МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1986

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОГО КЛИНА

ПОПОВ В. А.

Метод асимптотического интегрирования [1, 2] применен в [3] для решения задач о колебаниях тонких упругих тел. В частности, в [3] рассмотрена задача о колебаниях тонкого клина конечной длины и выведено уравнение для главного члена асимптотики решения, которое совпадает с классическим уравнением колебаний клина [4].

Публикуемая работа посвящена построению полного асимптотического решения задачи о колебаниях тонкого клина в области низкочастотных колебаний и вычислению главного и поправочных членов асимптотики вектора смещений и собственных частот.

1. Постановка задачи. Рассмотрим колебания тонкого изотропного клина $S=\{(x_1, x_2): 0<x_1<l, 0<x_2<\varepsilon x_1\}$, $\varepsilon=h/l\ll 1$ (плоская деформация). Стороны $x_2=0$ и $x_2=\varepsilon x_1$ свободны от напряжений, торец $x_1=l$ закреплен (задача 1) или свободен (задача 2). Пусть ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, ρ – плотность, ω – частота колебаний, $c=(1-2\nu)/(1-\nu)$, $\mu=(1-2\nu)\rho\omega^2 l^2/G$.

Свободные колебания клина описываются уравнениями

$$(l^2\mathbf{L}(\partial_1, \partial_2)+\mu)\mathbf{u}=0, \quad \mathbf{M}(\partial_1, \partial_2)\mathbf{u}|_{x_2=0}=0 \tag{1.1}$$

$$[\mathbf{M}(\partial_1, \partial_2)-\varepsilon\mathbf{N}(\partial_1, \partial_2)]\mathbf{u}|_{x_2=\varepsilon x_1}=0$$

с граничными условиями на торце (задача 1): $\mathbf{u}(l, x_2)=0$ или (задача 2): $\mathbf{N}(\partial_1, \partial_2)\mathbf{u}|_{x_1=l}=0$. Здесь

$$\partial_i=\partial/\partial x_i \quad (i=1, 2) \tag{1.2}$$

$$\mathbf{L}(\partial_1, \partial_2)=\mathbf{L}_0\partial_2^2+\mathbf{L}_1\partial_1\partial_2+\mathbf{L}_2\partial_1^2$$

$$\mathbf{M}(\partial_1, \partial_2)=\mathbf{M}_0\partial_2+\mathbf{M}_1\partial_1, \quad \mathbf{N}(\partial_1, \partial_2)=\mathbf{N}_0\partial_2+\mathbf{N}_1\partial_1$$

$$\mathbf{L}_0=\begin{pmatrix} 1-2\nu & 0 \\ 0 & 2(1-\nu)\end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2=\begin{pmatrix} 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 1-2\nu\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1-2\nu \\ 2\nu & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_0=\mathbf{L}_0, \quad \mathbf{N}_0=\mathbf{M}_1^T, \quad \mathbf{N}_1=\mathbf{L}_2, \quad \mathbf{L}_1=\mathbf{N}_0+\mathbf{M}_1$$

В угловой точке клина (0, 0) потребуем выполнения условия регулярности решения $\mathbf{u}(x_1, x_2)$, т. е. существования конечного предела $\lim \mathbf{u}(x_1, x_2)$ при $r\to 0$ $(r^2=x_1^2+x_2^2)$.

Введем безразмерные координаты $y=x_1/l$, $z=x_2/h$, $\xi=(x_1-l)/h$. Асимптотическое по ε решение задач 1 и 2 в области низкочастотных колебаний $(\mu=O(\varepsilon^2))$ будем искать в виде суммы асимптотик регулярного решения $\mathbf{v}(y, z, \varepsilon)$ и решения типа погранслоя $\mathbf{w}(\xi, z, \varepsilon)$, экспоненциально затухающего при удалении от торца $x_1=l$: $\mathbf{u}(x_1, x_2)=\mathbf{v}(y, z, \varepsilon)+e(y)\mathbf{w}(\xi, z, \varepsilon)$, где $e(y)$ – функция «срезки», $e(y)\in C^\infty(0, 1)$, $|e(y)|\leqslant 1$, $e(y)=1$ при $y\geqslant 2/3$ и 0 при $y\leqslant 1/3$.

Функции $\mathbf{v}(y, z, \varepsilon)$, $\mathbf{w}(\xi, z, \varepsilon)$ и собственные числа μ будем искать в виде асимптотического разложения по степеням ε:

$$\mathbf{v}(y, z, \varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\mathbf{v}^{(k)}(y, z), \qquad \mu=\varepsilon^2\sum_{k=0}^{N-4}\varepsilon^k\mu_k$$
$$\mathbf{w}(\xi, z, \varepsilon)=\varepsilon^m\sum_{k=0}^{N-m}\varepsilon^k\mathbf{w}^{(k)}(\xi, z) \tag{1.3}$$

где $N\geqslant 4$, m — целочисленная константа, значение которой для задач 1 и 2 определено дальше.

2. Построение асимптотики регулярного решения. Подставляя в уравнения (1.1) асимптотические разложения (1.3) для $\mathbf{v}$ и μ и группируя члены при одинаковых степенях ε, получаем краевые задачи для определения функций $\mathbf{v}^{(k)}(y, z)$ $(0\leqslant k\leqslant N)$

$$\partial_z^2\mathbf{v}^{(k)}=-\mathbf{L}_0^{-1}\left(\mathbf{L}_1\partial_y\partial_z\mathbf{v}^{(k-1)}+\mathbf{L}_2\partial_y^2\mathbf{v}^{(k-2)}+\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-4}\mathbf{v}^{(n)}\right) \tag{2.1}$$
$$\partial_z\mathbf{v}^{(k)}|_{z=0}=-\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_1\partial_y\mathbf{v}^{(k-1)}|_{z=0}$$
$$\partial_z\mathbf{v}^{(k)}|_{z=y}=\mathbf{M}_0^{-1}[(\mathbf{N}_0\partial_z-\mathbf{M}_1\partial_y)\mathbf{v}^{(k-1)}+\mathbf{N}_1\partial_y\mathbf{v}^{(k-2)}]_{z=y}$$
$$\mathbf{v}^{(n)}=0,\ \mu_n=0,\ n<0$$

Условия разрешимости задач (2.1) приводятся к виду

$$\int_0^y\left[\mathbf{L}_2\partial_y^2\mathbf{v}^{(k-2)}(y, z)-\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-4}\mathbf{v}^{(n)}(y, z)\right]dz+$$
$$+(\mathbf{N}_0\partial_z\mathbf{v}^{(k-1)}+\mathbf{N}_1\partial_y\mathbf{v}^{(k-2)})_{z=y}+\mathbf{N}_0\partial_y\mathbf{v}^{(k-1)}|_{z=0}^{y}=0 \tag{2.2}$$

При выполнении этих условий решение задачи (2.1) описывается формулой

$$\mathbf{v}^{(k)}(y, z)=z\mathbf{L}_0^{-1}\mathbf{N}_0\partial_y\mathbf{v}^{(k-1)}(y, 0)-\mathbf{L}_0^{-1}\int_0^z\Big[\mathbf{L}_1\partial_y\mathbf{v}^{(k-1)}(y, \eta)+$$
$$+(z-\eta)\left(\mathbf{L}_2\partial_y^2\mathbf{v}^{(k-2)}(y, \eta)+\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-4}\mathbf{v}^{(n)}(y, \eta)\right)\Big]d\eta+\mathbf{V}^{(k)}(y) \tag{2.3}$$

где вектор-функция $\mathbf{V}^{(k)}(y)=(g_k(y), f_k(y))$ не зависит от z.

Положим $g_0=0$. Из формул (2.3) находим при помощи интегрирования:

$$v_1^{(k)}(y, z)=\frac{2-\nu}{1-\nu}\left(\frac{z^3}{6}f_{k-3}'''-\frac{z^2}{2}g_{k-2}''\right)-zf_{k-1}'+$$
$$+g_k(y)-\frac{z^2}{2(1-2\nu)}\sum_{n=1}^{k-4}\mu_{k-n-4}g_n(y)+p_1^{(k)}(y, z)$$
$$v_2^{(k)}(y, z)=\frac{\nu z^2}{2(1-\nu)}f_{k-2}''-\frac{\nu z}{1-\nu}g_{k-1}'+f_k(y)- \tag{2.4}$$
$$-\frac{z^2}{4(1-\nu)}\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-4}f_n(y)+p_2^{(k)}(y, z)$$

где $f_n=0$ при $n<0$, $g_n=0$ при $n\leqslant 0$, $p_i^{(k)}(y, z)$ $(i=1, 2)$ зависят от функций $f_n(y)$, $g_{n+1}(y)$ и их производных при $n\leqslant k+i-6$ и от чисел μ_n при $n\leqslant$

$\leqslant k-4-i$ и являются полиномами по z. В частности, при $k\leqslant 5-i$ $p_i^{(k)}=0$:

$$p_2^{(4)}(y,z)=(1+\nu)(1-\nu)^{-1}({}^1/_6 z^3 g_1''' - {}^1/_{24} z^4 f_0^{(\mathrm{IV})})$$

$$p_1^{(5)}(y,z)=(3-\nu)(1-\nu)^{-1}({}^1/_{24} z^4 g_1^{(\mathrm{IV})} - {}^1/_{120} z^5 f_0^{(\mathrm{V})})+$$
$$+{}^1/_{12}(3-2\nu)(1-\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1} z^3 \mu_0 f_0'$$

Подставляя выражения (2.4) в условия (2.2), получаем уравнения

$$(y g_{k-2}' - {}^1/_2 y^2 f_{k-3}'')' = R_1^{(k)}(y) \qquad (3\leqslant k\leqslant N) \tag{2.5}$$

$$({}^1/_6 y^3 f_0''' - {}^1/_2 y^2 g_1'')' + {}^1/_{12} y \lambda_0^4 f_0 = 0 \tag{2.6}$$

$$({}^1/_6 y^3 f_{k-4}''' - {}^1/_2 y^2 g_{k-3}'')' + {}^1/_{12} y(\lambda_0^4 f_{k-4} + \lambda_{k-4}^4 f_0) = R_2^{(k)}(y) \qquad (5\leqslant k\leqslant N)$$

$$\lambda_n^4 = 6\mu_n/c, \qquad R_i^{(k)}=0 \quad (k\leqslant 3+i,\ i=1,2)$$

$$R_1^{(5)}(y)=({}^1/_3 y^3 g_1''' - {}^1/_{12} y^4 f_0^{(\mathrm{IV})})' +$$
$$+{}^1/_{12}\lambda_0^4(1-\nu)^{-1}[\nu y f_0 + {}^1/_2 y^2 f_0' - (1-\nu) y g_1] \tag{2.7}$$

$$R_2^{(6)}(y)=({}^1/_{60} y^5 f_0^{(\mathrm{V})} - {}^1/_{12} y^4 g_1^{(\mathrm{IV})})' - {}^1/_2\lambda_0^4[{}^1/_6(1+\nu)(1-\nu)^{-1} y^3 f_0'' +$$
$$+{}^1/_2 y^2(1-\nu)^{-1}(f_0' - g_1') - y g_1] - {}^1/_{12} y \lambda_1^4 f_1$$

Потребуем, чтобы функции $f_k(y)$, $g_k(y)$ имели конечный предел при $y\to 0$. Тогда из уравнений (2.5) находим

$$g_k(y) = {}^1/_2(y f_{k-1}' - f_{k-1}) + \int_0^y R_1^{(k+2)}(\eta)\ln(y/\eta)\,d\eta + a_k \tag{2.8}$$

$$a_k = \mathrm{const} \quad (1\leqslant k\leqslant N-2)$$

Подставляя выражения (2.8) для $g_k(y)$ в уравнения (2.6), получаем уравнения для функций $f_k(y)$ вида

$$(y^3 f_0'')'' = \lambda_0^4 y f_0 \tag{2.9}$$

$$(y^3 f_k'')'' = y(\lambda_0^4 f_k + \lambda_k^4 f_0) + G_k(y) \qquad (1\leqslant k\leqslant N-4) \tag{2.10}$$

$$G_k(y) = -6(y\partial_y R_1^{(k+3)} + 2R_2^{(k+4)}) \tag{2.11}$$

При $k\leqslant 2$ находим из (2.7), (2.11):

$$G_1=0,\ G_2(y) = y\lambda_1^4 f_1 - {}^1/_2\lambda_0^4 y a_1 - {}^1/_5\lambda_0^4 y^{-2}(y^5 f_0')' -$$
$$-{}^1/_4\lambda_0^4(1-\nu)^{-1}[{}^1/_3(1+\nu)(y^3 f_0')' - (1-3\nu) y f_0] \tag{2.12}$$

Общее решение уравнения (2.9), регулярное в точке $y=0$, имеет вид

$$f_0(y) = [\alpha_0 J_1(2\lambda_0\sqrt{y}) + \beta_0 I_1(2\lambda_0\sqrt{y})]/\sqrt{y} \tag{2.13}$$

где α_0 и β_0 — произвольные константы, $J_n(t)$ — функции Бесселя, $I_n(t)$ — модифицированные функции Бесселя.

Из уравнения (2.10) при $k=1$ находим

$$f_1(y) = [\alpha_1 J_1(2\lambda_0\sqrt{y}) + \beta_1 I_1(2\lambda_0\sqrt{y})]/\sqrt{y} +$$
$$+{}^1/_2\lambda_1^4\lambda_0^{-3}[\alpha_0 J_0(2\lambda_0\sqrt{y}) + \beta_0 I_0(2\lambda_0\sqrt{y})] \tag{2.14}$$

Функции $g_1(y)$ и $g_2(y)$ определяем из формулы (2.8):

$$g_k(y) = {}^1/_2(y f_{k-1}' - f_{k-1}) + a_k \qquad (k=1,2) \tag{2.15}$$

Аналогично могут быть найдены регулярные в нуле функции $f_k(y)$, $g_{k+1}(y)$ при $k\geqslant 2$ с точностью до констант α_k, β_k, a_{k+1}.

3. Асимптотика погранслойного решения. Вектор-функция $\mathrm{w}(\xi, z, \varepsilon)$ является асимптотическим решением в области $S_0=\{-\varepsilon^{-1}<\xi<0,\ 0<z<1+$

$+\varepsilon\xi\}$ следующей краевой задачи:

$$(\mathbf{L}(\partial_\xi, \partial_z)+\varepsilon^2\mu)\mathbf{w}=0 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{M}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}|_{z=0}=0, \quad [\mathbf{M}(\partial_\xi, \partial_z)-\varepsilon\mathbf{N}(\partial_\xi, \partial_z)]\mathbf{w}|_{z=1+\varepsilon\xi}=0 \tag{3.2}$$

Краевые условия на торце клина в случае задач 1 и 2 имеют вид

$$\mathbf{w}(0, z, \varepsilon)=-\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\mathbf{v}^{(n)}(1, z) \tag{3.3}$$

$$\mathbf{N}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}|_{\xi=0}=-\boldsymbol{\varphi}(z, \varepsilon), \qquad \boldsymbol{\varphi}(z, \varepsilon)=\sum_{k=m}^{N}\varepsilon^k\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(z)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(z)=(\mathbf{N}_0\partial_z\mathbf{v}^{(k)}+\mathbf{N}_1\partial_y\mathbf{v}^{(k-1)})_{y=1} \tag{3.4}$$

Потребуем также, чтобы функция $\mathbf{w}(\xi, z, \varepsilon)$ экспоненциально убывала при удалении от края $\xi=0$.

Граничные условия (3.2) представим в виде разложения в ряд Тейлора по переменной z в точке $z=1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon\xi)^n}{n!}\partial_z{}^n[\mathbf{M}(\partial_\xi, \partial_z)-\varepsilon\mathbf{N}(\partial_\xi, \partial_z)]\mathbf{w}|_{z=1}=0 \tag{3.5}$$

Подстановка разложений (1.3) для $\mathbf{w}$ и μ в формулы (3.1)–(3.3), (3.5) и группировка членов при одинаковых степенях ε приводит к краевым задачам для определения функций $\mathbf{w}^{(k)}(\xi, z)$ $(0\leqslant k\leqslant N-m)$ в полуполосе $\Omega=\{(\xi, z)\colon \xi<0, 0<z<1\}$:

$$\mathbf{L}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}^{(k)}=-\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-4}\mathbf{w}^{(n)} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{M}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}^{(k)}|_{z=0}=0, \quad \mathbf{M}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}^{(k)}|_{z=1}=\mathbf{S}^{(k)}(\xi)$$

$$\mathbf{S}^{(k)}(\xi)=\Big\{\mathbf{N}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}^{(k-1)}-\sum_{n=1}^{k}\frac{\xi^n}{n!}\partial_z{}^n[\mathbf{M}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}^{(k-n)}-$$

$$-\mathbf{N}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}^{(k-n-1)}]\Big\}_{z=1}$$

с граничными условиями на торце $\xi=0$ (задача 1):

$$\mathbf{w}^{(k)}(0, z)=-\mathbf{v}^{(k+m)}(1, z) \tag{3.7}$$

или (задача 2):

$$\mathbf{N}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}^{(k)}|_{\xi=0}=-\boldsymbol{\varphi}^{(k+m)}(z) \tag{3.8}$$

Кроме того, потребуем выполнения условий

$$\lim_{\xi\to-\infty}\mathbf{w}^{(k)}(\xi, z)=0 \tag{3.9}$$

В случае задачи 1 наложим граничные условия на функции f_0, f_1, g_1:

$$f_0(1)=f_0'(1)=0, \quad f_1(1)=g_1(1)=0 \tag{3.10}$$

тогда $a_1=0$, $\mathbf{v}^{(0)}(1, z)=\mathbf{v}^{(1)}(1, z)=0$ и в разложении (1.3) можно положить $m=2$. Согласно [2, 5], условия экспоненциального затухания решений $\mathbf{w}^{(k)}(\xi, z)$ задач (3.6), (3.7) имеют вид

$$\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-4}\iint_{\Omega}\mathbf{w}^{(n)}(\xi, z)\chi^{(i)}(\xi, z)\,d\xi\,dz+\int_{-\infty}^{0}\mathbf{S}^{(k)}(\xi)\chi^{(i)}(\xi, 1)\,d\xi+ \tag{3.11}$$

$$+\int_0^1 \mathbf{v}^{(k+2)}(1,z)\mathbf{N}(\partial_\xi,\partial_z)\chi^{(i)}|_{\xi=0}\,dz=0 \qquad (i=1,2,3;\ k=0,1,\ldots,N-2)$$

где функции $\chi^{(i)}(\xi, z)$ однозначно определены как решения следующих задач (δ_{nm} — символ Кронекера):

$$\mathbf{L}(\partial_\xi,\partial_z)\chi^{(i)}=0,\quad |\chi^{(i)}(\xi,z)|\leqslant c_i|\xi|^3$$

$$\mathbf{M}(\partial_\xi,\partial_z)\chi^{(i)}|_{z=0;1}=0,\qquad \chi^{(i)}(0,z)=0,\qquad \int_0^1 \eta^{(j)}\mathbf{N}(\partial_\xi,\partial_z)\chi^{(i)}\,dz|_{\xi=0}=\delta_{ij}$$

$$\eta^{(1)}=(1,0);\ \eta^{(2)}=(0,1);\ \eta^{(3)}=(-z,\xi)$$

Перепишем формулы (2.4) в виде $v_1^{(k)}(y,z)=g_k(y)-zf'_{k-1}(y)+q_1^{(k)}(y,z)$, $v_2^{(k)}(y,z)=f_k(y)+q_2^{(k)}(y,z)$.

Подстановка этих выражений в (3.11) приводит к граничным условиям для функций $f_{k+1}(y)$, $f_{k+2}(y)$, $g_{k+2}(y)$ $(0\leqslant k\leqslant N-2)$:

$$g_{k+2}(1)=-A_k^{(1)},\qquad f_{k+2}(1)=-A_k^{(2)},\qquad f'_{k+1}(1)=-A_k^{(3)} \tag{3.12}$$

$$A_k^{(i)}=\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-4}\iint_\Omega \mathbf{w}^{(n)}(\xi,z)\chi^{(i)}(\xi,z)\,d\xi\,dz+$$

$$+\int_{-\infty}^0 \mathbf{S}^{(k)}(\xi)\chi^{(i)}(\xi,1)\,d\xi+\int_0^1 \mathbf{q}^{(k+2)}(1,z)\mathbf{N}(\partial_\xi,\partial_z)\chi^{(i)}|_{\xi=0}\,dz \qquad (i=1,2,3)$$

В случае задачи 2 потребуем выполнения условий

$$f_0''(1)=f_0'''(1)=f_1''(1)=0 \tag{3.13}$$

тогда $\varphi^{(k)}(z)=0$ при $k\leqslant 3$ и в разложении (1.3) можно положить $m=4$.

Условия разрешимости задачи (3.6), (3.8), (3.9) имеют вид [6]:

$$\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-4}\iint_\Omega \mathbf{w}^{(n)}(\xi,z)\eta^{(i)}(\xi,z)\,d\xi\,dz+$$

$$+\int_{-\infty}^0 \mathbf{S}^{(k)}(\xi)\eta^{(i)}(\xi,1)\,d\xi-\int_0^1 \varphi^{(k+4)}(z)\eta^{(i)}(0,z)\,dz=0 \tag{3.14}$$

$$(i=1,2,3;\ k=0,1,\ldots,N-4)$$

Из формул (2.4), (2.8), (3.4) получаем выражения для $\varphi^{(k)}(z)$:

$$\varphi_1^{(k)}(z)=c[(1-2z)f''_{k-2}(1)-{}^1/_{12}\lambda_0^4 a_{k-3}+\Phi_1^{(k)}(z)] \tag{3.15}$$

$$\varphi_2^{(k)}(z)=c[(z^2-z)f'''_{k-3}(1)-zf''_{k-3}(1)+\Phi_2^{(k)}(z)] \qquad (k=4,5,\ldots,N)$$

$$\Phi_1^{(4)}(z)=\frac{\lambda_0^4}{12}\left\{\int_0^1 yf_0(y)\,dy+f_0(1)\left[8z^3-12z^2-\frac{2\nu z-2+\nu}{1-\nu}\right]\right\},\qquad \Phi_2^{(4)}=0$$

$$\Phi_2^{(5)}(z)=\frac{\lambda_0^4 z}{12}\left\{\int_0^1 yf_0(y)\,dy-a_1+f_0'(1)\left[-2z^3+4z^2+\frac{z-3+2\nu}{1-\nu}\right]+\right.$$

$$\left.+f_0(1)\left[16z^3-20z^2+\frac{2-3\nu}{1-\nu}\right]\right\}$$

Подстановка выражений (3.15) в условия (3.14) приводит к граничным условиям

$$f_{k+1}'''(1)+3f_{k+1}''(1)=-B_k^{(2)}, \quad f_{k+2}''(1)+{}^1/_4\lambda_0^4 a_{k+1}=B_k^{(3)} \tag{3.16}$$

$$a_{k+1}=-2\lambda_0^{-4}B_k^{(1)}$$

$$B_k^{(i)}=6c^{-1}\left[-c\int_0^1 \Phi^{(k+4)}(z)\eta^{(i)}(0,z)\,dz+\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-4}\iint_\Omega \mathbf{w}^{(n)}(\xi,z)\eta^{(i)}(\xi,z)\,d\xi\,dz+$$

$$\left.+\int_{-\infty}^0 \mathbf{S}^{(k)}(\xi)\eta^{(i)}(\xi,1)\,d\xi\right] \quad (i=1,2,3;\ k=0,1,\ldots,N-4)$$

Из (3.16), в частности, получаем

$$a_1=\int_0^1 yf_0(y)\,dy, \quad a_2=\int_0^1 yf_1(y)\,dy, \quad f_1'''(1)=0$$

$$f_2''(1)={}^1/_{60}(7\nu-12)(1-\nu)^{-1}\lambda_0^4 f_0(1)$$

$$f_2'''(1)=\lambda_0^4[{}^1/_{60}(12\nu-17)(1-\nu)^{-1}f_0'(1)+{}^1/_5 f_0(1)]$$

4. Асимптотика собственных частот колебаний. Подставим выражения (2.13) для $f_0(y)$ в граничные условия (3.10), (3.13) задач 1, 2 соответственно. Условия существования нетривиального решения $f_0(y)$ имеют вид

$$J_1(2\lambda_0)I_0(2\lambda_0)=I_1(2\lambda_0)J_0(2\lambda_0), \quad J_2(2\lambda_0)I_3(2\lambda_0)=I_2(2\lambda_0)J_3(2\lambda_0) \tag{4.1}$$

Первые пять положительных корней λ_0 уравнений (4.1) приведены ниже

2,305	3,900	5,479	7,054	8,628
3,572	5,268	6,897	8,503	10,096

Наложим на функции $f_k(y)$ дополнительные условия ортогональности

$$\int_0^1 yf_0(y)f_k(y)\,dy=\delta_{0k} \quad (k=0,1,\ldots,N-4) \tag{4.2}$$

Из (2.13), (4.2) находим выражение для $f_0(y)$ с точностью до знака для задач 1 и 2 соответственно

$$f_0(y)=[J_1(2\lambda_0\sqrt{y})/J_1(2\lambda_0)-I_1(2\lambda_0\sqrt{y})/I_1(2\lambda_0)]/\sqrt{2y} \tag{4.3}$$

$$f_0(y)=[J_1(2\lambda_0\sqrt{y})/J_3(2\lambda_0)-I_1(2\lambda_0\sqrt{y})/I_3(2\lambda_0)]/\sqrt{2y}$$

Функции $f_k(y)$ при $1\leqslant k\leqslant N-4$ однозначно определены уравнениями (2.10) с граничными условиями при $y=1$ вида (3.12) или (3.16), условием (4.2) и условиями регулярности при $y=0$. Домножив уравнение (2.10) на $f_0(y)$ и интегрируя по y от нуля до единицы, получаем с использованием формул (3.12), (3.16), (4.2):

$$\lambda_k^4=D_k-\int_0^1 G_k(y)f_0(y)\,dy \tag{4.4}$$

где D_k в случае задач 1, 2 имеет вид

$$D_k=-A_{k-1}^{(3)}f_0''(1)+A_{k-2}^{(2)}[f_0'''(1)+3f_0''(1)]$$

$$D_k=-B_{k-1}^{(2)}f_0(1)-f_0'(1)[{}^1/_2 B_{k-2}^{(1)}+B_{k-2}^{(3)}]$$

В частности, в случае задачи 2 при $k=1,2$ находим

$$\lambda_1=0, \quad a_1=0, \quad \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^4 = -\frac{17-7\nu}{60(1-\nu)}\int_0^1 y^3 (f_0')^2 dy -$$

$$-\frac{4+\nu}{20(1-\nu)} f_0^2(1) + \frac{6-\nu}{30(1-\nu)} f_0(1) f_0'(1) - \frac{13-23\nu}{20(1-\nu)}.$$

Полученные таким образом значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ вносят поправки к собственным частотам колебаний клина, подсчитанным по классической теории.

В заключение автор благодарит профессора В. В. Кучеренко за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 668—686.
2. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ. 1983. 117 с.
3. *Кучеренко В. В., Попов В. А.* Асимптотика решений задач теории упругости в тонких областях.— Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 1, с. 58—61.
4. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
5. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Об условиях затухания и предельном поведении на бесконечности решений системы уравнений теории упругости.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 3, с. 550—553.
6. *Гусейн-Заде М. И.* О плоской задаче теории упругости для полуполосы.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 1, с. 124—133.

Москва

Поступила в редакцию
21.II.1985