МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 531.383

ПЕРМАНЕНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

СМОТРОВ В. М., ХАРЛАМОВ М. П.

Использование динамических уравнений движения в специальной форме с применением подвижной и неподвижной систем координат, отвечающих кинематике перманентных вращений, позволило выявить все случаи таких вращений гиростата в ньютоновском поле сил. Показано, что при этом возможны вращения как с постоянной, так и с переменной по величине угловой скоростью.

1. Рассмотрим гиростат, состоящий из тела-носителя с одной неподвижной точкой и связанного с ним статически и динамически осесимметричного ротора, вращающегося относительно своей оси симметрии, закрепленной в теле-носителе .

Как известно, при перманентном движении гиростат вращается вокруг оси, фиксированной в теле-носителе, и эта ось неизменно ориентирована в пространстве.

Точку закрепления гиростата принимаем за начало подвижной и неподвижной систем координат. При этом одну из неподвижных осей направляем из точки закрепления в притягивающий центр, а за направление одной из подвижных осей принимаем линию вектора угловой скорости гиростата. В качестве переменных, описывающих движение, выбираем углы Эйлера φ, $\psi=\text{const}$, $\theta=\text{const}$.

Обратимся к уравнениям движения гиростата в ньютоновском поле сил, полученным в работе [1], которые в векторной форме имеют вид

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})=\Gamma\mathbf{e}\times\boldsymbol{\nu}+\varepsilon^2\boldsymbol{\nu}\times(\mathbf{A}^*\cdot\boldsymbol{\nu}),\qquad \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{\cdot}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}(0,\ 0,\ \omega)$ — вектор угловой скорости гиростата, $\omega=\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\boldsymbol{\nu}(\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \cos\theta)$ — орт, направленный из неподвижной точки в притягивающий центр, $\mathbf{e}(e_1,\ e_2,\ e_3)$ — единичный вектор, идущий из точки закрепления в центр масс гиростата, $\boldsymbol{\lambda}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ — постоянная составляющая кинетического момента ротора, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}$ — тензор и приведенный тензор инерции гиростата с компонентами A_{ij}^*, A_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$, Γ — произведение веса гиростата на расстояние от неподвижной точки до центра масс, $\varepsilon^2=3gR^{-1}$, где g — ускорение свободного падения на расстоянии R от притягивающего центра. Компоненты векторов записаны в подвижных осях.

Приведем соотношения, устанавливающие связь между компонентами тензоров $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}$, осевым моментом инерции I ротора и направляющими косинусами s_1, s_2, s_3 орта $\mathbf{s}$ его оси

$$A_{ij}^*=A_{ij}+Is_is_j\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{1.2}$$

Эти выражения являются частным случаем общих формул для гиростата с несколькими роторами [2]. Произволом в выборе подвижных осей распорядимся так, чтобы $A_{12}=0$. Обозначив через Ω величину угловой скорости ротора относительно тела-носителя и через λ величину постоянной составляющей кинетического момента, будем иметь

$$\lambda=I(s_3\omega+\Omega),\quad \lambda_i=\lambda s_i \tag{1.3}$$

Можно убедиться, что второе уравнение системы (1.1) выполняется тождественно. Первому уравнению этой системы сопоставим следующие уравнения:

$$A_{13}\omega^{\cdot}-\lambda_2\omega-A_{23}\omega^2=f_1 \tag{1.4}$$

$$A_{23}\omega^{\cdot}+\lambda_1\omega+A_{13}\omega^2=f_2,\ A_{33}\omega^{\cdot}=f_3$$

$$f_i=a_{i0}+a_{i1}\cos\varphi+b_{i1}\sin\varphi+a_{i2}\cos 2\varphi+b_{i2}\sin 2\varphi\ (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$a_{10}=\Gamma e_2\cos\theta-\varepsilon^2A_{23}^*(1-{}^3/_2\sin^2\theta)$$

$$a_{11}=-[\Gamma e_3+\varepsilon^2(A_{22}^*-A_{33}^*)\cos\theta]\sin\theta$$

$$b_{11}=-a_{21}=-\varepsilon^2A_{12}^*\sin\theta\cos\theta,\ a_{12}=-b_{22}={}^1/_2\varepsilon^2A_{23}^*\sin^2\theta$$

$$b_{12}=a_{22}={}^1/_2\varepsilon^2A_{13}^*\sin^2\theta,\ a_{20}=-\Gamma e_1\cos\theta+\varepsilon^2A_{13}^*(1-{}^3/_2\sin^2\theta)$$

$$b_{21}=[\Gamma e_3+\varepsilon^2(A_{11}^*-A_{33}^*)\cos\theta]\sin\theta,\ a_{30}=0$$

$$a_{31}=(\Gamma e_1-\varepsilon^2A_{13}^*\cos\theta)\sin\theta,\ b_{31}=-(\Gamma e_2-\varepsilon^2A_{23}^*\cos\theta)\sin\theta$$

$$a_{32}=-\varepsilon^2A_{12}^*\sin^2\theta,\quad b_{32}=-{}^1/_2\varepsilon^2(A_{11}^*-A_{22}^*)\sin^2\theta$$

Система (1.1) допускает интеграл $(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{v}=k=\text{const}$, который запишем в виде

$$[A_{33}\cos\theta+(A_{23}\cos\varphi+A_{13}\sin\varphi)\sin\theta]\,\omega=$$
$$=(k-\lambda_3\cos\theta)-(\lambda_2\cos\varphi+\lambda_1\sin\varphi)\sin\theta \tag{1.5}$$

Это соотношение показывает, что ω является периодической функцией угла φ и поэтому представима рядом Фурье. Подставляя этот ряд в систему (1.4) и используя интеграл (1.5), получим для угловой скорости вращения гиростата следующее выражение $\omega=a_0+a\cos\varphi+b\sin\varphi$.

2. Рассмотрим случай $\omega=\text{const}\neq 0$, $\sin\theta\neq 0$. Анализ свободных членов и коэффициентов при косинусах и синусах аргументов φ, 2φ в уравнениях системы (1.4) и интеграле (1.5) позволяет получить следующие соотношения:

$$A_{11}^*=A_{22}^*,\ A_{12}^*=A_{13}^*=A_{23}^*=0,\ \Gamma e_1=\Gamma e_2=0$$

$$\lambda_1+A_{13}\omega=0,\ \lambda_2+A_{23}\omega=0,\ \Gamma+\varepsilon^2(A_{11}^*-A_{33}^*)\cos\theta=0$$

Из двух предпоследних равенств с учетом (1.2), (1.3) следует $(\lambda-I\omega s_3)s_1=0$, $(\lambda-I\omega s_3)s_1=0$. Поскольку $\lambda-I\omega s_3=I\Omega\neq 0$, то $s_1=s_2=0$, и тогда $A_{11}^*=A_{11}=A_{22}^*=A_{22}$, $A_{13}=A_{23}=0$.

Следовательно, в рассматриваемом случае эллипсоид инерции соосен приведенному. Оба они являются эллипсоидами вращения. Центр масс гиростата лежит на оси симметрии указанных эллипсоидов, которая является и осью вращения гиростата. Ротор вращается равномерно вокруг своей оси, параллельной оси вращения гиростата, а угол между этой осью и вертикалью определяется из выписанных соотношений. Таким образом, этот случай является обобщением перманентных вращений волчка Лагранжа в поле силы тяжести.

Положим $\omega=\text{const}\neq 0$, $\sin\theta=0$. Поскольку точка закрепления и притягивающий центр расположены на оси вращения гиростата, то $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{v}$. Используя равенство $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{A}^*\cdot\boldsymbol{\omega}+I\Omega\mathbf{s}$, первое уравнение системы (1.1) представим в виде

$$\mathbf{v}\times[(\omega^2-\varepsilon^2)\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{v}+I\Omega\omega\mathbf{s}+\Gamma\mathbf{e}]=0 \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что при $\mathbf{v}\times(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{v})=0$ (т. е. в случае вращения гиростата вокруг какой-либо из его главных осей инерции) должно выполняться условие

$$\mathbf{v}\times(I\Omega\omega\mathbf{s}+\Gamma\mathbf{e})=0 \tag{2.2}$$

которое указывает на компланарность ортов $\mathbf{v}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{e}$ и служит для нахождения величины угловой скорости гиростата. Движение будет происходить точно так же, как и в однородном поле силы тяжести [3].

Равенство (2.2) справедливо и для $\omega=\pm\varepsilon$. Однако при этом осями вращения гиростата являются те прямые, которые определяются уравнением (2.2).

Если же $(\omega^2-\varepsilon^2)\mathbf{v}\times(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{v})\neq 0$, то из уравнения (2.1) можно получить следующие два условия:

$$(\omega^2-\varepsilon^2)\mathbf{s}\cdot[\mathbf{v}\times(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{v})]-\Gamma\mathbf{v}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{e})=0$$

$$(\omega^2-\varepsilon^2)\mathbf{e}\cdot[\mathbf{v}\times(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{v})]+I\Omega\omega\mathbf{v}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{e})=0$$

которые совместно с самим уравнением (2.1) позволяют определить величину угловой скорости гиростата и распределение в нем осей вращения.

Пусть теперь $\omega\neq\text{const}$. Как показано в [4], для случая $\cos\theta=0$ движение качественно не отличается от движения физического маятника. Поэтому в дальнейшем будем считать $\cos\theta\neq 0$.

Обращаясь к интегралу (1.5), заключаем, что $\sin\theta\neq 0$ и $\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0$. Поскольку $\omega=a_0+a\cos\varphi+b\sin\varphi$, то из того же интеграла следует $A_{13}=A_{23}=0$.

Подставляя выражение угловой скорости в систему уравнений (1.4), прежде всего получим $A_{13}^*=A_{23}^*=0$.

Учитывая формулы (1.2), (1.3), находим $s_1s_3=s_2s_3=0$. Так как $s_1^2+s_2^2\neq 0$, то $s_3=0$.

Следовательно, $A_{33}^*=A_{33}$, $A_{12}^*=Is_1s_2$, $\lambda=I\Omega$, $\lambda_1=I\Omega s_1$ $\lambda_2=I\Omega s_2$. Остальные соотношения, вытекающие из (1.4), таковы

$$\lambda_1a_0=-\Gamma e_1\cos\theta,\quad \lambda_2a_0=-\Gamma e_2\cos\theta$$
$$A_{33}^*a_0b=\Gamma e_1\sin\theta,\quad A_{33}^*a_0a=\Gamma e_2\cos\theta$$
$$\lambda_1b=[\Gamma e_3+\varepsilon^2(A_{11}^*-A_{33}^*)\cos\theta]\sin\theta$$
$$\lambda_2a=[\Gamma e_3+\varepsilon^2(A_{22}^*-A_{33}^*)\cos\theta]\sin\theta$$
$$A_{33}^*(a^2-b^2)=\varepsilon^2(A_{11}^*-A_{22}^*)\sin^2\theta,\quad \lambda_1a=\varepsilon^2A_{12}^*\sin\theta\cos\theta$$
$$A_{33}^*ab=-\varepsilon^2A_{12}^*\sin^2\theta,\quad \lambda_2b=\varepsilon^2A_{12}^*\sin\theta\cos\theta$$

Из последних трех равенств находим $(I\Omega^2+\varepsilon^2A_{33}^*\cos^2\theta)s_1s_2=0$. Тогда $s_1s_2=0$ и $A_{12}^*=0$.

Без нарушения общности положим $s_1=0$, $s_2=1$. Будем иметь $A=A_{11}^*=A_{11}$, $B=A_{22}^*=A_{22}+I$, $C=A_{33}^*$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=I\Omega$. Полученные ранее соотношения принимают следующий вид:

$$I\Omega a=\varepsilon^2(B-A)\sin\theta\cos\theta,\quad Ca^2=\varepsilon^2(A-B)\sin^2\theta$$

$$b=0,\quad e_1=0,\quad Ca_0a=\Gamma e_2\sin\theta$$

$$I\Omega a_0=-\Gamma e_2\cos\theta,\quad \Gamma e_3+\varepsilon^2(A-C)\cos\theta=0$$

Из этих равенств окончательно получаем

$$\Gamma e_3+\varepsilon^2(A-C)\cos\theta=0,\quad a_0=-\Gamma e_2(I\Omega)^{-1}\cos\theta$$

$$a=-\varepsilon^2(A-B)(I\Omega)^{-1}\sin\theta\cos\theta,\quad \varepsilon^2C(A-B)\cos^2\theta-I^2\Omega^2=0$$

Таким образом, эллипсоид инерции гиростата и его приведенный эллипсоид соосны. Гиростат вращается вокруг одной из своих главных осей инерции. Моменты инерции относительно двух других главных осей не равны между собой и ось ротора параллельна той из них, момент инерции которой меньше. Центр масс гиростата расположен в плоскости, проходящей через ось вращения и ту из главных осей инерции, которая параллельна оси ротора. Ось вращения гиростата наклонена к оси, проходящей через неподвижную точку и притягивающий центр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харламова Е. И., Ковалева Л. М.* Уравнения движения гиростата в ньютоновском поле сил.— В кн.: Механика твердого тела, 4. «Наукова думка», К., 1972. с. 92—98.
2. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения системы твердых тел.— В кн.: Механика твердого тела, 4. «Наукова думка», К., 1972. с. 52—73.
3. *Дрофа В. Н.* О перманентных осях движения тяжелого гиростата около неподвижной точки.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 5, с. 941—945.
4. *Ковалева Л. М.* Новые решения задачи о движении гиростата в центральном ньютоновском поле сил. В кн.: Механика твердого тела, 4. «Наукова думка», К., 1972. с. 99—105.

Волгоград

Поступила в редакцию
1.II.1983