МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.3

УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОСТИ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

КЛИМОВА Д. Н., ОГУРЦОВ К. И.

При решении практических задач в ряде случаев деформируемую среду считают приближенно несжимаемой. Такая среда характеризуется довольно большим значением модуля объемного расширения и значением коэффициента Пуассона, близким к 0,5.

Несжимаемую твердую среду не всегда можно отождествлять с несжимаемой жидкостью. В различных условиях в обеих средах может быть допустимо или недопустимо пренебрегать, например, вязкостью. Однако только несжимаемая твердая среда может также характеризоваться и некоторым ненулевым значением модуля сдвига. Различие динамических полей в жидкости и твердой среде наглядно представляют простейшие решения, соответствующие точечным источникам в безграничной среде [1]. Сопоставление теоретических исследований с практическими данными удобно осуществлять на простейших задачах для полупространства.

Модель несжимаемой среды в применении к кратерообразованию при контактном нормальном воздействии должна учитывать краевые эффекты, связанные с вихревой частью точного решения задачи для полупространства. В такой среде, как и в сжимаемой, характерный «султан» конусообразного выброса в начальные моменты времени создается быстро затухающим волновым полем, обусловленным математически второстепенными корнями уравнения Релея. Оно распространяется в два раза быстрее известных в сейсмике медленно затухающих поверхностных волн.

1. Для упрощенного описания движения среды в процессе образования кратера в случае нормального удара или взрыва на границе массива в некоторых работах считалось допустимым применять модель несжимаемости [2, 3]. При этом радиальную составляющую скорости смещений V_R полагали приближенно убывающей степенной функцией только расстояния R от источника $V_R \sim R^{-Z}$, хотя воздействие не является полярно-симметричным. Тангенциальную составляющую V_θ определяли из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{V}=0$. По этим составляющим скоростей определяли линии тока — траектории движения частиц. Значение Z выбирали таким образом, чтобы получались траектории, наилучшим образом отражающие наблюдаемый процесс кратерообразования.

По изложенным в [3] результатам наблюдений представляется правдоподобным, что относительная несжимаемость среды в окрестности источника создается ударной волной на ранней стадии, когда смещения частиц еще малы. Дальнейшее движение совершается по инерции за счет переданной кинетической энергии, основное действие которой, очевидно, по-прежнему направлено по нормали к границе. Поскольку в общем случае движение такой среды обладает прочностными свойствами [3], ее можно считать в первом приближении идеально упругой с конечным значением модуля сдвига. Отсюда следует возможность описывать вторую стадию кратерообразования решением задачи Лэмба для несжимаемого полупространства.

2. Горизонтальная и вертикальная составляющие вектора смещений в решении задачи Лэмба выражаются в виде суммы двух слагаемых [4]:

$$u=u_1+u_2,\quad w=w_1+w_2 \tag{2.1}$$

представляющих соответственно продольные и поперечные волны. Переход к несжимаемой среде осуществляется стремлением к бесконечности скорости распространения продольных волн. При этом в случае плоской задачи для сосредоточенного импульсного воздействия оказывается (с точностью до размерного множителя):

$$u_1=(\pi\rho t)^{-1}b^{-2}\operatorname{Re} ig(\zeta)q^{-1}(\zeta)|_{\zeta=\zeta_1},\ w_1=(\pi\rho t)^{-1}b^{-2}\operatorname{Re} g(\zeta)q^{-1}(\zeta)|_{\zeta=\zeta_1}$$

$$\zeta_1=(z+ix)/bt,\ g(\zeta)=2+\zeta^2,\ \beta=1+\zeta^2,\ q(\zeta)=g^2(\zeta)-4\beta^{1/2} \qquad (2.2)$$

Вторые слагаемые в (2.1) определяются по формулам

$$u_2=-(\pi\rho b)^{-1}\operatorname{Re} 2i\beta l^{-1/2}q^{-1}(\zeta)|_{\zeta=\zeta_2},\ w_2=-(\pi\rho b)^{-1}\operatorname{Re} 2\beta l^{-1/2}q^{-1}(\zeta)|_{\zeta=\zeta_2}$$

$$\zeta_2=(ibtx+zl^{1/2})l^{-2} \qquad (2.3)$$

Здесь ρ — плотность, b — скорость распространения поперечных волн, t — время, $l=b^2t^2-R^2$, а корни из отрицательных величин следует считать положительными мнимыми. Продольные волны (2.2) отличны от нуля во всем полупространстве $z\geqslant0$, а поперечные (2.3) — лишь в слое $0\leqslant z\leqslant\leqslant bt$, толщина которого при значениях t, близких к нулю, может быть сколь угодно мала.

Если при малых значениях t пренебречь поперечными волнами (2.3), то все поле смещений (2.1) в полупространстве будет оцениваться формулами (2.2) при больших значениях ζ_1, в которые не входит модуль сдвига $\mu=b^2\rho$:

$$u_1\approx t\sin 2\theta/(\pi\rho R^2),\ w_1\approx t\cos 2\theta/(\pi\rho R^2)$$

$$R=\sqrt{x^2+z^2},\ \theta=\arcsin(x/R) \qquad (2.4)$$

Определив по (2.4) начальные скорости смещений и выразив их в полярных координатах R, θ, получим

$$V_R=\cos\theta/(\pi\rho R^2),\ V_\theta=\sin\theta/(\pi\rho R^2) \qquad (2.5)$$

Обозначая точки линий тока координатами R_1, θ_1, согласно (2.5) найдем

$$R_1=R(\sin\theta_1/\sin\theta) \qquad (2.6)$$

3. Решение пространственной задачи Лэмба выражается только в интегральной форме [4]. Определив производные по t от смещений при импульсном воздействии и полагая $t=0$, получим в случае несжимаемой среды для продольных волн следующие начальные скорости радиально-горизонтальных и вертикальных смещений:

$$V_{r,z}=\frac{1}{4\pi^2\rho i}\int_0^\infty\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\zeta g(\zeta)k^2\exp(-kz)q^{-1}(\zeta)J_\nu(kr)\,d\zeta\,dk$$

$$\nu=0,\ 1,\quad r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (3.1)$$

где $J_\nu(kr)$ — функция Бесселя первого рода.

Заменяя контур $\sigma-i\infty$, $\sigma+i\infty$ $(\sigma>0)$ бесконечно большой полуокружностью в правой полуплоскости и вычисляя интегралы (3.1), найдем

$$V_r=3\sin\theta\cos\theta/(4\pi\rho R^3)$$

$$V_z=(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)/(4\pi\rho R^3)$$

$$R=\sqrt{x^2+z^2},\ \theta=\arcsin(r/R) \qquad (3.2)$$

В полярной системе координат скорости (3.2) представляются в виде

$$V_R=2\cos\theta/(4\pi\rho R^3),\ V_\theta=\sin\theta/(4\pi\rho R^3) \qquad (3.3)$$

Эти формулы отличаются от (2.5) дополнительными множителями, $4R$ в знаменателе и 2 в числителе, у первого равенства.

Линии тока с координатами R_1, θ_1 согласно этим формулам определяются равенством

$$R_1=R(\sin\theta_1/\sin\theta)^2 \qquad (3.4)$$

4. Эмпирические формулы [2, 3] не совпадают с (3.3), но выражают убывание скоростей смещений в зависимости от расстояния в виде степенной функции R^{-Z} при Z, близких к трем (например, в случае мокрого песка). Линии тока (3.4) в удаленных от границы точках тоже близки к эмпирическим, выражающим быстрое образование полусферической воронки и более медленное расширение ее в горизонтальном направлении. В поверхностном слое эти линии существенно отличаются от эмпирических. Они пересекают границу $z=0$ под прямым углом и не могут обосновать выброс с появлением характерного «султана», напоминающего перевернутый усеченный конус. Приходится привлекать точные расчеты [5—8], учитывающие и поперечные волны. Они обнаруживают на границе между сферическими фронтами заметное волновое поле, интенсивность и расположение которого зависят от значений второстепенных корней Релея в расчетных формулах. При больших значениях коэффициента Пуассона это поле располагается на расстоянии $r\approx 2bt$ от источника. При малых значениях — примыкает к фронту продольной волны. По мере удаления от источника оно быстро затухает и расплывается, вблизи — довольно велико в сжимаемой и несжимаемой средах как в вертикальной, так и в горизонтальной составляющих. При значениях коэффициента Пуассона 0,47 эти составляющие, как показывают расчеты [5], оказываются одинакового порядка. Других полей, которые могли бы привести к образованию султана, точные расчеты не предсказывают. Известные в сейсмике медленно затухающие с расстоянием поверхностные волны Релея распространяются в два раза медленнее и характеризуются первоначальным движением частиц вверх и назад на источник. Их влияние, возможно, проявляется после того, как значительная часть массива уже успела в какой-то степени сместиться, хотя реальная длительность воздействия, по-видимому, такова, что большая часть этих полей интерферирует вблизи источника.

5. Согласно рисункам работы [3], отражающим экспериментальные данные, контактный взрыв на воде приводит к полю скоростей, похожему на поле скоростей в твердых деформируемых средах. Решение задачи Лэмба для жидкого полупространства можно получить из прежних формул, устремляя скорость распространения поперечных волн к нулю. При этом поперечные волны исчезают. Описанные же выше главные части волновых полей стягиваются в начало координат. Получающееся точное решение задачи приводит к нулевым значениям горизонтальных смещений, что кажется противоречащим экспериментальным данным. Чтобы разобраться в этом, откажемся от математической абстракции — точечного воздействия на среду, не сопротивляющуюся сдвигу. Но ради простоты математического анализа рассмотрим решение плоской задачи Лэмба для колоколообразно распределенного единичного импульса давления — $\delta(t)\varepsilon[\pi(\varepsilon^2+x^2)]^{-1}$ ($x=\varepsilon$ — точка перегиба), который при $\varepsilon\to 0$ переходит в сосредоточенный. Если в этом решении перейти к пределу $b\to 0$, то поперечные волны исчезнут. Оставшаяся часть решения определяет смещения в жидкой среде и представляется в следующей компактной форме:

$$u_1=-(a^2t^2-z^2)/(\pi\rho a)^{-1}\,\mathrm{Im}\,(\Phi/\sqrt{m}\Psi)$$

$$w_1=(\pi\rho a)^{-1}\,\mathrm{Re}\,(\Phi^2/\Psi)$$

$$\Phi=z(\varepsilon+ix)+at\sqrt{m},\quad \Psi=[at(\varepsilon+ix)+z\sqrt{m}]^2 \tag{5.1}$$

$$m=a^2t^2-z^2-x^2+2ix\varepsilon+\varepsilon^2$$

Равенство $m=0$ при $\varepsilon=0$ определяет цилиндрический фронт от сосредоточенного воздействия.

Устремляя в (5.1) скорость распространения продольных волн a к бесконечности, получим для несжимаемой жидкости

$$u_1=2tx(\varepsilon+z)/(\pi\rho n) \tag{5.2}$$

$$w_1=t[(\varepsilon+z)^2-x^2/(\pi\rho n)],\qquad n=[(\varepsilon+z)^2+x^2]^2$$

На границе $z=0$ формулы (5.2) представляют следующие скорости смещений:

$$u_1^{\bullet}=2x\varepsilon/\pi\rho(\varepsilon^2+x^2)^2$$

$$w_1^{\bullet}=(\varepsilon^2-x^2)/\pi\rho(\varepsilon^2+x^2)^2 \tag{5.3}$$

Формулы (5.3) показывают, что горизонтальные скорости имеют экстремумы при $x=0$ и $x=\varepsilon/\sqrt{3}$, равные нулю и $\approx 0{,}65(\pi\rho\varepsilon^2)^{-1}$. Вертикальные скорости имеют экстремумы при $x=0$ и $x=\sqrt{3}\varepsilon$, равные $(\pi\rho\varepsilon^2)^{-1}$ и $-0{,}125(\pi\rho\varepsilon^2)^{-1}$; в точке $x=\varepsilon$ они равны нулю. В точках $x=(\sqrt{2}-1)\varepsilon$ и $x=(\sqrt{2}+1)\varepsilon$ вектор скорости направлен вниз и вверх соответственно под углом 45° к оси x. В случае нормальной вертикальной скорости в точке $x=\sqrt{3}\varepsilon$ он направлен под углом 30° к оси x. При больших значениях x вертикальные скорости на порядок больше горизонтальных. Анализируя эти данные, полезно иметь в виду, что, например, в интервалах $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $(-5\varepsilon, 5\varepsilon)$ и $(-10\varepsilon, 10\varepsilon)$ распределения приложенного к границе импульса в зависимости от x содержится соответственно 50, 88 и 94% его величины. Характер распределения скоростей вблизи источника, как видно, существенно зависит от распределения самого источника.

В случае пространственной задачи при распределении источника по закону $2\pi\varepsilon/(\varepsilon^2+r^2)^{-3/2}$ подобные формулы для начальных скоростей получаются заменой в (3.1) z на $(z+\varepsilon)$.

Если источник распределен по ограниченной области, то вне этой области в обоих случаях горизонтальные скорости поверхностных точек равны нулю. Без учета вихревого движения появление султана в жидкой среде, по-видимому, невозможно.

В случае включения движущегося с постоянной скоростью V источника $\sigma_z=-H(t)\varepsilon\{\pi[\varepsilon^2+(x-Vt)^2]\}$, $\tau_{xz}=0$ на границе полупространства $z\geqslant 0$ скорости смещений в точках этой границы согласно формулам (2.2) из [9] [1] при $a=\infty$ представляются в виде

$$u_1^{\bullet}=t(\pi\rho)^{-1}\,\mathrm{Re}\,(i\zeta^2(g-2\beta)/\xi\eta(g^2-4\beta)\,|_{\zeta=\xi(bt)^{-1}}$$

$$w^{\bullet}=t(\pi\rho)^{-1}\,\mathrm{Re}\,(\zeta^4/\xi\eta(g^2-4\beta))\,|_{\zeta=\xi(bt)^{-1}}$$

$$\xi=\varepsilon+ix,\ \eta=\varepsilon+i(x-Vt)$$

Производя предельный переход $b\to 0$, получим для несжимаемой жидкости

$$u^{\bullet}=\frac{t\varepsilon(2x-Vt)}{\pi\rho(\varepsilon^2+x^2)[\varepsilon^2+(x-Vt)^2]}$$

$$w^{\bullet}=\frac{t[\varepsilon^2-x(x-Vt)]}{\pi\rho(\varepsilon^2+x^2)[\varepsilon^2+(x-Vt)^2]}$$

При $V=0$ эти формулы соответствуют полям скоростей, возникающим от включения недвижущегося единичного распределенного источника типа простой силы.

В заключение заметим, что нетрудно провести аналогичный анализ строгих решений и в случае других простых задач, таких, как решение для вязкоупругого полупространства, изучение действия малозаглубленного взрыва вблизи свободной от напряжений поверхности и других. При внедрении в массив инородного тела значительных размеров, возможно, следует учитывать не только нормальное, но и радиально-горизонтальное воздействие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В. И.* О сингулярных решениях волнового уравнения и уравнений упругости.— Тр. Сейсм. ин-та. АН СССР, 1936, № 78. 30 с.
2. *Maxwell D. E.* Simple Z model cratering, ejection and overturned flap.— In: Impact and Explosion Cratering. N. Y.: Pergamon Press, 1977, p. 1003–1008.

[1] В формуле (2.17) работы [9] следует L, M поменять местами и изменить у первого слагаемого знак на обратный. В числовых данных четвертого столбца табл. 1 и пятого столбца табл. 3 этой работы имеются неточности.

3. *Иванов Б. А.* Механика кратерообразования.— В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М., 1981, т. 14, с. 60—128.
4. *Петрашень Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И.* О задаче Лемба в случае полупространства.— Уч. зап. Ленингр. ун-та, 1950, вып. 21, № 135, с. 71—118.
5. Количественные исследования волновых процессов в упругом полупространстве при различных типах воздействий.— Уч. зап. Ленингр. ун-та, 1956, вып. 30, № 208, с. 142—219.
6. *Броберг К. Б.* Ударные волны в упругой и упругопластической среде/Под редакцией А. Н. Ханукаева. М.: Госгортехиздат, 1959. 116 с.
7. *Mooney H.* Some numerical solutions for Lambes problem.— Bull. Seismol. Amer., 1974, v. 64, No. 2, p. 473—491.
8. *Никифоровский В. С., Шемякин Е. И.* Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979. 271 с.
9. *Именитова Ж. М., Огурцов К. И.* О нестационарном динамическом поле, возбуждаемом источником, движущимся по границе упругой полуплоскости.— Инж. ж. МТТ, 1967, № 3, с. 3—12.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.IV.1984