

УДК 539.374

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

КОВРИЖНЫХ А. М.

Приводится дальнейшее развитие теории пластического деформирования материалов по разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. В качестве основы построения теории принимается дилатационно-сдвиговая механическая модель материала. Приводится сравнение с результатами экспериментов на металлах по сложному нагружению.

Для практических расчетов по пластичности упрочняющихся материалов в основном используется классический закон течения, основанный на поверхности Мизеса, либо частный случай этого закона — деформационная теория. Имеющиеся в литературе результаты экспериментальных исследований показывают, что эта теория течения не описывает нагружения с постоянной интенсивностью напряжения [1] и некоторые эффекты сложного нагружения [2—4]. Однако простота и логическая завершенность указанного подхода послужили поводом к его дальнейшему развитию для геоматериалов [5—8].

Другое направление, основанное на максимальном касательном напряжении, по-видимому, является наиболее физичным, но широкого распространения для упрочняющегося материала оно не получило. Это можно объяснить тем, что данный подход не был завершен для произвольных путей нагружения и, как следствие, не было его широкой экспериментальной проверки для непропорциональных нагружений. Отсутствие количественного сравнения с результатами экспериментов и с классической теорией не позволяло выявить преимущества второго направления. Дальнейшее развитие это направление получило в [9, 10]. Одним из основных и общих моментов в них является идея учета кроме максимального касательного напряжения двух других главных касательных напряжений. Использование этой идеи и некоторых дополнительных предположений позволило завершить направление, основанное на поверхности Треска — Сен-Венана [11] и обобщить его на геоматериалы [12]. С этих позиций удалось объяснить поведение металлов в опытах [1], при сложном нагружении [13], а также описать эксперименты на горных породах [14].

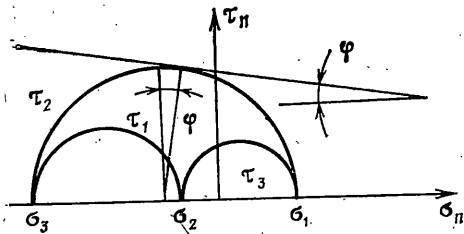
1. Рассмотрим результаты из [12], где возникновение пластической деформации связывается с достижением на площадке с нормалью n предельного условия Кулона — Мора

$$\tau_n + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi = k \quad (1.1)$$

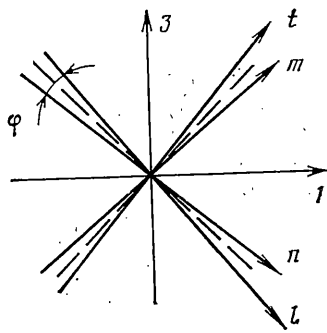
Здесь k , φ — коэффициент сцепления и угол внутреннего трения; τ_n , σ_n — касательное и нормальное напряжения на предельных плоскостях, где $\tau_2 = \tau_n + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi$ достигает максимума (фиг. 1). Для определенности будем считать, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, σ_i ($i=1, 2, 3$) — главные нормальные напряжения.

Далее деформации считаются малыми, а приращение деформации первоначально упругоизотропного и однородного материала складывается из упругой и пластической составляющих. Для упругой составляющей деформации справедлив закон Гука.

В системе координат, связанной с главными осями напряжений, обозначим нормальные и сдвиговые пластические деформации ϵ_i , γ_{ij}^p ($i < j$; $i, j=1, 2, 3$). Величину $\tau_2 = (\sigma_1 - \sigma_3) / (2 \cos \varphi) + (\sigma_1 + \sigma_3) \operatorname{tg} \varphi / 2$ будем называть максимальным сдвигающим напряжением. Плоскости, на которых достигается условие (1.1), назовем системой скольжения. Эти плоскости проходят через второе главное направление и составляют с третьим острые углы $\pm \nu = \pi/4 - \varphi/2$ (фиг. 2). Аналогично вводятся и два других главных сдвигающих напряжения τ_3 и τ_1 . Соответствующие им системы скольжения проходят через третье и первое направления.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть σ_c , σ_s , τ_s — пределы текучести при одноосном сжатии, одноосном растяжении и кручении соответственно. Тогда, используя (1.1), можно получить

$$\sin \varphi = (\sigma_c - \sigma_s) / (\sigma_c + \sigma_s) = 2\tau_s / \sigma_s - 1 \quad (1.2)$$

Как видно из (1.2), угол φ характеризует разную сопротивляемость растяжению и сжатию при возникновении пластической деформации. По-видимому, первым экспериментальным исследованием, в котором изучалось влияние нормальных напряжений на возникновение пластичности, были опыты Геста (1900 г.) [15, 16]. В этих опытах оказалось, что $\varphi = 0,04$ для стали и возможно несколько больше для меди, однако в последнем случае было выполнено недостаточно испытаний, чтобы можно было прийти к окончательному выводу.

В [16] отмечается, что для мягких сталей полосы скольжения, появляющиеся на поверхности образца в момент понижения нагрузки на пределе текучести, составляют с осью образца угол обычно при растяжении несколько больше 47° ($\varphi > 0,07$), а при сжатии несколько меньше 45° ($\varphi > 0$).

Из опыта также известно, что $\tau_s \geq \sigma_s / 2$. После проведения двух экспериментов из (1.2) можно определить φ . Для условия Треска $\varphi = 0$, а для условия Мизеса при растяжении $\varphi = 0,15$.

Приведенные экспериментальные факты указывают на целесообразность введения угла φ в теоретические построения как в начале пластичности, так и при развитой пластической деформации металлов.

Существенными понятиями предлагаемого подхода являются состояния неполной и полной пластичности. Напряженное состояние, для которого $\tau_2 \geq k$, $\tau_3, \tau_1 < k$, будем называть состоянием неполной пластичности, а при τ_2 и $\tau_3 \geq k$, $\tau_1 < k$ (либо $\tau_2, \tau_1 \geq k$, $\tau_3 < k$) — состоянием полной пластичности.

Догружение, при котором главные оси тензора приращения напряжения совпадают с главными осями напряжения, называется квазипростым [9]. Для первоначально изотропного материала и квазипростого нагружения плоскости с нормальными n и m (фиг. 2) в системе скольжения τ_2 находятся в одинаковых условиях. Поэтому согласно дилатансионно-сдвиговой механической модели материала [12], в состоянии неполной пластичности $\tau_2 \geq k$, τ_1 и $\tau_3 < k$ имеем (α — коэффициент дилатансии):

$$\Delta \gamma_{nl}^p = \Delta \gamma_{ml}^p = \frac{1}{2} \Delta \tau_2 / G_2, \quad \Delta e_n = \Delta e_m = \alpha / 2 \Delta \tau_2 / G_2. \quad (1.3)$$

$$\Delta \tau_2 = (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) / (2 \cos \varphi) + (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_3) \operatorname{tg} \varphi / 2$$

Если $\Delta \tau_2 \geq 0$, то $G_2 = G_0(\tau_2)$, а если $\Delta \tau_2 < 0$, то $G_2^{-1} = 0$. Считается, что пластический модуль сдвига $G_0(\tau_2)$ не зависит от вида напряженного состояния.

Проектируя (1.3) на главные оси тензора напряжений, получим

$$\Delta e_1 = \frac{1}{2} [\alpha (1 + \sin \varphi) + \cos \varphi] \Delta \tau_2 / G_2 \quad (1.4)$$

$$\Delta e_3 = \frac{1}{2} [\alpha (1 - \sin \varphi) - \cos \varphi] \Delta \tau_2 / G_2$$

$$\Delta e_2 = \Delta \gamma_{12}^p = \Delta \gamma_{13}^p = \Delta \gamma_{23}^p = 0$$

В общем случае характеристики материала α , φ и G_0 являются независимыми и должны определяться на основе опытных данных. Величины α , φ могут быть функциями τ_2 .

Пусть в процессе квазипростого нагружения достигнуто состояние полной пластичности в направлениях τ_2 , τ_3 . Тогда, следуя механической модели материала, можно записать

$$\Delta e_1 = \frac{1}{2}[\alpha(1 + \sin \varphi) + \cos \varphi](\Delta \tau_2/G_2 + \Delta \tau_3/G_3), \Delta e_2 = \frac{1}{2}[\alpha(1 - \sin \varphi) - \cos \varphi]\Delta \tau_3/G_3, \Delta e_3 = \frac{1}{2}[\alpha(1 - \sin \varphi) - \cos \varphi]\Delta \tau_2/G_2 \quad (1.5)$$

В этих соотношениях $G_3 = G_0(\tau_3)$ при $\Delta \tau_3 = (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)/(2 \cos \varphi) + (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_3) \operatorname{tg} \varphi/2 \geq 0$ и для простоты принято, что α и φ в системах скольжения τ_2 , τ_3 одни и те же.

2. Перейдем теперь к описанию процессов пластического деформирования с поворачивающимися главными осями напряжения — сложное нагружение. Предположим, что второе направление остается неподвижным, тогда в системе координат, связанной с главными осями напряжения, произвольное сложное догружение можно представить в виде суммы двух тензоров [9]: квазипростого, характеризуемого $\Delta \sigma_1$, $\Delta \sigma_2$, $\Delta \sigma_3$ и ортогонального $\Delta \tau_{13}$. Главные оси первого тензора совпадают с главными осями напряжения, а главные направления второго тензора составляют с ними угол $\pi/4$.

Пусть x, y, z — произвольная система координат, у которой y совпадает со вторым главным направлением, тогда

$$\Delta \sigma_1 = \frac{1}{2}(\Delta \sigma_x + \Delta \sigma_z) + \frac{1}{2}(\Delta \sigma_x - \Delta \sigma_z) \cos 2\theta + \Delta \tau_{xz} \sin 2\theta, \quad \Delta \sigma_2 = \Delta \sigma_y$$

$$\Delta \sigma_3 = \frac{1}{2}(\Delta \sigma_x - \Delta \sigma_z) - \frac{1}{2}(\Delta \sigma_x + \Delta \sigma_z) \cos 2\theta - \Delta \tau_{xz} \sin 2\theta$$

$$\Delta \tau_{13} = \frac{1}{2}(\Delta \sigma_x - \Delta \sigma_z) \sin 2\theta + \Delta \tau_{xz} \cos 2\theta, \quad \operatorname{tg} 2\theta = 2\tau_{xz}/(\sigma_x - \sigma_z)$$

Величины $\Delta \tau_2$, $\Delta \tau_3$ и $\Delta \tau_{13}$ можно рассматривать как независимые параметры догрузки. Поэтому результирующее приращение пластической деформации при сложном догружении можно представить в виде суммы двух приращений деформаций, отвечающих квазипростому догружению и ортогональному. Приращение деформации, отвечающее квазипростому догружению, определяется соотношениями (1.4), (1.5). Относительно ортогонального догружения для материалов с $\varphi > 0$ могут быть выдвинуты две гипотезы: $\Delta \tau_{13}$ не вызывает изменения пластической деформации; $\Delta \tau_{13}$ вызывает изменение пластической деформации.

Если $\varphi = 0$, то с позиции предложенной механической модели материала [11] однозначно следует справедливость первой гипотезы.

Когда материал деформируется в пластическую область растягивающим или касательным напряжением, а затем подвергается действию дополнительных напряжений касательных или растягивающихся соответственно, то мгновенный модуль догрузки в обоих случаях будет упругим или неупругим, в зависимости от того, имеет место первая или вторая гипотезы. Первое предположение согласуется с экспериментами [13, 17] и не подтверждается другими опытами [2—4]. Дальше будет показано, что если для материалов с $\varphi > 0$ принять второе предположение, то в рамках предложенной теории можно объяснить и те, и другие эксперименты.

Поясним, как можно обосновать второе предположение с позиции механической модели материала. Допустим, что произошло ортогональное догружение $\Delta \tau_{13} > 0$, тогда в направлении l продолжается активное нагружение, поскольку $\Delta \tau_{nl} = \Delta \tau_{13} \sin \varphi$, а в направлении l происходит разгрузка, так как $\Delta \tau_{ml} = -\Delta \tau_{13} \sin \varphi$. Если $\Delta \tau_{13} < 0$, то нагружение происходит в направлении l , а разгрузка — в направлении l . В данной ситуации удобнее перейти от параметров $\Delta \tau_2$, $\Delta \tau_{13}$ к $\Delta \tau_l = \Delta \tau_2/2 + \Delta \tau_{13} \sin \varphi$, $\Delta \tau_t = \Delta \tau_2/2 - \Delta \tau_{13} \sin \varphi$.

Предположим, что материал выведен в состояние неполной пластич-

ности $\tau_2 \geq k$, $\tau_1, \tau_3 < k$ и затем осуществляются различные догружения. Преимущественно к сложному догружению в соответствии со второй гипотезой следует учесть изменение пластического сдвига, вызванного изменением собственного касательного напряжения при ортогональной догрузке на каждой из плоскостей скольжения. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{ni}^p &= \Delta\tau_i/G_i, & \Delta e_n &= \alpha \Delta\gamma_{ni}^p \\ \Delta\gamma_{mi}^p &= \Delta\tau_i/G_i, & \Delta e_m &= \alpha \Delta\gamma_{mi}^p \end{aligned} \quad (2.1)$$

Используя (2.1), можно записать

$$\begin{aligned} \Delta e_1 &= 1/2[\alpha(1+\sin\varphi) + \cos\varphi](\Delta\tau_i/G_i + \Delta\tau_i/G_i), & \Delta e_2 &= 0 \\ \Delta e_3 &= 1/2[\alpha(1-\sin\varphi) - \cos\varphi](\Delta\tau_i/G_i + \Delta\tau_i/G_i), & \Delta\gamma_{12}^p &= 0 \\ \Delta\gamma_{13}^p &= (\sin\varphi - \alpha\cos\varphi)(\Delta\tau_i/G_i - \Delta\tau_i/G_i), & \Delta\gamma_{23}^p &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для активного догружения $\Delta\tau_i, \Delta\tau_i \geq 0$ и в (2.2) следует принять $G_i = G_i = G_0(\tau_2)$. При квазипростом нагружении соотношения (2.2) переходят в (1.3). Если в одном из направлений t либо l происходит разгрузка, а в другом продолжается нагружение, то такое состояние будем называть частичной разгрузкой. Для частичной разгрузки $\Delta\tau_i < 0, \Delta\tau_i \geq 0$ имеем $G_i^{-1} = 0, G_i = G_0(\tau_2)$. Аналогично рассматривается случай $\Delta\tau_i \geq 0, \Delta\tau_i < 0$. Полная разгрузка наступает, когда $\Delta\tau_i, \Delta\tau_i \leq 0$.

Рассмотрим сложное нагружение тонкостенных грубчатых образцов растягивающей силой и крутящим моментом. Пусть ось x направлена по образующей образца, y — по радиусу, тогда при $\alpha = 0$ из (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \Delta e_x &= -\Delta e_z = \frac{\cos(\varphi+2\theta)}{2G_t} \Delta\tau_t + \frac{\cos(\varphi-2\theta)}{2G_t} \Delta\tau_t, & \Delta e_y &= 0 \\ \Delta\gamma_{xz}^p &= \frac{\sin(\varphi+2\theta)}{G_t} \Delta\tau_t - \frac{\sin(\varphi-2\theta)}{G_t} \Delta\tau_t \\ \Delta\tau_t &= \frac{\cos 2\theta + \sin\varphi - \sin 2\theta \sin 2\varphi}{4\cos\varphi} \Delta\sigma_x + \frac{\sin 2\theta + \cos 2\theta \sin 2\varphi}{2\cos\varphi} \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_t &= \frac{\cos 2\theta + \sin\varphi + \sin 2\theta \sin 2\varphi}{4\cos\varphi} \Delta\sigma_x + \frac{\sin 2\theta - \cos 2\theta \sin 2\varphi}{2\cos\varphi} \Delta\tau_{xz} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Примером состояния неполной пластичности является чистое кручение, для которого $\theta = \pi/4, \tau_2 = \tau_{xz}/\cos\varphi, \Delta\gamma_{xz}^p = \Delta\tau_{xz}/G_0$. В дальнейшем направление догрузки будем характеризовать $m = \Delta\sigma_x/\Delta\tau_{xz}$.

Активное догружение из состояния чистого кручения происходит, когда $-2/(\sin 2\varphi - \sin\varphi) \leq m \leq 2/(\sin 2\varphi - \sin\varphi), \Delta\tau_{xz} > 0$. В этом случае из (2.3) получим

$$\Delta e_x = 1/2 \sin^2\varphi \Delta\sigma_x/G_0, \quad \Delta\gamma_{xz}^p = 1/2 \sin\varphi \Delta\sigma_x/G_0 + \Delta\tau_{xz}/G_0$$

Частичная разгрузка $\Delta\tau_t < 0, \Delta\tau_t \geq 0$ реализуется при $\Delta\sigma_x > 0, -(\sin 2\varphi + \sin\varphi)/2 \leq m^{-1} \leq (\sin 2\varphi - \sin\varphi)/2$. Из (2.3) имеем

$$\Delta e_x = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \Delta\gamma_{xz}^p, \quad \Delta\gamma_{xz}^p = \frac{\sin\varphi(1+2\cos\varphi)}{4G_0} \Delta\sigma_x + \frac{\Delta\tau_{xz}}{2G_0}$$

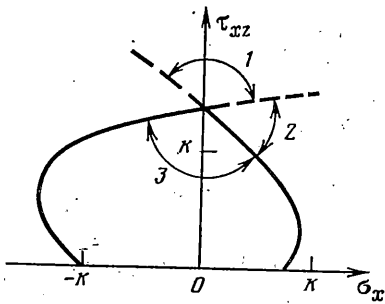
Учитывая упругую деформацию, можно определить мгновенные модули ортогональной догрузки растяжением

$$\frac{1}{E_i} = \frac{\Delta e_x}{\Delta\sigma_x} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2G_j} + \frac{1}{E}, \quad \frac{1}{G_j} = \frac{\Delta\gamma_{xz}}{\Delta\sigma_x} = \frac{\sin\varphi + \sin 2\varphi}{4G_0} \quad (2.4)$$

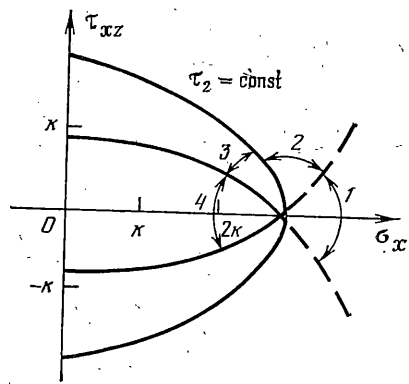
Полная разгрузка наступает, если $\Delta\tau_{xz} < 0, -2/(\sin 2\varphi + \sin\varphi) \leq m \leq -2/(\sin 2\varphi - \sin\varphi)$.

На фиг. 3 в плоскости напряжения σ_x, τ_{xz} указаны области активного догружения 1, частичной разгрузки $\Delta\tau_t < 0, \Delta\tau_t \geq 0$ 2 и полной разгрузки 3 из состояния чистого кручения для угла $\varphi = \pi/6$.

Рассмотрим различные догружения из состояния полной пластичности



Фиг. 3



Фиг. 4

$\tau_2, \tau_3 \geq k, \tau_1 < k$. Для активного догружения справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \Delta e_1 &= \frac{1}{2} [\alpha (1 + \sin \varphi) + \cos \varphi] (\Delta \tau_i / G_i + \Delta \tau_l / G_l + \Delta \tau_3 / G_3) \\ \Delta e_2 &= \frac{1}{2} [\alpha (1 - \sin \varphi) - \cos \varphi] \Delta \tau_3 / G_3, \quad \Delta \gamma_{12}^p = \Delta \gamma_{23}^p = 0 \\ \Delta e_3 &= \frac{1}{2} [\alpha (1 - \sin \varphi) - \cos \varphi] (\Delta \tau_i / G_i + \Delta \tau_l / G_l) \\ \Delta \gamma_{13}^p &= (\sin \varphi - \alpha \cos \varphi) (\Delta \tau_i / G_i - \Delta \tau_l / G_l) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для пластически несжимаемого материала $\alpha = 0$, и тогда, используя (2.5), получим

$$\begin{aligned} \Delta e_x &= \frac{\cos(\varphi + 2\theta)}{2G_i} \Delta \tau_i + \frac{\cos(\varphi - 2\theta)}{2G_l} \Delta \tau_l + \frac{\cos \varphi (1 + \cos 2\theta)}{4G_3} \Delta \tau_3 \\ \Delta \gamma_{xz}^p &= \frac{\sin(\varphi + 2\theta)}{G_i} \Delta \tau_i - \frac{\sin(\varphi - 2\theta)}{G_l} \Delta \tau_l + \frac{\cos \varphi \sin 2\theta}{2G_3} \Delta \tau_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если в каком-то из направлений l, l или τ_3 происходит разгрузка, то соответствующие слагаемые в правых частях соотношений (2.5), (2.6) отсутствуют.

Примером состояния полной пластичности является одноосное растяжение, для которого $\theta = 0, \tau_2 = \tau_3 = (1 + \sin \varphi) \sigma_x / (2 \cos \varphi)$. С учетом упругой деформации имеем

$$\Delta e_x = \left(\frac{1 + \sin \varphi}{2G_0} + \frac{1}{E} \right) \Delta \sigma_x, \quad \Delta e_y = \Delta e_z = -\frac{\Delta e_x}{2} + \frac{1 - 2\nu}{2E} \Delta \sigma_x \quad (2.7)$$

Как видно из (2.7), по известному из опыта касательному модулю $E_t = \Delta \sigma_x / \Delta e_x$ можно определить $G_0(\tau_2)$.

При активном догружении из одноосного растяжения $\Delta \tau_i, \Delta \tau_l, \Delta \tau_3 \geq 0$ и тогда $-(1 + \sin \varphi) / (2 \sin 2\varphi) \leq m^{-1} \leq (1 + \sin \varphi) / (2 \sin 2\varphi), \Delta \sigma_x > 0$. В этом случае из (2.6) имеем $\Delta e_x = \frac{1}{2} (1 + \sin \varphi) \Delta \sigma_x / G_0, \Delta \gamma_{xz}^p = 2 \sin^2 \varphi \Delta \tau_{xz} / G_0$.

Если $0 \leq m \leq 2 \sin 2\varphi / (1 + \sin \varphi), \Delta \tau_{xz} > 0$, то осуществляется частичная разгрузка в направлении l , для которой

$$\begin{aligned} \Delta e_x &= \frac{3(1 + \sin \varphi)}{8G_0} \Delta \sigma_x + \frac{\sin 2\varphi}{4G_0} \Delta \tau_{xz} \\ \Delta \gamma_{xz}^p &= \frac{1 + \sin \varphi}{4G_0} \operatorname{tg} \varphi \Delta \sigma_x + \frac{\sin^2 \varphi}{G_0} \Delta \tau_{xz} \end{aligned}$$

Если $\Delta \tau_i \geq 0, \Delta \tau_l, \Delta \tau_3 \leq 0$, то $-2 \sin 2\varphi / (1 + \sin \varphi) \leq m \leq 0, \Delta \tau_{xz} > 0$ и

$$\Delta e_x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \Delta \gamma_{xz}^p, \quad \Delta \gamma_{xz}^p = \frac{1}{4} (1 + \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi \Delta \sigma_x / G_0 + \sin^2 \varphi \Delta \tau_{xz} / G_0$$

Учитывая в этих соотношениях упругую деформацию, определим начальные модули ортогональной догрузки кручением

$$\frac{1}{G_i} = \frac{\Delta \gamma_{xz}^p}{\Delta \tau_{xz}} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{E_j} + \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{E_j} = \frac{\Delta e_x}{\Delta \tau_{xz}} = \frac{\sin 2\varphi}{4G_0} \quad (2.8)$$

Таблица 1

№	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
3	390	800	510	620	386
5	430	800	38	72,5	416
6	370	800	57	106	396
7	500	800	33	63	449
9	325	800	28	54	352
10	340	800	67	123	352

Таблица 2

τ_2	$G'_i \cdot 10^{-2}$	$G''_i \cdot 10^{-2}$	$E'_j \cdot 10^{-2}$	$E''_j \cdot 10^{-2}$	$G_0 \cdot 10^{-2}$	φ
51	260	240	190	230	17	0,15
58	170	220	160	230	22	0,20
61	150	180	120	160	17	0,22
68	120	150	110	130	16	0,25
71	100	130	80	100	12	0,25
88	60	110	40	90	12	0,28

Таблица 3

τ_2	$E'_i \cdot 10^{-2}$	$E''_i \cdot 10^{-2}$	$G'_j \cdot 10^{-2}$	$G''_j \cdot 10^{-2}$	$G_0 \cdot 10^{-2}$	φ
56	700	600	220	150	22	0,20
59	660	600	160	150	22	0,20
65	560	480	150	100	17	0,22
76	520	350	110	70	12	0,25
104	400	300	80	60	12	0,28
120	220	180	60	50	12	0,41

Таблица 4

τ_2	$E'_i \cdot 10^{-2}$	$E''_i \cdot 10^{-2}$	$G'_j \cdot 10^{-2}$	$G''_j \cdot 10^{-2}$	$G_0 \cdot 10^{-2}$	φ
105	440	500	140	160	22	0,18
124	300	386	60	78	10	0,18

Если при догрузении из одноосного растяжения $-(1 + \sin \varphi) / (2 \sin 2\varphi) \leq m^{-1} \leq (1 + \sin \varphi) / (2 \sin 2\varphi)$, $\Delta \sigma_x < 0$, то происходит полная разгрузка.

На фиг. 4 в плоскости напряжений σ_x , τ_{xz} указаны области активного догрузения 1, частичной разгрузки $\Delta \tau_i$, $\Delta \tau_3 \geq 0$, $\Delta \tau_i \leq 0$ 2, частичной разгрузки $\Delta \tau_i \geq 0$, $\Delta \tau_i$, $\Delta \tau_3 \leq 0$ 3 и полной разгрузки 4. Здесь для того же угла $\varphi = \pi/6$ указана кривая $\tau_2 = \text{const}$.

При $\varphi = 0$ из (2.4) и (2.8) имеем $E_i = E$, $G_i = \mu$, $E_j^{-1} = G_j^{-1} = 0$, что согласуется с данными опытов [13, 17] и с теоретическими результатами [14].

Существенным моментом предлагаемой теории является то, что при $\varphi > 0$ точка нагружения является сингулярной, а приращение пластической деформации непрерывно зависит от направления догрузки.

3. Приведем сравнение результатов расчета с данными разных экспериментов. Рассмотрим опыты [2], которые проводились на тонкостенных трубчатых образцах из ст. 20. Образцы деформировались в пластическую область растягивающим напряжением σ_x , а затем подвергались действию дополнительного касательного напряжения τ_{xz} при постоянном σ_x . Всего было испытано шесть образцов при разных значениях σ_x в момент докрутки. Теоретические значения G_i^j определялись по формулам (2.8) при $\varphi = 0,12$ и представлены в табл. 1 в последней колонке ($G_i^j \cdot 10^{-2}$; МПа; $j=5$). Здесь же для сравнения приводятся данные опытов ($j=1$) и расчеты по теории течения ($j=2$), деформационной теории ($j=3$) и теории скольжения ($j=4$) Батдорфа — Будянского (расчеты взяты из [2]). Приведенное сопоставление показывает, что предложенная теория, названная теорией пластического сдвига, хорошо согласуется с результатами экспериментов.

В опытах [3] испытанию подвергались тонкостенные трубчатые образцы из латуни, дюралюминия и меди. Эксперименты проводились по двум группам: первая группа — образец растягивался в одном направлении за предел пропорциональности до σ_x , затем при сохранении σ_x постоянным — закручивался; вторая группа — образец предварительно закручивался за предел пропорциональности до τ_{xz} , затем подвергался действию σ_x при постоянном значении τ_{xz} .

В табл. 2, 3 для первой и второй групп представлены результаты экспериментов (с одним штрихом) на латуни и расчеты (с двумя штрихами) модулей догрузки кручением и растяжением по формулам (2.8) и (2.4) соответственно (размерность — МПа). При обработке опытов сначала проводились предварительные расчеты, в результате которых усреднением по первой и второй группам испытаний выявлялись зависимости $G_0(\tau_2)$, $\phi(\tau_2)$. Эти зависимости представлены в двух последних колонках и были исходными при построении расчетов.

Аналогично обрабатывались опытные данные для дюралюминия и меди. В качестве примера в табл. 4 приведены результаты расчетов и экспериментов по догрузке растяжением для дюралюминия.

Отметим экспериментальную работу [4], где на тонкостенных трубчатых образцах из алюминиевого сплава 24S-T4 изучалась зависимость начального модуля $G_t = \Delta\tau_{xz} / \Delta\gamma_{xz}$ от направления догрузки m . Хорошее соответствие теоретических и экспериментальных результатов получается, если принять $G_0 = 3940$ МПа, $\phi = \pi/6$.

Таким образом учет разной сопротивляемости материалов пластическому деформированию при растяжении и сжатии при помощи введения угла внутреннего трения позволяет описать довольно широкий класс материалов и объяснить эффекты сложного нагружения [2–4], не нашедшие отражения с позиции классических представлений в теории пластичности.

Автор выражает благодарность Е. И. Шемякину за полезные обсуждения и замечания при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков А. М. О пластических деформациях изотропного металла при сложном нагружении. — Изв. АН СССР. ОТИ, 1956, № 12, с. 72–87.
2. Жуков А. М. Пластические деформации стали при сложном нагружении. — Изв. АН СССР. ОТИ, 1954, № 11, с. 53–61.
3. Свешникова В. А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов. — Изв. АН СССР. ОТИ, 1956, № 1, с. 155–161.
4. Naghdi P. M., Rowley J. C. An experimental study of biaxial stress — strain relations in plasticity. — J. Mech. Phys. Solids, 1954, v. 3, No. 1. — Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1955, № 3, с. 138–147.
5. Новожиллов В. В. О пластическом разрушении. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 681–689.
6. Николаевский В. Н. Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 6, с. 1070–1082.
7. Drucker D. C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. — Quart. Appl. Math., 1952, v. 10, No. 2, p. 157–165. — Рус. перев.: Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир, 1975, с. 166–177.
8. Rudnicki J. W., Rice J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. — J. Mech. Phys. Solids, 1975, v. 23, No. 6, p. 371–394.
9. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2, с. 148–174.
10. Шемякин Е. И. Анизотропия пластического состояния. — Численные методы механики сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973, т. 4, № 4, с. 150–162.
11. Коврижных А. М. Вариант теории пластического течения, основанный на сдвиговом механизме деформирования. — ПМТФ, 1982, № 6, с. 133–138.
12. Коврижных А. М. Вариант теории пластической деформации горных пород. — Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых, 1983, № 1, с. 3–8.
13. Budiansky B., Dow N. F., Peters R. W., Shepherd R. P. Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity. — In: Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech. (Chicago, 1951), 1952, p. 503–512.
14. Ставрогин А. Н., Прогосеня А. Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979, 304 с.
15. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения. — В кн.: Разрушение. М.: Мир, 1975, т. 2, с. 336–520.
16. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954, 648 с.
17. Ivey H. J. Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys. — J. Mech. Engng Sci., 1961, v. 3, No. 1. — Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1962, № 3, с. 137–168.
18. Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести. Львов: Вища школа, 1981. 148 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
16.I.1985