МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1986

УДК 539.374

О ЗАКОНЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЫ С УПРОЧНЯЮЩИМИСЯ КОМПОНЕНТАМИ

ИСУПОВ Л. П.

Построение математических моделей для описания упругопластического деформирования композитных сред рассмотрено в [1–6]. Одной из фундаментальных проблем механики композитов является предсказание эффективных деформационных характеристик макросреды по известным свойствам компонентов. Большинство работ этого направления, краткий обзор которых дан в [3, 4], относится к среде, один из компонентов которой является идеально пластическим, а второй – упругим или жестким.

В [4, 5] предложен метод построения эффективных определяющих уравнений для среды с идеально пластическими компонентами, изучены свойства предложенной модели, показаны ее возможности для описания деформирования композитов различной структуры. В публикуемой работе этот подход использован при построении определяющих уравнений для композита с упрочняющимися компонентами. Детально исследуется случай пластического состояния обоих компонентов. Определяющие уравнения по форме оказываются совпадающими с законом течения для сингулярной точки поверхности нагружения в пространстве макронапряжений. При этом пластические микродеформации не могут быть исключены из системы уравнений и являются дополнительными параметрами упрочнения. В качестве примеров рассмотрены простая одномерная модель и композит, армированный шаровыми частицами.

1. Рассмотрим композитную среду из двух упругопластических компонентов, так, что для характеристического объема V справедливо $V=V_1+V_2$, $v_i=V_i/V$.

Используем безындексные тензорные обозначения. Греческими малыми буквами обозначим тензоры второго ранга, латинскими большими — тензоры четвертого ранга, а штрихом определим операцию транспонирования: $\boldsymbol\sigma:\boldsymbol\varepsilon=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, $\mathbf{A}:\boldsymbol\sigma=\boldsymbol\sigma:\mathbf{A}'=A_{ijkl}\sigma_{kl}$, $A'_{ijkl}=A_{klij}$.

Примем, что в каждой точке выполнены соотношения

$$\boldsymbol\sigma=v_1\boldsymbol\sigma_{(1)}+v_2\boldsymbol\sigma_{(2)},\quad \boldsymbol\varepsilon=v_1\boldsymbol\varepsilon_{(1)}+v_2\boldsymbol\varepsilon_{(2)} \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol\sigma$ и $\boldsymbol\varepsilon$ — тензоры макронапряжений и макродеформаций, а $\boldsymbol\sigma_{(i)}$ и $\boldsymbol\varepsilon_{(i)}$ $(i=1,2)$ — тензоры микронапряжений и микродеформаций компонентов. Соотношения (1.1) являются точными, если под $\boldsymbol\sigma_{(i)}$ и $\boldsymbol\varepsilon_{(i)}$ понимать средние по характеристическому объему i-го компонента напряжения и деформации [4], что эквивалентно пренебрежению локальной концентрацией напряжений.

В упругом состоянии для компонентов справедлив закон Гука (суммирование по повторяющимся индексам в скобках отсутствует):

$$\boldsymbol\sigma_{(i)}=\mathbf{C}_{(i)}:\boldsymbol\varepsilon_{(i)},\quad \boldsymbol\varepsilon_{(i)}=\mathbf{A}_{(i)}:\boldsymbol\sigma_{(i)},\quad \mathbf{A}_{(i)}=\mathbf{C}_{(i)}^{-1}\quad (i=1,2) \tag{1.2}$$

При пластическом деформировании возникают остаточные микродеформации

$$\boldsymbol\varepsilon_{(i)}^{p}=\boldsymbol\varepsilon_{(i)}-\mathbf{A}_{(i)}:\boldsymbol\sigma_{(i)}\quad (i=1,2) \tag{1.3}$$

Уравнение поверхности нагружения для компонентов запишем в виде

$$f_{(i)}(\boldsymbol\sigma_{(i)},\ \boldsymbol\chi_{(i)},\ \varkappa_{(i)})=0\quad (i=1,2) \tag{1.4}$$

где $\chi_{(i)}$ — тензорный параметр упрочнения, который, в частности, может просто совпадать с тензором пластических деформаций (1.3), $\varkappa_{(i)}$ — скалярный параметр упрочнения. В общем случае поверхность нагружения может зависеть от целого набора тензорных и скалярных параметров упрочнения.

При активном нагружении справедлив ассоциированный закон пластичности

$$\dot{\varepsilon}^p_{(i)}=\lambda_{(i)}\partial f_{(i)}/\partial\sigma_{(i)}, \quad f_{(i)}=0, \quad (\partial f_{(i)}/\partial\sigma_{(i)}):\dot{\sigma}_{(i)}>0 \tag{1.5}$$

Для параметров упрочнения примем

$$\dot{\chi}_{(i)}=\mathbf{G}_{(i)}(\sigma_{(i)},\chi_{(i)},\varkappa_{(i)}):\dot{\varepsilon}^p_{(i)}, \quad \chi_{(i)}=0 \quad \text{при} \quad \varepsilon^p_{(i)}=0$$

$$\dot{\varkappa}_{(i)}=\alpha_{(i)}(\sigma_{(i)},\chi_{(i)},\varkappa_{(i)}):\dot{\varepsilon}^p_{(i)}, \quad \varkappa_{(i)}=0 \text{ при } \varepsilon^p_{(i)}=0 \tag{1.6}$$

где $\mathbf{G}_{(i)}$ — тензор четвертого ранга, $\alpha_{(i)}$ — тензор второго ранга.

Из условия непрерывности изменения поверхности нагружения получим

$$\lambda_{(i)}=-(\partial f_{(i)}/\partial\sigma_{(i)}):\dot{\sigma}_{(i)}/[(\partial f_{(i)}/\partial\chi_{(i)}):\mathbf{G}_{(i)}+(\partial f_{(i)}/\partial\varkappa_{(i)})\alpha_{(i)}]:(\partial f_{(i)}/\partial\sigma_{(i)}) \tag{1.7}$$

При упругом деформировании для композита в целом справедлив закон Гука $\sigma=\mathbf{C}:\varepsilon$, $\varepsilon=\mathbf{A}:\sigma$ с тензором эффективных упругих постоянных $\mathbf{C}=\mathbf{A}^{-1}$. Между напряжениями в компонентах и макронапряжениями существует линейная связь [7]: $\sigma_{(i)}=\mathbf{B}_{(i)}:\sigma$. Определение тензоров концентрации напряжений $\mathbf{B}_{(i)}$ эквивалентно решению задачи о нахождении тензора эффективных упругих постоянных по известным характеристикам компонентов. Если же тензор упругих податливостей композита известен (например, определен экспериментально), то тензоры $\mathbf{B}_{(i)}$ могут быть найдены [4]:

$$\mathbf{B}_{(1)}=(\mathbf{A}_{(1)}-\mathbf{A}_{(2)})^{-1}:(\mathbf{A}-\mathbf{A}_{(2)})/v_1, \quad \mathbf{B}_{(2)}=(\mathbf{A}_{(2)}-\mathbf{A}_{(1)})^{-1}:(\mathbf{A}-\mathbf{A}_{(1)})/v_2 \tag{1.8}$$

Пластическую макродеформацию композита определим соотношением

$$\varepsilon^p=\varepsilon-\mathbf{A}:\sigma \tag{1.9}$$

2. Рассмотрим переход композитной среды к пластическому деформированию. Будем считать, что компонент с индексом 1 переходит первым в пластическое состояние, а с индексом 2 остается упругим. В этом случае справедливо [4] ($\sigma^p_{(i)}$ — остаточные напряжения в компонентах):

$$\varepsilon^p=v_1\mathbf{B}'_{(1)}:\varepsilon^p_{(1)} \tag{2.1}$$

$$\sigma_{(i)}-\sigma^p_{(i)}=\mathbf{B}_{(i)}:\sigma, \quad \sigma^p_{(i)}=\mathbf{C}^p_{(i)}:\varepsilon^p \tag{2.2}$$

$$\mathbf{C}^p_{(1)}=v_2(\mathbf{A}-\mathbf{A}_{(2)})^{-1}:(\mathbf{B}'_{(1)}-\mathbf{B}'_{(2)}), \quad \mathbf{C}^p_{(2)}=-v_1v_2^{-1}\mathbf{C}^p_{(1)}$$

Подставив (2.1), (2.2) в (1.4), (1.6), получим уравнение поверхности нагружения для композита.

$$f_{(1)}(\sigma_{(1)}, \chi_{(1)}, \varkappa_{(1)})=f(\sigma, \varepsilon^p, \chi, \varkappa)=0 \tag{2.3}$$

Параметры нагружения выражаются через макрохарактеристики в виде

$$\dot{\chi}=\mathbf{G}(\sigma, \varepsilon^p, \chi, \varkappa):\dot{\varepsilon}^p, \quad \dot{\varkappa}=\alpha(\sigma, \varepsilon^p, \chi, \varkappa):\dot{\varepsilon}^p$$

$$\mathbf{G}=\mathbf{G}_{(1)}:(\mathbf{B}'_{(1)})^{-1}/v_1, \quad \alpha=\alpha_{(1)}:(\mathbf{B}'_{(1)})^{-1}/v_1 \tag{2.4}$$

Заметим, что $\partial f/\partial\sigma=\mathbf{B}'_{(1)}:(\partial f_{(1)}/\partial\sigma_{(1)})$. Умножая соотношение (1.5) при $i=1$ на $v_1\mathbf{B}'_{(1)}$, получим ассоциированный закон пластичности на макроуровне

$$\dot{\varepsilon}^p=\lambda\partial f/\partial\sigma, \quad f=0, \quad (\partial f/\partial\sigma):\dot{\sigma}>0 \tag{2.5}$$

Коэффициент λ определим из условия непрерывности изменения поверхности нагружения $f^{\boldsymbol\cdot}=0$: $\lambda=-(\partial f/\partial \sigma):\sigma^{\boldsymbol\cdot}/[\partial f/\partial \varepsilon^p+(\partial f/\partial \chi):\mathrm{G}+(\partial f/\partial \varkappa)\alpha]:(\partial f/\partial \sigma)$. Этот же результат можно получить с учетом $\lambda=v_1\lambda_{(1)}$ непосредственно из (1.7), используя (2.2)—(2.4).

3. В частном случае изотропного материала со смешанным упрочнением [8] можно записать уравнение поверхности нагружения для компонентов в виде

$$^1/_2(\boldsymbol{\tau}_{(i)}-\boldsymbol{\chi}_{(i)}):(\boldsymbol{\tau}_{(i)}-\boldsymbol{\chi}_{(i)})=k_{(i)}^2, \quad k_{(i)}^2=k_{0(i)}^2+\varkappa_{(i)} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\chi}_{(i)}=c_{(i)}\mathbf{I}:\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}^p, \quad \varkappa_{(i)}^{\boldsymbol\cdot}=a_{(i)}(\boldsymbol{\tau}_{(i)}-\boldsymbol{\chi}_{(i)}):\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}^{\boldsymbol\cdot p} \tag{3.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}_{(i)}$ — девиатор напряжений, $\mathbf{I}$ — единичный тензор четвертого ранга, $k_{0(i)}$, $a_{(i)}$, $c_{(i)}$ — константы материала. При $a_{(i)}=0$ получаем теорию трансляционного упрочнения, при $c_{(i)}=0$ — изотропного упрочнения.

Связь девиатора и тензора напряжений можно записать при помощи вырожденного тензора перехода четвертого ранга $\boldsymbol{\tau}_{(i)}=\mathbf{P}:\boldsymbol{\sigma}_{(i)}$, $P_{ijkl}=-{}^1/_3\delta_{ij}\delta_{kl}+{}^1/_2(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$, который обладает свойствами $\mathbf{P}'=\mathbf{P}$, $\mathbf{P}:\mathbf{P}=\mathbf{P}$. Отсюда по формулам (2.2) следует

$$\boldsymbol{\tau}_{(i)}=\mathbf{P}:(\mathbf{B}_{(i)}:\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{C}_{(i)}^p:\boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{3.3}$$

Подстановка (3.3) и (2.1) в (3.1), (3.2) при $i=1$ позволяет получить уравнение поверхности нагружения для композита, которое можно записать в виде

$$^1/_2(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\chi}):\mathbf{Q}:(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\chi})=k^2, \quad k^2=k_{0(1)}^2+\varkappa \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{\chi}=\mathbf{G}^0:\boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \mathbf{G}^0=\mathbf{B}_{(1)}^{-1}:(c_{(1)}(\mathbf{B}_{(1)}')^{-1}/v_1-\mathbf{C}_{(1)}^p)$$

$$\varkappa^{\boldsymbol\cdot}=a(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\chi}):\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol\cdot p}, \quad a=a_{(1)}/v_1, \quad \mathbf{Q}=\mathbf{B}_{(1)}':\mathbf{P}:\mathbf{B}_{(1)}$$

С использованием (3.4) в соответствии с (2.5) получим закон пластичности

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol\cdot p}=\lambda\mathbf{Q}:(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\chi}), \quad (\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\chi}):\mathbf{Q}:\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol\cdot}>0$$
$$\lambda=[(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\chi}):\mathbf{Q}:\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol\cdot}]/[(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\chi}):\mathbf{Q}:\mathbf{G}^0:\mathbf{Q}:(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\chi})+2ak^2] \tag{3.5}$$

4. В качестве примера рассмотрим изотропный композит, армированный шаровыми включениями. Индекс (1) будем относить к матрице, а (2) — к включениям.

Для определения тензоров $\mathbf{B}_{(i)}$ используем вариант метода самосогласования [5]:

$$\mathbf{B}_{(1)}=(v_1\mathbf{I}+v_2\mathbf{C}_{(2)}:\mathbf{H}:\mathbf{A}_{(1)})^{-1}, \quad \mathbf{H}=[\mathbf{I}+\mathbf{S}:\mathbf{A}_{(1)}:(\mathbf{C}_{(2)}-\mathbf{C}_{(1)})]^{-1} \tag{4.1}$$

В соотношениях (4.1) $\mathbf{S}$ — тензор упругой трансформации Эшелби [9]. Для шарового включения этот тензор имеет вид ($\nu_{(1)}$ — коэффициент Пуассона матрицы):

$$S_{ijmn}={}^1/_3\gamma\delta_{ij}\delta_{mn}+{}^1/_2\beta(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}) \tag{4.2}$$

$$\gamma={}^1/_5(5\nu_{(1)}-1)/(1-\nu_{(1)}), \quad \beta={}^2/_{15}(4-5\nu_{(1)})/(1-\nu_{(1)})$$

Для изотропных компонентов тензоры упругих постояннных $\mathbf{A}_{(i)}$, $\mathbf{C}_{(i)}$, а следовательно, на основании (4.1) и все тензоры четвертого ранга, входящие в выражения (3.4), являются изотропными тензорами вида, аналогичного (4.2): $T_{ijmn}={}^1/_3t_1\delta_{ij}\delta_{mn}+{}^1/_2t_2(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm})$. Для таких тензоров справедливо

$$\mathbf{T}:\mathbf{P}=\mathbf{P}:\mathbf{T}=t_2\mathbf{P} \tag{4.3}$$

На основании (4.1)—(4.3) после соответствующих преобразований для поверхности нагружения композита получим ($\mu_{(i)}$ — модули сдвига компонентов):

$$^1/_2(\boldsymbol{\tau}-c\boldsymbol{\varepsilon}^p):(\boldsymbol{\tau}-c\boldsymbol{\varepsilon}^p)=\xi^2k^2, \quad k^2=k_{0(1)}^2+\varkappa \tag{4.4}$$

$$\varkappa^{\cdot}=a(\tau-c\varepsilon^p):\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot p},\qquad a=a_{(1)}/v_1,\qquad c=c_0+\xi^2 c_{(1)}/v_1$$

$$c_0=2v_1^{-1}v_2(1-\beta)\mu_{(1)}\mu_{(2)}(v_1\mu_{(1)}+v_2\mu_{(2)}+v_1\beta[\mu])(\mu_{(1)}+\beta[\mu])^{-2}$$

$$\xi=(v_1(\mu_{(1)}+\beta[\mu])+v_2\mu_{(2)})(\mu_{(1)}+\beta[\mu])^{-1},\qquad [\mu]=\mu_{(2)}-\mu_{(1)}$$

Предел упругости композита выше, чем у матрицы при $\xi>1$, что выполнено при $\mu_{(2)}>\mu_{(1)}$. Для абсолютно жестких частиц $\mu_{(2)}\to\infty$ и из (4.4) следует $\xi=v_1+v_2/\beta$, $c_0=2\mu_{(1)}v_1^{-1}v_2(1-\beta)(v_2+v_1\beta)\beta^{-2}$, что дает оценку сверху для предела упругости композита и коэффициента линейного упрочнения.

5. Рассмотрим процесс деформирования, при котором оба компонента находятся в пластическом состоянии. На основе результатов работы [4] для этого случая можем записать

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p=v_1\mathbf{B}'_{(1)}:\boldsymbol{\varepsilon}^p_{(1)}+v_2\mathbf{B}'_{(2)}:\boldsymbol{\varepsilon}^p_{(2)}\tag{5.1}$$

Равенство (5.1) вместе с (1.1), (1.3) и (1.9) дают систему линейных уравнений, решение которой с учетом (1.8) позволяет получить следующую связь микро- и макрохарактеристик:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(i)}-\boldsymbol{\sigma}^p_{(i)}=\mathbf{B}_{(i)}:\boldsymbol{\sigma},\qquad \boldsymbol{\sigma}^p_{(i)}=\mathbf{C}^p_{(i)}:(\boldsymbol{\varepsilon}^p-\boldsymbol{\varepsilon}^p_{(i)})\tag{5.2}$$

$$\mathbf{C}^p_{(i)}=(-1)^i(1-v_i)(\mathbf{A}-\mathbf{A}_{(i)})^{-1}:(\mathbf{B}'_{(2)}-\mathbf{B}'_{(1)})$$

Соотношения (5.1), (5.2) вместе с (1.5), (1.6) образуют полную систему определяющих уравнений для композитной среды при пластическом деформировании обоих компонентов. Если задан путь нагружения $\boldsymbol{\sigma}(t)$, где t — монотонно изменяющийся параметр нагружения, то, проинтегрировав систему (5.1), (5.2), (1.5), (1.6), получим траекторию пластического деформирования $\boldsymbol{\varepsilon}^p(t)$.

Для определения коэффициентов $\lambda_{(i)}$ в ассоциированном законе пластичности (1.5) из условия непрерывности изменения поверхностей нагружения (1.4) получим линейную систему уравнений

$$(\partial f_{(i)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(i)}):\boldsymbol{\sigma}^{\cdot}_{(i)}+(\partial f_{(i)}/\partial\boldsymbol{\chi}_{(i)}):\boldsymbol{\chi}^{\cdot}_{(i)}+(\partial f_{(i)}/\partial\varkappa_{(i)})\varkappa^{\cdot}_{(i)}=0\qquad (i=1,2)\tag{5.3}$$

Подстановка в (5.3) соотношений (1.6), (5.1), (5.2) и решение полученной системы относительно $\lambda_{(i)}$ дает

$$\lambda_{(i)}=\sum_{j=1}^{2}h_{ij}(\partial f_{(j)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(j)}):\mathbf{B}_{(j)}:\boldsymbol{\sigma}^{\cdot}\tag{5.4}$$

где h_{ij} могут рассматриваться как функции упрочнения и определены следующим образом:

$$h_{11}=-a_{22}/d,\qquad h_{12}=a_{12}/d,\qquad h_{21}=a_{21}/d,\qquad h_{22}=-a_{11}/d$$

$$\begin{gathered}d=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\qquad a_{11}=[-v_2(\partial f_{(1)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(1)}):\mathbf{C}^p_{(1)}:\mathbf{B}'_{(2)}+\\+(\partial f_{(1)}/\partial\boldsymbol{\chi}_{(1)}):\mathbf{G}_{(1)}+(\partial f_{(1)}/\partial\varkappa_{(1)})\boldsymbol{\alpha}_{(1)}]:(\partial f_{(1)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(1)})\end{gathered}\tag{5.5}$$

$$a_{12}=v_2(\partial f_{(1)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(1)}):\mathbf{C}^p_{(1)}:\mathbf{B}'_{(2)}:(\partial f_{(2)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(2)})$$

$$a_{21}=v_1(\partial f_{(2)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(2)}):\mathbf{C}^p_{(2)}:\mathbf{B}'_{(1)}:(\partial f_{(1)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(1)})$$

$$\begin{gathered}a_{22}=[-v_1(\partial f_{(2)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(2)}):\mathbf{C}^p_{(2)}:\mathbf{B}'_{(1)}+\\+(\partial f_{(2)}/\partial\boldsymbol{\chi}_{(2)}):G_{(2)}+(\partial f_{(2)}/\partial\varkappa_{(2)})\boldsymbol{\alpha}_{(2)}]:(\partial f_{(2)}/\partial\boldsymbol{\sigma}_{(2)})\end{gathered}$$

Подстановка (5.3) в (1.5) позволяет представить ассоциированный закон пластичности в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot p}_{(i)}=(\partial f_{(i)}/\partial \boldsymbol{\sigma}_{(i)})\sum_{j=1}^{2} h_{ij}(\partial f_{(j)}/\partial \boldsymbol{\sigma}_{(j)}):\mathbf{B}_{(j)}:\boldsymbol{\sigma}^{\cdot} \tag{5.6}$$

$$(\partial f_{(i)}/\partial \boldsymbol{\sigma}_{(i)}):\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(i)}>0 \qquad (i=1,2)$$

Отметим, что из уравнений (5.1), (5.2), (5.6) нельзя в общем случае исключить в силу их неголономности пластические микродеформации $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{(i)}$ (за исключением, например, некоторых случаев одноосного нагружения), т. е. пластическое деформирование композита нельзя описать в терминах только макрохарактеристик. В определяющие уравнения должны входить параметры, описывающие историю пластического деформирования на микроуровне. Аналогичный результат был получен в [6] для среды с периодической регулярной структурой.

Полученный закон пластичности для композита можно представить в традиционной форме в пространстве макронапряжений. Введем аналогично (2.3) макроповерхности нагружения

$$f_{(i)}(\mathbf{B}_{(i)}:\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^{p}_{(i)},\chi_{(i)},\varkappa_{(i)})=f^{*}_{(i)}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},\boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{(i)},\chi_{(i)},\varkappa_{(i)}) \tag{5.7}$$

$$(\partial f^{*}_{(i)}/\partial \boldsymbol{\sigma})=(\partial f_{(i)}/\partial \boldsymbol{\sigma}_{(i)}):(\partial \boldsymbol{\sigma}_{(i)}/\partial \boldsymbol{\sigma})=\mathbf{B}'_{(i)}:(\partial f_{(i)}/\partial \boldsymbol{\sigma}_{(i)})$$

Продифференцировав (5.1) по параметру нагружения и использовав (1.5), (5.7), получим при активном нагружении

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot p}=\sum_{i=1}^{2} v_i\lambda_{(i)}\,\partial f^{*}_{(i)}/\partial \boldsymbol{\sigma} \tag{5.8}$$

Соотношения (5.8) представляют собой ассоциированный закон течения с сингулярной поверхностью нагружения [10]. При этом конус полного активного нагружения в пространстве макронапряжений в общем случае не совпадает с задаваемым неравенствами $(\partial f^{*}_{(i)}/\partial \boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}^{\cdot}>0$ $(i=1, 2)$ конусом касательных в сингулярной точке поверхности, а должен быть определен из условий $\lambda_{(i)}>0$ $(i=1, 2)$.

Последовательно проводя эту точку зрения, нужно рассматривать $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{(i)}$ как дополнительные параметры упрочнения. Уравнения (5.6) представляют собой уравнения эволюции этих параметров в процессе нагружения и могут быть представлены в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot p}_{(i)}=(\partial f^{*}_{(i)}/\partial \boldsymbol{\sigma}):\mathbf{B}^{-1}_{(i)}\sum_{j=1}^{2} h_{ij}(\partial f^{*}_{(j)}/\partial \boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}^{\cdot}$$

где функции упрочнения h_{ij} при помощи (5.5) также могут быть выражены через $f^{*}_{(i)}$. Для входящих в (5.7) параметров упрочнения $\chi_{(i)}$ и $\varkappa_{(i)}$ по-прежнему справедливы уравнения (1.6).

6. Проиллюстрируем полученные результаты на простейшей одномерной модели композита с совместным деформированием компонентов: $\varepsilon_{(1)}=\varepsilon_{(2)}=\varepsilon$, $\sigma=v_1\sigma_{(1)}+v_2\sigma_{(2)}$. Во всех соотношениях вместо тензоров четвертого ранга будут фигурировать просто константы.

Первый случай — упругое состояние: $\sigma_{(i)}=E_{(i)}\varepsilon$ $(i=1, 2)$, $\sigma=E\varepsilon$, $E=v_1E_{(1)}+v_2E_{(2)}$. Исходя из (1.8), получим $\sigma_{(i)}=B_{(i)}\sigma$, $B_{(i)}=E_{(i)}/E$ $(i=1, 2)$.

Второй случай — первый компонент в пластическом состоянии, а второй — в упругом. Для материала со смешанным упрочнением (3.1), (3.2) в одномерном случае имеем

$$^1/_2(\sigma_{(i)}-\chi_{(i)})^2=k^2_{(i)}, \quad k^2_{(i)}=k^2_{0(i)}+\varkappa_{(i)} \tag{6.1}$$

$$\chi_{(i)}=c_{(i)}\varepsilon^p_{(i)}, \quad \dot\varkappa_{(i)}=a_{(i)}(\sigma_{(i)}-\chi_{(i)})\dot\varepsilon^p_{(i)}$$

При активном нагружении $\dot\varepsilon^p_{(i)}=\dot\sigma_{(i)}/(a_{(i)}+c_{(i)})$. Вследствие (2.2) $\sigma_{(1)}=B_{(1)}\sigma+C^p_{(1)}\varepsilon^p$, $C^p_{(1)}=-v_2E_{(2)}/v_1$. Для композита по формулам (3.4), (3.5) получим

$$^1/_2Q(\sigma-\chi)^2=k^2, \quad k^2=k^2_{0(1)}+\varkappa, \quad Q=B^2_{(1)}, \quad \chi=G^0\varepsilon^p$$

$$G^0=E^{-2}_{(1)}E(c_{(1)}E/v_1+v_2E_{(1)}E_{(2)}/v_1), \quad \dot\varkappa=a_{(1)}(\sigma-\chi)\dot\varepsilon^p/v_1$$

$$\dot\varepsilon^p=v_1\dot\sigma(E_{(1)}/E)^2(a_{(1)}+c_{(1)}+v_2E_{(1)}E_{(2)}/E)^{-1}$$

Третий случай — оба компонента деформируются пластически. Используя (5.1), (5.2), можем записать

$$\varepsilon^p=v_1B_{(1)}\varepsilon^p_{(1)}+v_2B_{(2)}\varepsilon^p_{(2)} \tag{6.2}$$

$$\sigma_{(i)}=B_{(i)}\sigma+C^p_{(i)}(\varepsilon^p-\varepsilon^p_{(i)}), \quad C^p_{(i)}=E_{(i)} \quad (i=1,2).$$

Вычислив (5.5) для поверхностей нагружения (6.1), получим уравнения (5.6) в виде

$$\dot\varepsilon^p_{(1)}=\dot\sigma E_{(1)}(a_{(2)}+c_{(2)}+E_{(2)})(Ed_0)^{-1}$$

$$\dot\varepsilon^p_{(2)}=\dot\sigma E_{(2)}(a_{(1)}+c_{(1)}+E_{(1)})(Ed_0)^{-1}$$

$$d_0=(a_{(1)}+c_{(1)}+v_2E_{(1)}E_{(2)}/E)(a_{(2)}+c_{(2)}+v_1E_{(1)}E_{(2)}/E)-v_1v_2E^2_{(1)}E^2_{(2)}E^{-2}$$

что позволяет, продифференцировав (6.2) по параметру нагружения, исключить $\varepsilon^p_{(i)}$ из закона пластичности для композита

$$\dot\varepsilon^p=\dot\sigma[v_1E^2_{(1)}(a_{(2)}+c_{(2)}+E_{(2)})+v_2E^2_{(2)}(a_{(1)}+c_{(1)}+E_{(1)})](E^2d_0)^{-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
2. *Зилауц А. Ф., Крегерс А. Ф., Лагздиньш А. Ж., Тетерс Г. А.* Расчет упругопластических деформаций композита при сложном нагружении.— Механика композит. материалов, 1981, № 6, с. 987—992.
3. *Sawicki A.* Engineering mechanics of elastoplastic composites.— Mech. Materials, 1983, v. 2, No. 3, p. 217—231.
4. *Исупов Л. П., Работнов Ю. Н.* О законе пластичности для композитной среды.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 1, с. 121—127.
5. *Исупов Л. П.* Об эффективных характеристиках пластичности композитной среды.— Механика композит. материалов, 1985, № 4, с. 614—619.
6. *Эглит М. Э.* Об усредненном описании процессов в периодических упругопластических средах.— Механика композит. материалов, 1984, № 5, с. 825—831.
7. *Hill R.* Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles.— J. Mech. Phys. Solids, 1963, v. 11, No. 5, p. 357—372.
8. *Кнетс И. В.* Основные современные направления в математической теории пластичности. Рига: Зинатне, 1971. 147 с.
9. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
10. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1985