МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.37

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОЙ СРЕДЕ С E-ПАМЯТЬЮ

РАВАСОО А. А.

При аналитическом описании одномерных волновых процессов в однородных наследственно упругих средах с двухпараметрическими ядрами, в частности при использовании модели среды типа стандартного вязкоупругого тела [1], существуют определенные трудности. Задача упрощается, если среду моделировать согласно модели наследственно упругой среды с E-памятью, предложенной в [2]. Получаемые при этом точные решения совпадают с первыми асимптотическими приближениями решений для волновых процессов в стандартном вязкоупругом теле [2].

Учет неоднородности среды усложняет проблему. При гладкоменяющихся по пространственной координате свойствах среды применение преобразования Лапласа совместно с методом ВКБ позволяет вывести асимптотическое решение, справедливое в прифронтовой зоне волны.

Далее эта методика использована для описания процесса распространения одномерной продольной волны в среде с E-памятью и в стандартном вязкоупругом теле. Построены решения, удовлетворяющие условию метода ВКБ о малости длины волны по сравнению с расстоянием, на котором свойства среды существенно меняются.

1. Определяющее уравнение линейной наследственно упругой среды постулируется согласно одному из соотношений [2]:

$$\sigma(x,\ t)=E(x)[U_{,x}(x,\ t)-R(t)*U_{,x}(x,\ t)] \tag{1.1}$$

$$U_{,x}(x,\ t)=E^{-1}(x)[\sigma(x,\ t)+K(t)*\sigma(x,\ t)] \tag{1.2}$$

Здесь t — время, x — лагранжева координата, $\sigma(x, t)$ — напряжение и $U(x, t)$ — перемещение материальных точек среды в направлении x, $E(x)$ — гладкая произвольная положительная функция, $R(t)$ — ядро релаксации, $K(t)$ — ядро ползучести

$$F_1(t)*F_2(t)=\int\limits_0^t F_1(t-\tau)F_2(\tau)\,d\tau$$

— интеграл свертки. Уравнение движения среды с переменными по пространственной координате x плотностью $\rho_0(x)>0$ и мгновенным модулем упругости $E(x)$ может быть записано на основе (1.1) и (1.2) соответственно в двух следующих эквивалентных формах:

$$U_{,xx}(x,t)-R(t)*U_{,xx}(x,t)+f_1(x)[U_{,x}(x,t)-\\ -R(t)*U_{,x}(x,\ t)]-f_2(x)U_{,tt}(x,\ t)=0 \tag{1.3}$$

$$U_{,xx}(x,t)+f_1(x)U_{,x}(x,t)-f_2(x)[K(t)*\\ *U_{,tt}(x,\ t)-U_{,tt}(x,\ t)]=0 \tag{1.4}$$

$$f_1(x)=E_{,x}(x)E^{-1}(x),\qquad f_2(x)=\rho_0(x)E^{-1}(x)>0$$

Уравнение (1.3) приведено в [3]. Исследуем на основе (1.3) и (1.4) процесс распространения конечного импульса произвольной гладкой начальной формы в положительном направлении оси x и генерированного при начальных условиях

$$U(x,\ 0)=U_{,t}(x,\ 0)=0 \tag{1.5}$$

граничным воздействием

$$U_{,t}(0, t)=A\varphi(t)[H(t)-H(t-\zeta_0)] \qquad (1.6)$$

Здесь A — постоянная, $\varphi(t)$ — произвольная гладкая функция, $H(t)$ — функция Хевисайда, ζ_0 — продолжительность воздействия, причем $\max|\varphi(t)|=1$.

Используем методику [4]. Выполняя преобразование Лапласа по времени над уравнениями (1.3) и (1.4), с учетом начальных условий (1.5) имеем (s — параметр преобразования Лапласа):

$$U^L_{,xx}(x, s)+f_1(x)U_{,x}{}^L(x, s)-s^2f_2(x)[1-R^L(s)]^{-1}U^L(x, s)=0 \qquad (1.7)$$

$$U^L_{,xx}(x, s)+f_1(x)U_{,x}{}^L(x, s)-s^2f_2(x)[1+K^L(s)]U^L(x, s)=0 \qquad (1.8)$$

Если в (1.7) использовать $p=s[1-R^L(s)]^{-1/2}$, а в (1.8) $p=s[1+K^L(s)]^{1/2}$, то оба уравнения приводятся к единому виду:

$$U^L_{,xx}(x, p)+f_1(x)U_{,x}{}^L(x, p)-p^2f_2(x)U^L(x, p)=0 \qquad (1.9)$$

Далее рассматриваются ядра, которые при $t\geqslant 0$ являются конечными однозначными функциями своего аргумента и удовлетворяют условиям

$$K^L(s)\to 0, \quad R^L(s)\to 0 \quad \text{при} \quad s\to\infty \qquad (1.10)$$

Уравнение (1.9) решается методом ВКБ. Подстановкой $U^L(x, p)=$ $=\exp\{\int [pv(x, p)-{}^1/_2 f_1(x)]dx\}$ оно сводится к уравнению Риккати

$$pv_{,x}(x, p)+p^2v^2(x, p)=p^2f_2(x)-g(x) \qquad (1.11)$$

$$g(x)={}^1/_2[f_{1,x}(x)+{}^1/_2 f_1{}^2(x)]$$

Решение уравнения (1.11) ищется в виде

$$v(x, p)=\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)p^{-k} \qquad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в уравнение (1.11) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получим решение уравнения (1.9):

$$U^L(x, p)=C_1\exp[-p\Phi_2(x)+\Phi_1(x)-p^{-1}\Phi_3(x)+\ldots]+$$
$$+C_2\exp[p\Phi_2(x)+\Phi_1(x)+p^{-1}\Phi_3(x)+\ldots] \qquad (1.13)$$

$$\Phi_1(x)=-\frac{1}{4}\int_0^x[2f_1(x)+f_{2,x}(x)f_2^{-1}(x)]dx, \qquad \Phi_2(x)=\int_0^x f_2^{1/2}(x)dx$$

$$\Phi_3(x)=\frac{1}{2}\int_0^x f_2^{-1/2}(x)\left[g(x)+\frac{1}{4}f_{2,xx}(x)f_2^{-1}(x)-\frac{5}{16}f_{2,x}^2(x)f_2^{-2}(x)\right]dx$$

Решение исходных уравнений (1.3) и (1.4) выражается после учета граничного условия (1.6) и первых трех членов в рядах (1.13) в форме

$$U(x, t)=A\exp\Phi_1(x)\left[H(\zeta)\int_0^\zeta\varphi(\zeta-\xi)F(x, \xi)d\xi-\right. \qquad (1.14)$$

$$\left.-H(\zeta-\zeta_0)\int_{\zeta_0}^\zeta\varphi(\zeta-\xi-\zeta_0)F(x, \xi)d\xi\right], \qquad \zeta=t-\Phi_2(x)$$

$$F(x, t)=({}^1/_2\pi i)\int_L s^{-1}\exp[st-s\Phi_2(x)P(s)-s^{-1}\Phi_3(x)P^{-1}(s)-\ldots]ds$$

(1.15)

В случае (1.3):

$$P(s)=[1-R^L(s)]^{-1/2} \tag{1.16}$$

и в случае (1.4):

$$P(s)=[1+K^L(s)]^{1/2} \tag{1.17}$$

Из (1.10) следует, что при $s\to\infty$ справедливо разложение

$$P(s)\sim 1+{}^1/_2W(s)+Q[W^2(s)] \tag{1.18}$$

Ограничимся в (1.18) учетом двух первых членов и отождествим в случаях (1.16) и (1.17) $W(s)$ с $R^L(s)$ и $K^L(s)$ соответственно.

Подставляя разложение (1.18) в (1.15), имеем

$$F(x,t)=(\pi i)\int\limits_L s^{-1}\exp\left\{st-s\Phi_2(x)\left[1+\frac{1}{2}W(s)\right]-\right. \tag{1.19}$$

$$\left.-s^{-1}\Phi_3(x)\left[1-\frac{1}{2}W(s)\right]+\ldots\right\}ds$$

Формула (1.14) определяет формальное асимптотическое решение поставленной задачи. Для выведения явного асимптотического представления решения необходимо вычислить контурные интегралы в правых частях формул (1.15) или (1.19).

При выводе решения (1.14) был использован ряд (1.12), сходящийся при больших значениях параметра p, и, следовательно, выражение (1.14) описывает волновой процесс в прифронтовой зоне волны [5].

Из решения (1.14) следует, что время прибытия фронта волны определяется функцией $\Phi_2(x)$. В предельном случае неоднородной упругой среды оно точно совпадает с результатом [6], а в случае однородной наследственно упругой среды с E-памятью — с результатом, приведенным в [2]. Функция $\Phi_1(x)$ характеризует главную часть изменения амплитуды волны, вызванной переменными упругими свойствами среды, а функция $\Phi_3(x)$ — искажение формы волны.

2. Рассмотрим вычисление функции $F(x, t)$ в частном случае наследственно упругой среды с E-памятью, предложенной в [2], определяя ядра релаксации и ползучести выражениями:

$$R(t)=2M_1\exp(-t/\tau_R)-M_1^2t\exp(-t/\tau_R) \tag{2.1}$$

$$K(t)=2M_1\exp(-t/\tau_K)+M_1^2t\exp(-t/\tau_K) \tag{2.2}$$

$$M_1=(1/\tau_R)-(1/\tau_K)$$

где τ_R и τ_K — положительные постоянные и выполняется условие $\tau_K>\tau_R$.

С математической точки зрения преимущество использования выражений (2.1) и (2.2) в том, что квадратный корень в формулах (1.16) и (1.17) удается извлечь точно. Функция $P(s)$ принимает вид $P(s)=(s+1/\tau_R)(s+1/\tau_K)^{-1}$, что позволяет привести выражение (1.15) к форме

$$F(x,t)=({}^1/_2\pi i)\exp[-M_1\Phi_2(x)]\int\limits_L s^{-1}\exp[-s\Phi_2(x)- \tag{2.3}$$

$$-s^{-1}\Phi_3(x)(1-M_1\tau_R)+M_1\Phi_2(x)(1+\tau_Ks)^{-1}-M_1\Phi_3(x)\tau_R^2(1+\tau_Rs)^{-1}+st]\,ds$$

Вычисляя контурный интеграл в (2.3), имеем

$$F(x,\ t)=\exp[-M_1\Phi_2(x)][P_1(x,\ t)+P_1(x,\ t)*P_2(x,\ t)+$$

$$+P_1(x,\ t)*P_3(x,\ t)+P_1(x,\ t)*P_2(x,\ t)*P_3(x,\ t)] \tag{2.4}$$

$$P_1(x,\ t)=B_0(2\sqrt{(1-M_1\tau_R)t|\Phi_3(x)|})$$

$$P_2(x,\ t)=\exp(-t/\tau_K)I_{0,t}(2\sqrt{\tau_K^{-1}M_1t\Phi_2(x)})$$

$$P_3(x,\ t)=\exp(-t/\tau_R)B_{0,t}(2\sqrt{\tau_RM_1t|\Phi_3(x)|})$$

$$B_0(x)=J_0(x),\ \text{если}\ \Phi_3(x)\geqslant 0;\qquad B_0(x)=I_0(x),\ \text{если}\ \Phi_3(x)<0$$

Здесь $J_0(x)$ и $I_0(x)$ — функции Бесселя первого рода вещественного и мнимого аргументов соответственно.

После подстановки выражения (2.4) в (1.14) получается окончательное решение задачи

$$U(x,\ t)=AH(\zeta)\exp[\Phi_1(x)-M_1\Phi_2(x)]\,\varphi(t)*F(x,\ t) \tag{2.5}$$

которое для удобства записи представлено для случая краевого воздействия в виде

$$U_{,t}(0,\ t)=A\varphi(t)H(t) \tag{2.6}$$

При импульсном краевом воздействии (1.6) решение можно вывести с учетом линейности уравнений (1.3) и (1.4). Сначала находится решение (2.5), а затем, простым сдвигом начала отсчета времени t на величину ζ_0, — решение для краевого воздействия $U_{,t}(0,\ t)=A\varphi(t)H(t-\zeta_0)$.

Разница получаемых двух решений является искомым решением задачи.

3. Рассмотрим одномерный волновой процесс в стандартном вязкоупругом теле, наследственные свойства которого характеризуются выражениями $R(t)=M_2\exp(-t/\tau_1)$, $K(t)=M_2\exp(-t/\tau_2)$, $M_2=(1/\tau_1)-(1/\tau_2)$, где τ_1 и τ_2 — положительные постоянные и соблюдается условие $\tau_2>\tau_1$.

Функцию $F(x,\ t)$ вычислим по формуле (1.29), обозначая через r постоянную τ_1 в случае описания волнового процесса уравнением (1.3) и постоянную τ_2 при использовании уравнения (1.4). В итоге выражение (1.29) преобразуется к виду

$$F(x,t)=({}^1/_2\pi i)\int_L s^{-1}\exp\{st-s\Phi_2(x)\,[1+kr/(1+rs)\,]- \tag{3.1}$$

$$-s^{-1}\Phi_3(x)\,[1-kr/(1+rs)\,]+\ldots\}\,ds,\qquad k=M/2$$

На основе (3.3) имеем для вычисления функции $F(x,\ t)$ следующую формулу:

$$F(x,\ t)=F_1(x,\ t)*F_2(x,\ t) \tag{3.2}$$

$$F_1(x,t)=({}^1/_2\pi i)\int_L s^{-1}\exp[st-s\Phi_2(x)-s^{-1}\Phi_3(x)\,(1-rk)\,]\,ds$$

$$F_2(x,t)=({}^1/_2\pi i)\int_L \exp\{st-rk(1+rs)^{-1}[s\Phi_2(x)+r\Phi_3(x)\,]\}\,ds$$

После вычисления контурных интегралов в (3.2) решение задачи при учете краевого воздействия (2.6) выражается в виде

$$\begin{gathered} U(x,\ t)=AH(\zeta)\exp[\Phi_1(x)-k\Phi_2(x)\,]\cdot\\ \cdot\{\varphi(\zeta)*B_0(2\sqrt{|(1-rk)\Phi_3(x)|\zeta})+\\ +r^{-1}\varkappa[\varphi(\zeta)*B_0(2\sqrt{|(1-rk)\Phi_3(x)|\zeta})*\\ *\exp(-r^{-1}\zeta)\,(r^{-1}\zeta|\varkappa|)^{-1/2}B_1(2\sqrt{r^{-1}\zeta|\varkappa|})\,]\} \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\varkappa=k[\Phi_2(x)-r^2\Phi_3(x)\,]$$

$$B_0(x)=J_0(x)\ \text{при}\ (1-rk)\Phi_3(x)\geqslant0;\quad B_0(x)=I_0(x)\ \text{при}\ (1-rk)\Phi_3(x)<0$$

$$B_1(x)=-J_1(x)\ \text{при}\ \varkappa\leqslant0;\qquad B_1(x)=I_1(x)\ \text{при}\ \varkappa>0$$

Здесь $J_n(x)$ и $I_n(x)$ $(n=0,\ 1)$ — функции Бесселя первого рода вещественного и мнимого аргументов соответственно.

Из решения (3.3) видно, что в зависимости от выбора определяющего уравнения среды (1.1) или (1.2) получаются два различных решения, описывающих эволюцию формы волны в неоднородном стандартном вязкоупругом теле. Это обусловлено использованием разложения (1.18), вследствие чего не выполняется точно известная зависимость между оператором $R^L(s)$ и его резольвентным оператором $K^L(s)$ [7]: $1+K^L(s)=$ $=[1-R^L(s)]^{-1}$.

Расхождение в решениях наблюдается в членах высшего порядка малости по сравнению с единицей. Главная часть решения

$$U(x,t)=AH(\zeta)\exp[\Phi_1(x)-k\Phi_2(x)]\int_0^{\zeta}\varphi(\zeta-\xi)\,d\xi$$

не зависит от параметра r, а следовательно, и от вида определяющего уравнения.

4. Применение решений (2.5) и (3.3) в прикладных целях затруднено ввиду их громоздкости. На основе теорем о предельных значениях оригиналов и изображений преобразования Лапласа можно прийти к выводу, что главная часть решений (2.5) и (3.3)

$$U(x,t)=AH(\zeta)\exp[\Phi_1(x)-M\Phi_2(x)]\int_0^{\zeta}\varphi(\zeta-\xi)\,d\xi \tag{4.1}$$

полученная отбрасыванием в аргументах экспонент (2.3) и (3.1) членов с порядком величины $1/s$, описывает волновой процесс в среде при выполнении следующих условий:

в случае стандартного вязкоупругого тела

$$|\Phi_3(x)\zeta(1-rk)-\varkappa[1-\exp(-\zeta/r)]|\ll 1 \tag{4.2}$$

в случае среды с E-памятью

$$|\Phi_3(x)\tau_R\{\zeta/\tau_K+\tau_R M[1-\exp(-\zeta/\tau_R)]-$$
$$-M\Phi_2(x)[1-\exp(-\zeta/\tau_K)]\}|\ll 1 \tag{4.3}$$

В решении (4.1) M равняется M_1 или $M_2/2$ соответственно.

Условия (4.2) и (4.3), определяющие малость по сравнению с единицей отброшенных членов, налагают ограничения на глубину прифронтовой зоны волны, в которой решение (4.1) качественно правильно определяет волновой процесс. Отсюда можно сделать вывод, что представленная методика хорошо описывает распространение коротких импульсов в неоднородной наследственно упругой среде.

Отметим, что решению (4.1) можно придать форму

$$U(x,t)=AH(\zeta)\left[\frac{E(0)\rho_0(0)}{E(x)\rho_0(x)}\right]^{1/4}\exp[-M\Phi_2(x)]\int_0^{\zeta}\varphi(\zeta-\xi)\,d\xi \tag{4.4}$$

где $E(0)$ и $\rho_0(0)$ — значения мгновенного модуля упругости и плотности среды в точке $x=0$.

Сопоставление решений (2.6) и (3.7) показывает, что при $\tau_1=\tau_R$ скорости распространения фронта продольной волны в среде с E-памятью и в стандартном вязкоупругом теле с переменными упругими свойствами равны и определяются временем прибытия волны $\Phi_2(x)$. Главная часть изменения амплитуды волны в обоих случаях одинаково зависит от упругих свойств среды (вклад функции $\Phi_1(x)$ в аргументе экспоненты), но для обеспечения одинаковой зависимости от наследственных свойств необходимо соблюдение равенств

$$\tau_1=\tau_R,\qquad \tau_2=\tau_R\tau_K(2\tau_R-\tau_K)^{-1} \tag{4.5}$$

Хотя изучение волнового процесса в среде с E-памятью имеет самостоятельное значение, необходимо отметить, что в случае неоднородной среды можно также использовать эту модель для описания волн в стандартном вязкоупругом теле, соблюдая условия (4.5). Однако это не дает таких существенных математических преимуществ, которые были получены при исследовании волн в однородной среде [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигул У. К.* Правильное применение метода деформирования контура интегрирования при обращении преобразования Лапласа в задачах распространения вязкоупругих волн. — Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 1, с. 56—59.

2. *Nigul U.* The modified theory of viscoelasticity for description of the one-dimensional deformation waves. Tallinn: Acad. Sci. Est. SSR, 1983. 61 p.
3. *Попович А. Ю., Филиппов И. Г.* Распространение плоских волн сжатия в неоднородных вязкоупругих средах.— Изв. АН СССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук, 1977, № 1, с. 28—35.
4. *Равасоо А. А.* Распространение волн в среде с неоднородной начальной статической деформацией.— Изв. АН ЭССР. Физика, математика, 1982, т. 31, № 3, с. 277—283.
5. *Longcope D. B., Steele C. R.* Pulse propagation in inhomogeneous media.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1974, v. 41, No. 4, p. 1057—1062.
6. *Reddy D. P.* Stress waves in nonhomogeneous elastic rods.— J. Acoust. Soc. Amer., 1969, v. 45, No. 5, p. 1273—1276.
7. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.

Таллин

Поступила в редакцию
29.XII.1984