МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.374

ГРАНИЦЫ ЭФФЕКТИВНЫХ ПРЕДЕЛОВ ТЕКУЧЕСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

САРАЕВ Л. А.

Точному вычислению эффективных констант жесткопластических композиционных сред препятствует нелинейность исходных локальных определяющих уравнений и случайный характер взаимного расположения составляющих фаз в пространстве. В силу этих причин при вычислении эффективных постоянных композитов можно либо получать их приближенные значения с различной степенью точности, либо находить их верхнюю и нижнюю оценки. Элементарные границы для эффективного предела текучести микронеоднородной среды с поверхностью текучести Мизеса получаются на основании первой и второй теорем предельного состояния жесткопластического тела и способов осреднения Фойгта и Рейсса. С их помощью установлено, что поверхность текучести макросреды лежит между цилиндрами Мизеса, для которых больший радиус равен среднему по объему композита пределу текучести, а меньший радиус равен наименьшему пределу текучести компонентов среды [1].

В публикуемой работе предлагается расчет более узких границ эффективных пределов текучести многокомпонентного композиционного материала, несмотря на то, что информация о структуре ограничена только заданием объемных долей составляющих компонентов.

1. Рассмотрим жесткопластическую изотропную микронеоднородную среду, состоящую из n различных компонентов, соединенных между собой с идеальной адгезией. Пусть пластические свойства каждого компонента описываются поверхностью текучести Мизеса $s_{ij}s_{ij}=k_s^2$, $s_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_{pp}/3$, $(s=1, 2,\ldots, n)$, где σ_{ij} — тензор напряжений, k_s — пределы текучести компонентов.

Структуру композиционного материала будем описывать системой изотропных индикаторных случайных функций координат $\varkappa_1(\mathbf{r})$, $\varkappa_2(\mathbf{r}),\ldots$ $\ldots, \varkappa_n(\mathbf{r})$. Функция $\varkappa_s(\mathbf{r})$ равна единице на множество точек s-го компонента и равна нулю вне этого множества. Локальный ассоциированный закон течения композита можно записать в виде

$$s_{ij}(\mathbf{r})=k(\mathbf{r})\frac{e_{ij}(\mathbf{r})}{\sqrt{e_{hl}(\mathbf{r})e_{hl}(\mathbf{r})}},\qquad k(\mathbf{r})=\sum_{s=1}^{n}k_s\varkappa_s(\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

Здесь $e_{ij}(\mathbf{r})$ — тензор скоростей деформаций, удовлетворяющий условию несжимаемости $e_{pp}(\mathbf{r})=0$.

Функции $\varkappa_s(\mathbf{r})$, тензоры напряжений и скоростей деформаций предполагаются статистически однородными и эргодическими случайными полями, поэтому их математические ожидания совпадают с осреднениями по объемам компонентов V_s и полному объему среды [2]:

$$\langle(\ldots)\rangle=\frac{1}{V}\int_V(\ldots)d\mathbf{r},\qquad \langle(\ldots)\rangle_s=\frac{1}{V_s}\int_{V_s}(\ldots)d\mathbf{r},\qquad V=\sum_{s=1}^{n}V_s$$

$$(s=1,2,\ldots,n)$$

Для того чтобы определить эффективный предел текучести композиционного материала, необходимо выразить среднее значение функции скорости диссипации энергии в объеме V: $\langle D(\mathbf{r})\rangle=\langle k(\mathbf{r})\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})}\rangle$ через средние по объему V скорости деформаций (k^* — эффективный предел текучести): $\langle D\rangle=k^*\sqrt{\langle e_{kl}\rangle\langle e_{kl}\rangle}$.

Найдем верхнюю границу для величин k^*. Будем считать, что k_n является наибольшим пределом текучести из всех k_s. Покажем, что если пренебречь флуктуациями скоростей деформаций в объемах компонентов $V_1, \ldots, V_{n-1}$, то значение средней плотности диссипации энергии увеличится. Рассмотрим величину $\langle D^2\rangle=\langle k^2 e_{kl}e_{kl}\rangle$. Применяя к ней правило механического смешивания фаз, имеем

$$\langle D^2\rangle=\sum_{s=1}^{n} k_s^2 c_s \langle e_{kl}e_{kl}\rangle_s \tag{1.2}$$

Здесь $c_s=V_sV^{-1}$ – объемные содержания компонентов композиционного материала. Выделяя в формуле (1.2) величину k_n и вновь используя правило смесей, находим

$$\langle D^2\rangle=k_n^2\langle e_{kl}e_{kl}\rangle-\sum_{s=1}^{n}(k_n^2-k_s^2)c_s\langle e_{kl}e_{kl}\rangle_s, \qquad k_n^2-k_s^2\geqslant 0 \tag{1.3}$$

Предположение об однородности деформированного состояния компонентов $V_1, \ldots, V_{n-1}$ означает замену в выражении (1.3) величин $\langle e_{kl}e_{kl}\rangle_s$ на величины $\langle e_{kl}\rangle_s\langle e_{kl}\rangle_s$ $(s=1, \ldots, n-1)$. Поскольку среднее значение квадрата величины не меньше квадрата ее среднего значения [3]: $\langle e_{kl}e_{kl}\rangle_s\geqslant\langle e_{kl}\rangle_s\langle e_{kl}\rangle_s$, то очевидно, что принятое допущение увеличивает величину $\langle D^2\rangle$. Вместе с ней в силу неотрицательности диссипативной функции $D(\mathbf{r})\geqslant 0$ увеличивается и средняя плотность диссипации энергии $\langle D\rangle$.

Ассоциированный закон течения (1.1) принимает вид

$$s_{ij}(\mathbf{r})=k_n\varkappa_n(\mathbf{r})\frac{e_{ij}(\mathbf{r})}{\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})}}+\sum_{s=1}^{n-1}k_s\varkappa_s(\mathbf{r})\frac{\langle e_{ij}\rangle_s}{\sqrt{\langle e_{kl}\rangle_s\langle e_{kl}\rangle_s}}$$

Вводя коэффициенты a_s, связывающие средние по объему компонентов скорости деформаций с макроскопическими скоростями деформаций

$$\langle e_{ij}\rangle_s=a_s\langle e_{ij}\rangle \tag{1.4}$$

получаем

$$s_{ij}(\mathbf{r})=k_n\varkappa_n(\mathbf{r})\frac{e_{ij}(\mathbf{r})}{\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})}}+\frac{\langle e_{ij}\rangle}{\sqrt{\langle e_{kl}\rangle\langle e_{kl}\rangle}}\sum_{s=1}^{n-1}k_s\varkappa_s(\mathbf{r}) \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) описывает нелинейную связь между величинами $s_{ij}(\mathbf{r})$ и $e_{ij}(\mathbf{r})$. Для того чтобы воспользоваться методами теории упругости для установления эффективных соотношений, необходимо (1.5) линеаризовать. Заменим в объеме V_n величину $\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})}$ ее средним значением $\lambda_n=\langle\sqrt{e_{kl}e_{kl}}\rangle_n$. Покажем, что при этом среднее значение скорости диссипации энергии увеличится. Введем величину λ_n в (1.1), умножим его на $e_{ij}(\mathbf{r})$ и осредним по объему V_n: $\langle s_{ij}e_{ij}\rangle_n=k_n\langle e_{ij}e_{ij}\rangle_n\lambda_n^{-1}$.

Учитывая, что $\langle D\rangle_n=\langle s_{ij}e_{ij}\rangle_n=k\lambda_n$, получим $\langle D\rangle_n=\langle D^2\rangle_n:\langle D\rangle_n$ или $\langle D^2\rangle_n=\langle D\rangle_n^2$. Без учета сделанного допущения имеет место неравенство [3]: $\langle D\rangle_n^2\leqslant\langle D^2\rangle_n$, поэтому линеаризация закона течения увеличивает среднее значение диссипативной функции и окончательно уравнение (1.5) принимает вид

$$s_{ij}(\mathbf{r})=\frac{k_n}{\lambda_n}\varkappa_n(\mathbf{r})e_{ij}(\mathbf{r})+\frac{\langle e_{ij}\rangle}{\sqrt{\langle e_{kl}\rangle\langle e_{kl}\rangle}}\sum_{s=1}^{n-1}k_s\varkappa_s(\mathbf{r}) \tag{1.6}$$

Присоединяя к соотношению (1.6) уравнения равновесия и формулы Коши, связывающие компоненты тензора скоростей деформаций с компонентами вектора перемещений $v_i(\mathbf{r})$:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r})=0 \tag{1.7}$$

$$2e_{ij}(\mathbf{r})=v_{i,j}(\mathbf{r})+v_{j,i}(\mathbf{r}), \qquad v_{p,p}(\mathbf{r})=0 \tag{1.8}$$

получаем замкнутую систему уравнений течения рассматриваемого композита. Граничными условиями для системы (1.6)—(1.8) являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности S объема V: $\sigma_{ij}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}\in S}=\langle\sigma_{ij}\rangle$, $e_{ij}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}\in S}=\langle e_{ij}\rangle$.

Исключая из системы (1.6)—(1.8) напряжения и скорости деформаций, получим систему уравнений равновесия в скоростях перемещений

$$v'_{i,jj}(\mathbf{r})-\tau'_{ij,j}(\mathbf{r})+2\lambda_n\sigma'_{pp,i}(\mathbf{r})/3k_n=0 \tag{1.9}$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{r})=2\sum_{s=1}^{n-1}(\langle e_{ij}\rangle_s-\alpha m_s\langle e_{ij}\rangle)\varkappa_s(\mathbf{r}),\quad m_s=k_s/k_n,\quad \alpha=\lambda_n/\sqrt{\langle e_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle}$$

Штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V. Заменим систему (1.9) системой интегральных уравнений, используя функцию Грина $^1/_4\pi r$ [4]:

$$e_{ij}'(\mathbf{r})=\int_V G_{ijkl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\tau_{kl}'(\mathbf{r}_1)\,d\mathbf{r}_1 \tag{1.10}$$

$$G_{ijkl}(\mathbf{r})={}^1/_{16}\pi^{-1}(\delta_{jk}r,_{ppil}+\delta_{ik}r,_{ppjk}-2r,_{ijkl}),\quad r=|\mathbf{r}|$$

Для определения верхней оценки эффективного предела текучести осредним по полному объему V соотношение (1.6) и применим правило механического смешивания фаз

$$\langle s_{ij}\rangle=c_nk_n\alpha^{-1}\langle e_{ij}\rangle_n+(\langle k\rangle-c_nk_n)\langle e_{ij}\rangle)/\sqrt{\langle e_{kl}\rangle\langle e_{kl}\rangle} \tag{1.11}$$

$$\langle k\rangle=\sum_{s=1}^{n}c_sk_s$$

Величина $\langle k\rangle$ — среднее значение предела текучести композита. Вычислим скорости деформаций, осредненные по объему компонентов $\langle e_{ij}\rangle_q$ [5]:

$$\langle e_{ij}\rangle_q=\langle e_{ij}\rangle+c_q^{-1}\langle\varkappa_q'e_{ij}'\rangle\quad(q=1,\,2,\ldots,\,n) \tag{1.12}$$

Умножим обе части уравнения (1.10) на величину $\varkappa_q'(\mathbf{r})$ и осредним его по объему V:

$$\langle\varkappa_q'e_{ij}'\rangle=2\sum_{s=1}^{n-1}(\langle e_{kl}\rangle_s-\alpha m_s\langle e_{kl}\rangle)\int_V G_{ijkl}(\mathbf{r}_1)\langle\varkappa_q'(\mathbf{r})\varkappa_s'(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\rangle d\mathbf{r}_1$$

В силу изотропности функций $\varkappa_s'(\mathbf{r})$ подынтегральная корреляционная функция $\langle\varkappa_q'(\mathbf{r})\varkappa_s'(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\rangle$ зависит только от модуля $|\mathbf{r}_1|$. В этом случае интеграл, стоящий в правой части, не зависит от вида корреляционной функции и вычисляется точно [5, 6]:

$$\langle\varkappa_q'e_{ij}'\rangle=\frac{2}{5}\sum_{s=1}^{n-1}(\langle e_{ij}\rangle_s-\alpha m_s\langle e_{ij}\rangle)\langle\varkappa_q'\varkappa_s'\rangle \tag{1.13}$$

Подставляя формулу (1.13) в соотношение (1.12) и учитывая, что $\langle\varkappa_q'\varkappa_s'\rangle=-c_qc_s$, $q\neq s$ и $c_q(1-c_q)$, $q=s$, получаем выражения для коэффициентов a_s формулы (1.4):

$$a_s=\left(\frac{5}{5-2c_n}+\frac{2}{3}\alpha\frac{5\{m\}-m_s(5-2c_n)}{5-2c_n}\right)\quad(s=1,2,\ldots,n-1)$$

$$a_n=(3+2\alpha\{m\})/(5-2c_n) \tag{1.14}$$

$$\{m\}=\{k\}/k_n,\quad \{k\}=\langle k\rangle-c_nk_n$$

Определим величину α, используя выражение для средней плотности диссипации энергии

$$\langle D\rangle=\sum_{s=1}^{n}c_sk_s\langle\sqrt{e_{kl}e_{kl}}\rangle_s$$

С учетом (1.4) и соотношения для α находим

$$\langle D\rangle=\left(c_nk_n\alpha+\sum_{s=1}^{n-1}c_sk_sa_s\right)\sqrt{\langle e_{kl}\rangle\langle e_{kl}\rangle} \qquad (1.15)$$

С другой стороны, интегральное уравнение равновесия микронеоднородной среды, записанное для флуктуаций величин [4]:

$$\int_V s_{ij}'e_{ij}'\,d\mathbf{r}=0$$

дает $\langle D\rangle=\langle s_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle$. Подставляя в это соотношение выражения (1.11) и (1.15), получаем уравнение для α, решая которое, находим

$$\alpha=3[((5-2c_n)(3c_n-2\{m^2\})+10\{m\}^2)/c_n]^{1/2}$$

$$\{m^2\}=\{k^2\}/k_n^2,\qquad \{k^2\}=\sum_{s=1}^{n-1}c_sk_s^2 \qquad (1.16)$$

Исключая из уравнения (1.11) величины α и $\langle e_{ij}\rangle_n$, с помощью формул (1.14), (1.16) получаем верхнюю оценку эффективного ассоциированного закона течения рассматриваемого композиционного материала

$$\langle s_{ij}\rangle=k_+\langle e_{ij}\rangle/\sqrt{\langle e_{kl}\rangle\langle e_{kl}\rangle} \qquad (1.17)$$

$$k_+=\langle k\rangle-c_nk_n\left(1-\frac{2\{m\}}{5-2c_n}-\sqrt{\frac{(5-2c_n)(3c_n-2\{m^2\})+10\{m\}^2}{c_n(5-2c_n)^2}}\right)$$

Здесь k_+ — верхняя граница эффективного предела текучести.

2. Определим нижнюю границу эффективного предела текучести. Пусть k_1 является наименьшим из всех пределов текучести k_s. Средняя плотность диссипации энергии принимает наименьшее значение при заданном поле скоростей деформаций, если в пластическом состоянии находится только материал первой фазы, а остальные компоненты являются абсолютно жесткими и находятся в однородном напряженном состоянии. Ассоциированный закон течения композита в таком случае принимает вид

$$s_{ij}(\mathbf{r})=k_1e_{ij}(\mathbf{r})/\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})}+\sum_{s=2}^{n}\langle s_{ij}\rangle_s\varkappa_s(\mathbf{r}) \qquad (2.1)$$

Здесь $\varkappa_s(\mathbf{r})e_{ij}(r)=0$, $\langle s_{ij}\rangle_s$ — напряжения в жестких компонентах ($s=2, 3,\ldots, n$). Линеаризуем соотношение (2.1), заменяя, как и прежде, величину $\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})}$ ее средним значением $\lambda_1=\langle\sqrt{e_{kl}e_{kl}}\rangle_1$ в объеме V_1. В силу малости скоростей деформаций (1.8) некоторое увеличение средней плотности диссипации энергии не будет превосходить ее увеличения в случае перехода в пластическое состояние какого-либо еще компонента с большим пределом текучести, чем k_1. Поэтому уравнение

$$s_{ij}(\mathbf{r})=\frac{k_\cdot}{\lambda_1}e_{ij}(\mathbf{r})+\sum_{s=2}^{n}\langle s_{ij}\rangle_s\varkappa_s(\mathbf{r}) \qquad (2.2)$$

как и (2.1), будет соответствовать нижней оценке эффективного предела текучести. Система уравнений равновесия в скоростях перемещений для закона течения (2.2) получается аналогично системе (1.9):

$$v'_{i,pp}(\mathbf{r})-\xi'_{ij,j}(\mathbf{r})+{}^2/_3\lambda_1/k_1\sigma'_{pp,i}(\mathbf{r})=0 \qquad (2.3)$$

$$\xi_{ij}(\mathbf{r})=-\frac{2\lambda_1}{k_1}\sum_{s=2}^{n}\langle s_{ij}\rangle_s\varkappa_s(\mathbf{r})$$

Поле флуктуаций скоростей деформаций выражается через тензор

Грина и величину ξ_{ij} формулой, аналогичной формуле (1.10):

$$e_{ij}'(\mathbf{r})=\int\limits_V G_{ijkl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\xi_{kl}'(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1 \qquad (2.4)$$

Осредняя уравнение (2.2) по объему V, получим

$$\langle s_{ij}\rangle=k_1\lambda_1^{-1}\langle e_{ij}\rangle+\sum_{s=2}^{n}\langle s_{ij}\rangle_s c_s \qquad (2.5)$$

Для вычисления второго слагаемого правой части равенства (2.5) умножим уравнение (2.4) на $\varkappa_1'(\mathbf{r})$ и осредним по полному объему композита V. Выполняя вычисление величины $\langle\varkappa_1'e_{ij}'\rangle$ аналогично процедуре получения формулы (1.13), находим

$$\langle\varkappa_1'e_{ij}'\rangle=\frac{2\lambda_1c_1}{5k_1}\sum_{s=2}^{n}\langle s_{ij}\rangle_s c_s$$

Равенство нулю скоростей деформаций во всех фазах, кроме первой, дает $\langle e_{ij}\rangle=c_1\langle e_{ij}\rangle_1$. Тогда из формул (1.12) и (2.5) следует

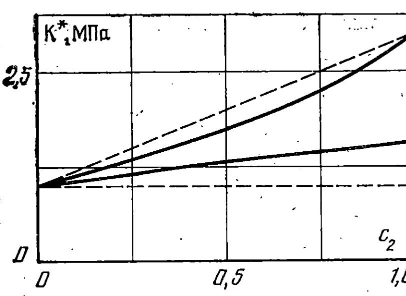
$$\langle s_{ij}\rangle={}^1/_2k_1\lambda_1^{-1}(5-3c_1)c_1^{-1}\langle e_{ij}\rangle \qquad (2.6)$$

Подставляя в $\langle D\rangle=\langle s_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle$ соотношение (2.6) и среднюю плотность диссипации энергии $\langle D\rangle$, получаем уравнение λ_1, из которого следует

$$\lambda_1=[(5-3c_1)\langle e_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle]^{1/2}c_1^{-1} \qquad (2.7)$$

Исключая величину λ_1 из соотношений (2.6), (2.7), находим нижнюю оценку k_- эффективного предела текучести композиционного материала

$$\langle s_{ij}\rangle=k_-\langle e_{ij}\rangle/\sqrt{\langle e_{kl}\rangle\langle e_{kl}\rangle},$$
$$k_-=k_1\sqrt{{}^1/_2(5-3c_1)} \qquad (2.8)$$



Таким образом, точное значение предела текучести k^* для любых пределов текучести компонентов k_s и любых концентраций c_s лежит в интервале

$$k_-\leqslant k^*\leqslant k_+ \qquad (2.9)$$

Для двухкомпонентного композиционного материала $(k_1<k_2)$ границы эффективного предела текучести (2.9) принимают вид

$$k_1\sqrt{1+1{,}5c_2}\leqslant k^*\leqslant c_1k_1+\frac{c_2}{5-2c_2}\left(\sqrt{3(5-2c_2)k_2^2-6c_2k_1^2}+2c_1k_1\right) \qquad (2.10)$$

На фигуре приведены графики зависимостей границ (2.10) от объемного содержания второго компонента c_2 (сплошные линии). Штриховые линии соответствуют границам $k_1\leqslant k^*\leqslant c_1k_1+c_2k_2$, указанным в [1] на основании предельных теорем и способов осреднений Фойгта и Рейсса. Расчетные значения $k_1=1$ МПа, $k_2=3$ МПа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дудукаленко В. В., Минаев В. А.* К расчету предела пластичности композитных материалов – ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 942–944.
2. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
3. *Сараев Л. А.* Сингулярное приближение в теории упругопластических сред с микроструктурой.– ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 522–524.
4. *Сараев Л. А.* К теории идеальной пластичности композиционных материалов, учитывающей объемную сжимаемость.– ПМТФ, 1981, № 3, с. 164–167.
5. *Дудукаленко В. В., Мешков С. И., Сараев Л. А.* К расчету эффективных характеристик пластичности неоднородных сред.– ПМТФ, 1979, № 5, с. 152–154.
6. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию 18.IX.1984