leqslant\rho\leqslant 1$) оказывается полностью «снятой». Остаточные напряжения в нем, конечно, останутся.

2. Наращивание изгибаемой вязкоупругопластической балки. *2.1. Постановка задачи.* Пусть имеется однородная вязкоупругопластическая балка длины l, прямоугольное поперечное сечение которой имеет высоту $2h_0$ и ширину $2b$. Левый торец балки жестко закреплен, а на правый конец действует постоянная изгибающая сила $P=\mathrm{const}$ (фиг. 2). Начало прямоугольной системы координат (x, y, z) расположим на пересечении диагоналей закрепленного сечения, направив ось x вдоль балки, а оси y и z — по осям симметрии поперечного сечения. Изгиб балки осуществляется в плоскости (x, z). От координаты y величины, входящие в постановку и решение задачи, не зависят. Допустим, что первоначально приложенная к балке в момент времени $t=0$ сила P вызывает в ней мгновенное упругопластическое состояние.

Пусть начиная с момента времени $t=0$ осуществляется послойное непрерывное симметричное наращивание балки в поперечном направлении таким образом, что полувысота поперечного сечения определяется заданной монотонно возрастающей непрерывной функцией $h=h(t)$, а ширина сечения остается постоянной. При этом $h(0)=h_0$.



Фиг. 2

Будем предполагать, что отличными от нуля являются только компоненты напряжения σ_x и τ_{xz}. Определяющее уравнение, связывающее осевые напряжение и деформацию для исходной однородной балки, запишем в виде

$$\sigma_x(t,\mathbf{r})=E\left[\varepsilon(t,\mathbf{r})-\int_0^t \varepsilon(\tau,\mathbf{r})R(t,\tau)\,d\tau\right] \tag{2.1}$$

где E — мгновенный модуль упругости (E=const), ε — осевая деформация, $\mathbf{r}=(x, z)$ — радиус-вектор рассматриваемой точки исходного поперечного сечения балки, $R(t, \tau)$ — ядро релаксации.

Принимая гипотезу плоских сечений, будем иметь

$$\varepsilon(t, \mathbf{r})=z\partial^2 w(t, x)/\partial x^2 \tag{2.2}$$

где w — прогиб нейтральной оси балки, а $\partial^2 w/\partial x^2$ — ее кривизна.

Введем следующие безразмерные величины (σ_s — предел пластичности на растяжение-сжатие):

$$\eta=x/h_0,\quad \zeta=z/h_0,\quad \lambda=l/h_0,\quad \varkappa=h_0\,\partial^2 w/\partial x^2$$

$$\sigma=\sigma_x/\sigma_s,\quad s=\tau_{xz}/\sigma_s,\quad \alpha=E/\sigma_s,\quad p=P/(4bh_0\sigma_s),\quad m=M/(4bh_0^2\sigma_s)$$

В соответствии с этими обозначениями соотношения, определяющие мгновенное упругопластическое состояние балки при $t=0$, примут вид [2]:

$$0\leqslant\eta\leqslant\eta^*:\quad \sigma=\zeta/\zeta^*,\quad 0\leqslant\zeta\leqslant\zeta^*;\quad \sigma=1,\quad \zeta^*\leqslant\zeta\leqslant 1;$$

$$\varkappa=1/(\alpha\zeta^*),\quad 0\leqslant\zeta\leqslant 1$$

$$\eta^*\leqslant\eta\leqslant\lambda:\quad \sigma=3p(\lambda-\eta)\zeta,\quad \varkappa=3p(\lambda-\eta)/\alpha,\quad 0\leqslant\zeta\leqslant 1$$

где η^* и ζ^* — отнесенные к h_0 длина и высота пластических зон.

2.2. Разгрузка вязкоупругопластической балки. Будем считать, что верхние приращиваемые слои имеют положительное предварительное напряжение (растянуты), а нижние — отрицательное (сжаты). При этом, вообще говоря, величина преднапряжения может изменяться как от слоя к слою, так и вдоль отдельного приращиваемого волокна. При таком характере преднапряжения приращиваемые слои будут создавать изгибающий момент, противоположный по знаку внешнему моменту. Перерезывающая сила, воспринимаемая исходным сечением балки, уменьшится от начальной величины p до величины p_0, которая зависит от протекания процесса наращивания и, следовательно, является функцией времени $p_0=p_0(t)$. Вдоль поверхностей $\zeta=\pm1$ при $t>0$ будут действовать касательные напряжения, которые обозначим s_0. Предположим, что наращивание осуществляется таким образом, что касательные напряжения s_0 не зависят от η и являются функцией только времени. Это предположение, как будет показано ниже, устанавливает дополнительные ограничения на характер предварительного напряжения.

Учитывая, что исходная балка однородна, и пользуясь, как в предыдущей задаче, теоремой о разгрузке, получим следующие выражения для напряжений в разгруженном состоянии:

$$0\leqslant\eta\leqslant\eta^*:\quad \sigma(t,\eta,\zeta)=\zeta/\zeta^*-3[p-p_0(t)+s_0(t)](\lambda-\eta)\zeta,\quad 0\leqslant\zeta\leqslant\zeta^* \tag{2.3}$$

$$\sigma(t,\eta,\zeta)=1-3[p-p_0(t)+s_0(t)](\lambda-\eta)\zeta,\quad \zeta^*\leqslant\zeta\leqslant1 \tag{2.4}$$

$$\eta^*\leqslant\eta\leqslant\lambda:\quad \sigma=3[p_0(t)-s_0(t)](\lambda-\eta)\zeta,\quad 0\leqslant\zeta\leqslant1 \tag{2.5}$$

Обратимся к определению кривизны нейтральной оси в разгруженном состоянии. Обращение реологического уравнения (2.1) запишем в виде

$$\varkappa(t,\eta)=\frac{1}{\alpha\zeta}\mathbf{K}_0{}^t[\sigma(t,\eta,\zeta)],\quad \mathbf{K}_0{}^t[\sigma(t,\eta,\zeta)]=\sigma(t,\eta,\zeta)-\int_0^t\sigma(\tau,\eta,\zeta)K(t,\tau)\,d\tau \tag{2.6}$$

где $K(t,\tau)$ — безразмерное ядро ползучести материала.

Подставляя выражения для напряжений (2.3) и (2.5) в уравнение (2.6), получим

$$\varkappa(t,\eta)=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\zeta^*}-3p(\lambda-\eta)\right]\mathbf{K}_0{}^t(1)+\frac{3}{\alpha}(\lambda-\eta)\mathbf{K}_0{}^t[p_0(t)-s_0(t)],\quad 0\leqslant\eta\leqslant\eta^* \tag{2.7}$$

$$\varkappa(t,\eta)=\frac{3}{\alpha}(\lambda-\eta)\mathbf{K}_0{}^t[p_0(t)-s_0(t)],\quad \eta^*\leqslant\eta\leqslant\lambda \tag{2.8}$$

При определении напряженно-деформированного состояния в зоне наращивания будем пользоваться определяющим соотношением вида ($\Delta(t)=h(t)/h_0$):

$$\sigma(t,\eta,\zeta)=\alpha\mathbf{R}^{t}_{\tau^*(\zeta)}[\varepsilon(t,\eta,\zeta)] \tag{2.9}$$

$$\mathbf{R}^{t}_{\tau^*(\zeta)}[\varepsilon(t,\eta,\zeta)]=\varepsilon(t,\eta,\zeta)-\int_{\tau^*(\zeta)}^{t}\varepsilon(\tau,\eta,\zeta)R(t-\tau^*(\zeta),\tau-\tau^*(\zeta))\,d\tau$$

$$t\geqslant\tau^*(\zeta),\quad 0\leqslant\eta\leqslant\lambda,\quad 1\leqslant\zeta\leqslant\Delta(t)$$

Здесь $\tau^*(\zeta)$ — момент зарождения и приращивания слоев материала, расположенных на расстоянии ζ по обе стороны от оси η. Функция $\tau^*(\zeta)$ определена, очевидно, для $\zeta\geqslant1$.

Для осевой деформации слоев наращиваемой зоны примем выражение

$$\varepsilon(t,\eta,\zeta)=\zeta[\varkappa(t,\eta)-\varkappa(\tau^*(\zeta),\eta)]+\varepsilon^\circ(\eta,\zeta) \tag{2.10}$$

Согласно этому соотношению, деформация слоя в момент сращивания $t=\tau^*(\zeta)$ равна заданной величине $\varepsilon^\circ(\eta,\zeta)$. Структура модифицированного закона плоских сечений (2.10) такова, что деформация элементов зоны наращивания определяется, кроме начальной деформации, только приращением кривизны нейтральных волокон ($\zeta=0$), а не полной кривизной, как для элементов исходной балки.

Вырежем в наращиваемой части балки элемент длины $d\eta$ высотой от $\zeta=1$ до $\zeta=\Delta(t)$. Рассматривая равновесие этого элемента, получим

$$s_0=-\int_1^{\Delta(t)}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\,d\zeta \tag{2.11}$$

Поскольку действующие в наращиваемой области поперечного сечения касательные усилия s воспринимают перерезывающую силу $p-p_0(t)$, то

$$2\int_1^{\Delta(t)}s\,d\zeta=p-p_0(t)$$

откуда следует, что функция s не зависит от η. Это означает, что касательные напряжения s_0, действующие по границе $\zeta=1$, также не зависят от η. Тогда согласно (2.11) осевое напряжение σ есть линейная функция η, причем $\sigma=0$ при $\eta=\lambda$, так как правый торец балки свободен от нормальных усилий. Сказанное определяет зависимости для предварительного напряжения и начальной деформации следующего вида:

$$\sigma^\circ(\eta,\zeta)=(\lambda-\eta)\sigma^*(\zeta),\quad \varepsilon^\circ(\eta,\zeta)=(\lambda-\eta)\varepsilon^*(\zeta),$$
$$\sigma^\circ(\eta,\zeta)=\alpha\varepsilon^\circ(\eta,\zeta) \tag{2.12}$$

Предполагается, что величина преднапряжения σ° не превышает предела пластичности материала.

Подставим в уравнение (2.9) выражения (2.10) и (2.12), а также соотношение (2.7) или (2.8). Пользуясь затем формулой (2.11), после некоторых преобразований получим следующее интегральное уравнение, связывающее неизвестные функции $s_0(t)$ и $p_0(t)$:

$$s_0(t)=\int\limits_1^{\Delta(t)}[3\zeta\mathbf{R}^t_{\tau^*(\zeta)}\{\mathbf{K}_0{}^t[p_0(t)-s_0(t)]\}-3\zeta[p_0(\tau^*(\zeta))-$$
$$-s_0(\tau^*(\zeta))]\mathbf{K}_0^{\tau^*(\zeta)}(1)\mathbf{R}^t_{\tau^*(\zeta)}(1)+\sigma^*(\zeta)\mathbf{R}^t_{\tau^*(\zeta)}(1)]d\zeta \tag{2.13}$$

С другой стороны, внешний изгибающий момент, приходящийся на наращиваемую часть балки, уравновешивается нормальными напряжениями σ. Из этого условия получим второе интегральное уравнение, связывающее функции $s_0(t)$ и $p_0(t)$:

$$p-p_0(t)+s_0(t)=2\int\limits_1^{\Delta(t)}[3\zeta\mathbf{R}^t_{\tau^*(\zeta)}\{\mathbf{K}_0{}^t[p_0(t)-s_0(t)]\}-$$
$$-3\zeta[p_0(\tau^*(\zeta))-s_0(\tau^*(\zeta))]\mathbf{K}_0^{\tau^*(\zeta)}(1)\mathbf{R}^t_{\tau^*(\zeta)}(1)+\sigma^*(\zeta)\mathbf{R}^t_{\tau^*(\zeta)}(1)]\zeta\,d\zeta \tag{2.14}$$

Соотношения (2.13), (2.14) образуют основную систему уравнений задачи о наращивании изгибаемой вязкоупругопластической балки.

2.3. Случай упругопластического материала. Рассмотрим частный случай задачи, когда материал балки не обладает реологическими свойствами ($R(t,\tau)\equiv0$, $K(t,\tau)\equiv0$). В этом случае система уравнений (2.13), (2.14) существенно упрощается и принимает вид

$$s_0(t)={}^3/_2[\Delta^2(t)-1][p_0(t)-s_0(t)]-$$
$$-3\int\limits_1^{\Delta(t)}[p_0(\tau^*(\zeta))-s_0(\tau^*(\zeta))]\zeta\,d\zeta+\int\limits_1^{\Delta(t)}\sigma^*(\zeta)\,d\zeta \tag{2.15}$$

$$p-p_0(t)+s_0(t)=2[\Delta^3(t)-1][p_0(t)-s_0(t)]-$$
$$-6\int\limits_1^{\Delta(t)}[p_0(\tau^*(\zeta))-s_0(\tau^*(\zeta))]\zeta^2\,d\zeta+2\int\limits_1^{\Delta(t)}\sigma^*(\zeta)\zeta\,d\zeta \tag{2.16}$$

Выполняя в уравнениях (2.15), (2.16) замену переменной $\tau^*(\zeta)=\xi$ или $\zeta=\Delta(\xi)$ и дифференцируя их по t, после некоторых преобразований получим

$$s_0'=\frac{-\Delta^3+3\Delta-1}{2\Delta^3-1}\sigma^*\Delta',\qquad p_0'=\frac{-\Delta^3+\Delta-1}{2\Delta^3-1}\sigma^*\Delta' \tag{2.17}$$

Начальные условия для искомых функций s_0 и p_0 очевидны: $s_0(0)=0$, $p_0(0)=p$. Интегрируя выражения (2.17) по времени от нуля до текущего значения t, найдем следующие выражения для искомых величин через задаваемые функции $\Delta(t)$ и $\sigma^*(\zeta)$:

$$s_0(t)=\int\limits_1^{\Delta(t)}\sigma^*(\zeta)\frac{-\zeta^3+3\zeta-1}{2\zeta^3-1}d\zeta \tag{2.18}$$

$$p_0(t)=p+\int\limits_1^{\Delta(t)}\sigma^*(\zeta)\frac{-\zeta^3+\zeta-1}{2\zeta^3-1}d\zeta$$

Напряжения в балке определяются теперь по формулам (2.3)—(2.5). Заметим, что на вид функций $\Delta(t)$ и $\sigma^*(\zeta)$ при выводе формул (2.18) никаких ограничений не накладывалось.

2.4. Пример. Остановимся на случае, когда $\sigma^*=\mathrm{const}$, т. е. преднапряжение одинаково для всех элементарных слоев наращиваемой зоны.

Вычисляя интегралы в (2.18), получим

$$s_0=\sigma^*\left[-\frac{\Delta-1}{2}+\frac{c^2+1}{4c}A(\Delta)+\frac{\sqrt{3}(c^2+1)}{2c}B(\Delta)\right] \tag{2.19}$$

$$p_0=p+\sigma^*\left[-\frac{\Delta-1}{2}+\frac{3c^2-1}{12c}A(\Delta)+\frac{3c^2+1}{2\sqrt{3}\,c}B(\Delta)\right] \tag{2.20}$$

$$A(\Delta)=\ln\{(\Delta+c)^2(1-c+c^2)/[(1+c)^2(\Delta^2-\Delta c+c^2)]\}$$

$$B(\Delta)=\mathrm{arctg}(2\Delta-c)/(c\sqrt{3})-\mathrm{arctg}(2-c)/(c\sqrt{3}),\quad c=(-1/2)^{1/3}$$

где аргумент t у функций $s_0(t)$, $p_0(t)$, $\Delta(t)$ для краткости опущен. Из формул (2.19), (2.20) видно, что при достаточно большой толщине добавленного слоя материала определяющим становится линейный член в квадратных скобках. При определенном значении Δ, которое можно найти из (2.20), величина p_0 обращается в нуль, т. е. суммарная перерезывающая сила, действующая в исходном сечении балки, становится равной нулю. Дальнейшее преднапряженное наращивание будет сопровождаться изгибом балки в противоположном направлении. При этом возможно образование повторных пластических зон.

3. Наращивание вращающегося упругопластического диска. *3.1. Постановка задачи.* Пусть круглый плоский диск, имеющий постоянную малую толщину h и радиус R_0, вращается вокруг своей оси симметрии, совмещенной с осью z цилиндрической системы координат (r, φ, z). Отличные от нуля компоненты напряжения σ_r и σ_φ связаны уравнением квазистатического равновесия

$$\partial\sigma_r/\partial r+(\sigma_r-\sigma_\varphi)/r=-\gamma\Omega^2 r \tag{3.1}$$

где Ω — угловая скорость ($\Omega=\mathrm{const}$), γ — плотность материала.

Примем, что в чисто упругом состоянии материал диска подчиняется закону Гука

$$\varepsilon_r=(\sigma_r-\nu\sigma_\varphi)/E,\qquad \varepsilon_\varphi=(\sigma_\varphi-\nu\sigma_r)/E \tag{3.2}$$

где E, ν — постоянные модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ в диске, вращающемся с постоянной угловой скоростью Ω, образовалась пластическая зона $0\leqslant r\leqslant R_*$, радиус которой меньше внешнего радиуса диска: $R_*<R_0$. В области $0\leqslant r\leqslant R_*$ выполняется условие пластичности $\sigma_r^2-\sigma_r\sigma_\varphi+\sigma_\varphi^2=\sigma_s^2$, $\sigma_s=\mathrm{const}$, где σ_s — предел пластичности на растяжение.

Введем безразмерные величины: $\rho=r/R_0$, $a=R_*/R_0$, $\sigma_\rho=\sigma_r/\sigma_s$, $\bar\sigma_\varphi=\sigma_\varphi/\sigma_s$, $\alpha=E/\sigma_s$, $\lambda=\gamma\Omega^2R_0^2/\sigma_s$. Черту над величиной $\bar\sigma_\varphi$ в дальнейшем будем опускать.

Формулы, определяющие мгновенное упругопластическое состояние, реализующееся в диске в начальный момент времени $t=0$, приводить здесь нет необходимости — они имеются в [2]. Выпишем только выражения для напряжений в упругой зоне $a \leqslant \rho \leqslant 1$:

$$\sigma_\rho = C\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)+\frac{\lambda(3+\nu)}{8}(1-\rho^2) \tag{3.3}$$

$$\sigma_\varphi = C\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)+\frac{\lambda}{8}[3+\nu-(1+3\nu)\rho^2]$$

где C — неизвестная константа, определяемая вместе с радиусом пластической зоны a из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе.

Предположим, что с момента времени $t=0$ осуществляется наращивание диска в радиальном направлении, так что его внешний радиус определяется монотонно возрастающей непрерывной функцией $b(t)$, причем $b(0)=1$. Наращивание производится бесконечно тонкими слоями того же материала, из которого первоначально был изготовлен диск. Исследуем влияние процесса наращивания на напряженно-деформированное состояние вращающегося упругопластического диска.

3.2. Формирование напряжений в процессе наращивания. В соответствии с общими положениями теории наращивания деформируемых твердых тел [1] соотношения между деформациями и перемещениями, а также уравнения совместности деформаций в области наращивания должны выполняться в скоростях. В условиях рассматриваемой задачи эти соотношения имеют вид (точкой наверху обозначается частная производная по времени)

$$\varepsilon_\rho^{\cdot} = \partial u^{\cdot}/\partial\rho, \quad \varepsilon_\varphi = u^{\cdot}/\rho \tag{3.4}$$

$$\partial\varepsilon_\varphi^{\cdot}/\partial\rho + (\varepsilon_\varphi^{\cdot} - \varepsilon_\rho^{\cdot})/\rho = 0, \quad 1 \leqslant \rho \leqslant b(t) \tag{3.5}$$

где $b(t)$ — возрастающий со временем вследствие наращивания внешний радиус диска.

Будем предполагать, что наращивание осуществляется с положительным предварительным напряжением (растяжением) приращиваемых элементарных слоев в окружном направлении, т. е. напряжения в слое некоторого радиуса ρ в момент сращивания $t=\tau^*(\rho)$ определяются выражениями

$$\sigma_\varphi(\tau^*(\rho),\rho) = \sigma_\varphi^\circ(\rho) > 0, \quad \sigma_\rho(\tau^*(\rho),\rho) = 0; \quad 1 \leqslant \rho \leqslant b(t) \tag{3.6}$$

где $\sigma_\varphi^\circ(\rho)$ — заданная функция радиуса. Соответствующие компоненты начальной деформации определяются при этом из закона Гука, если интенсивность преднапряжения не превышает предела пластичности материала $\varepsilon_\varphi^\circ(\rho) = \sigma_\varphi^\circ(\rho)/\alpha$, $\varepsilon_\rho^\circ(\rho) = -\nu\sigma_\varphi^\circ(\rho)/\alpha$.

Подставляя уравнения закона Гука в уравнение совместности скоростей деформации (3.5) и сопоставляя полученное соотношение с уравнением равновесия (3.1), нетрудно найти интеграл

$$\sigma_\rho + \sigma_\varphi = X(t) + Y(\rho) \tag{3.7}$$

где $X(t)$, $Y(\rho)$ — подлежащие определению функции. Очевидно, что функцию X можно определить с точностью до постоянной. Выберем ее так, чтобы $X(0)=0$.

В силу начальных условий (3.6) выражение (3.7) перепишем в виде

$$\sigma_\rho(t,\rho) + \sigma_\varphi(t,\rho) = X(t) - X(\tau^*(\rho)) + \sigma_\varphi^\circ(\rho) \tag{3.8}$$

Подставляя это выражение в уравнение равновесия и интегрируя его по радиусу от некоторого текущего значения $\rho > 1$ до внешней границы $b(t)$ с учетом краевого условия $\sigma_\rho(t, b(t)) = 0$, будем иметь

$$\sigma_\rho(t,\rho) = -\frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{1}{2}[b^2(t)-\rho^2]X(t) - \int_\rho^{b(t)} X(\tau^*(\eta))\eta\,d\eta + \right. \tag{3.9}$$

$$\left. + \int_\rho^{b(t)} \sigma_\varphi^\circ(\eta)\eta\,d\eta - \frac{\lambda}{4}[b^4(t)-\rho^4]\right\}, \quad t \geqslant \tau^*(\rho), \quad 1 \leqslant \rho \leqslant b(t)$$

Выражение (3.9) определяет напряжения в зоне наращивания через заданные функции $b(t)$, $\sigma_\varphi^\circ(\rho)$ и неизвестную функцию $X(t)$.

На границе раздела исходного диска и области наращивания должны выполняться условия непрерывности радиального напряжения и приращений радиального перемещения. Запишем эти условия в виде

$$\sigma_\rho^{(1)}(t,1)=\sigma_\rho^{(2)}(t,1) \tag{3.10}$$

$$u^{(1)}(t,\ 1)-u^{(1)}(0,\ 1)=u^{(2)}(t,\ 1)-u^{(2)}(0,\ 1),\quad t\geqslant 0 \tag{3.11}$$

где верхний индекс 1 соответствует упругой области исходного диска $a\leqslant\rho\leqslant 1$, а индекс 2 — области наращивания $1\leqslant\rho\leqslant b(t)$.

Введем в рассмотрение функцию времени $q(t)$, определяющую безразмерное равномерно распределенное радиальное давление на исходный диск со стороны приращиваемых слоев

$$\sigma_\rho^{(1)}(t,1)=-q(t),\quad t\geqslant 0,\quad q(0)=0 \tag{3.12}$$

Радиальное перемещение границы исходного диска под действием массовых центробежных сил и внешнего обжатия определяются на основе принципа суперпозиции упругих решений:

$$u^{(1)}(t,1)=\frac{1}{\alpha}\left[2C+\frac{\lambda(1-\nu)}{4}\right]-\frac{1-\nu}{\alpha}q(t) \tag{3.13}$$

Интегрируя второе соотношение (3.4), будем иметь

$$\varepsilon_\varphi(t,\ \rho)=[u^{(2)}(t,\ \rho)-u^{(2)}(\tau^*(\rho),\ \rho)]/\rho+\varepsilon_\varphi^\circ(\rho) \tag{3.14}$$

Полагая здесь $\rho=1$ и приравнивая деформации, определяемой законом Гука, получим

$$\begin{aligned}u^{(2)}(t,1)-u^{(2)}(0,1)&=-\varepsilon_\varphi^\circ(1)+[\sigma_\varphi^{(2)}(t,1)-\nu\sigma_\rho^{(2)}(t,1)]/\alpha=\\&=[\sigma_\varphi^{(2)}(t,1)-\nu\sigma_\rho^{(2)}(t,1)-\sigma_\varphi^\circ(1)]/\alpha\end{aligned} \tag{3.15}$$

Подставляя выражения (3.13) и (3.15) в условие непрерывности (3.11), получим

$$\sigma_\varphi(t,\ 1)-\sigma_\varphi^\circ(1)=-q(t) \tag{3.16}$$

С другой стороны, согласно уравнению (3.8) будем иметь

$$\sigma_\varphi(t,\ 1)-\sigma_\varphi^\circ(1)=X(t)+q(t) \tag{3.17}$$

где учтено начальное условие $X(0)=0$.

Сравнивая (3.16) и (3.17), установим связь функций X и q:

$$X(t)=-2q(t) \tag{3.18}$$

Далее, подставляя выражения (3.12) и (3.9) в условие непрерывности напряжений (3.10), получим

$$\frac{1}{2}[b^2(t)-1]X(t)-\int_1^{b(t)}X(\tau^*(\eta))\eta\,d\eta+\int_1^{b(t)}\sigma_\varphi^\circ(\eta)\eta\,d\eta-\frac{\lambda}{4}[b^4(t)-1]=q(t) \tag{3.19}$$

Подставляя в (3.19) выражение (3.18) и выполняя замену переменной $\xi=\tau^*(\eta)$, будем иметь следующее уравнение для определения функции $q(t)$:

$$\begin{aligned}b^2(t)q(t)-2\int_0^t q(\xi)b(\xi)b'(\xi)d\xi&=\\=\int_0^t\sigma_\varphi^\circ(b(\xi))b(\xi)b'(\xi)d\xi&-\frac{\lambda}{4}[b^4(t)-1]\end{aligned}$$

Дифференцирование этого уравнения по t дает $q'=\sigma_\varphi^\circ(b)b'/(2b)-\lambda bb'/2$, откуда

$$q(b)=\frac{1}{2}\int_1^b \frac{\sigma_\varphi^\circ(\beta)}{\beta}d\beta-\frac{\lambda}{4}(b^2-1),\quad b\geqslant 1 \tag{3.20}$$

Параметр t в этом уравнении опущен умышленно — чтобы подчеркнуть отсутствие явной зависимости давления q от времени. Роль независимой переменной при определении функции q может играть внешний радиус диска b. Такая ситуация характерна для задач наращивания тел, не обладающих наследственными свойствами — их напряженно-деформированное состояние не зависит от скорости наращивания, вследствие чего зависимость всех величин от времени является параметрической.

3.3. Пример. Пусть $\sigma_\varphi^\circ(b)=\varkappa b$, $\varkappa=\text{const}>0$. Вычисляя интеграл в (3.20), имеем

$$q(b)=\frac{\varkappa}{2}(b-1)-\frac{\lambda}{4}(b^2-1) \tag{3.21}$$

Здесь возможны два случая. При малых значениях $\varkappa$ прямая $^1/_2\varkappa(b-1)$ лежит ниже параболы $^1/_4\lambda(b^2-1)$, следовательно, согласно (3.21), всегда будет $q<0$ при $b>1$, т. е. разгрузка исходного диска невозможна. При достаточно больших значениях $\varkappa$ прямая $^1/_2\varkappa(b-1)$ на участке $b\in[1,\ b_*]$ лежит выше параболы $^1/_4\lambda(b^2-1)$. Следовательно, в начальный период наращивания создается разгрузочное давление $q>0$, которое затем при $b=b_*$ становится равным нулю и изменяет знак. Это связано с тем, что при достаточно большой ширине области наращивания центробежные силы начинают преобладать над усилиями радиального обжатия, создаваемыми за счет преднапряжения приращиваемых слоев. При дальнейшем наращивании в исходном диске появляется повторное пластическое состояние. Критическое значение $\varkappa_*$, отделяющее области «малых» и «больших» $\varkappa$, соответствует касанию прямой $^1/_2\varkappa(b-1)$ и параболы $^1/_4\lambda(b^2-1)$ в точке $b=1$ и равно $\varkappa_*=\lambda$. В случае $\varkappa>\varkappa_*$ граница интервала разгрузки $1\leqslant b\leqslant b_*$ находится из (3.21) при $q=0$ и равна $b_*=2\varkappa/\lambda-1$. Следует заметить, что найденная теоретически область значений $\varkappa>\varkappa_*$, при которых происходит разгрузка исходного диска, может соответствовать преднапряжениям приращиваемых слоев, превышающим предел пластичности рассматриваемого материала (это в любом случае так, если $\varkappa_*\geqslant 1$). Такие ситуации выходят за рамки приведенного выше решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783–789.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.— Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.

Москва

Поступила в редакцию 13.II.1986