

УДК 539.376

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ; ВАРИАНТ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТ

КЛЮШНИКОВ В. Д., ТО ВАН ТАН

Отправляясь от трактовки устойчивости, предложенной в [1], в [2, 3] была развита идея о целом множестве особых точек процесса ползучести — точек псевдобифуркации и указан простой и универсальный способ их определения. На основе этой методики были проведены [4] вычисления множества псевдобифуркационных точек для случая сжатой пластинки и высказано предположение о том, что в силу «влости» послекритического поведения механической системы в условиях ползучести реально наблюдаемое выпучивание отвечает не первой бифуркационной точке, а некоторой последующей, причем порядок этой точки остается одним и тем же для данного материала и, возможно, группы краевых задач. Дальше показано, что такая точка зрения действительно находит экспериментальное подтверждение.

1. В дальнейшем используется теория ползучести с упрочнением [5] при условии несжимаемости

$$\begin{aligned} p^\alpha p^\bullet &= {}^3/2 A \sigma_u^n S_{ij}, & e_{ij} &= p_{ij}^{-3} / 2 E^{-1} S_{ij} \\ \sigma_u^2 &= {}^3/2 S_{ij} S_{ij}, & (p^\bullet)^\bullet &= {}^2/3 p_{ij}^\bullet p_{ij}^\bullet, & e_{kk} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где p_{ij} — часть полных деформаций e_{ij} , отвечающая ползучести, S_{ij} — девиатор напряжений, E — модуль Юнга, A , n , α — экспериментально определяемые постоянные.

При неизменных S_{ij} точка псевдобифуркации порядка N для дифференциального определяющего уравнения порядка $M \geq N$ отвечает [2–4] моменту, когда единственность решения краевой задачи имеет место для всех производных по времени от внутренних параметров, кроме производных N порядка. В этот момент для малой разности (вариации) $\Delta \sigma_{ij}^{(N)}$ производных напряжений или соответствующего девиатора $\Delta S_{ij}^{(N)}$ и деформации $\Delta e_{ij}^{(N)}$, в силу определяющего уравнения возникает зависимость

$$\Delta \sigma_{ij}^{(N)} = E_{ijmn}^N \Delta e_{mn}^{(N)} \quad \text{или} \quad \Delta S_{ij} = 2G_{ijmn}^{(N)} \Delta e_{mn}^{(N)} \quad (1.2)$$

подобная закону упругости (упругий эквивалент), где матрицы E_{ijmn}^N G_{ijmn}^N зависят от параметров состояния и их производных по времени в данный момент. В дальнейшем при выписывании такого упругого эквивалента знак N будем сохранять только в обозначениях матриц.

Для выявления точек псевдобифуркации порядка N для определяющего уравнения, имеющего в исходной форме порядок $M_0 < N$ нужно дифференцированием поднимать порядок последнего. Так в рамках соотношений (1.1) нужно провести N — кратное дифференцирование, причем [4], никаких других псевдобифуркационных точек, кроме псевдобифуркации N порядка, полученное таким образом новое определяющее уравнение порядка $M = N + 1$ не выделяет.

Использование указанной методики для соотношения (1.1) приводит [4] к формуле

$$G_{ijmn}^N = {}^1/3 B (N \delta_{im} \delta_{jn} - {}^3/2 k S_{ij} S_{mn} \sigma_u^{-2}) \quad (1.3)$$

$$B = E \alpha \sigma_u / (E p + N \alpha \sigma_u), \quad k = E p [N(n-1) - 1] / [E p n + (N+1) \alpha \sigma_u]$$

2. Для сжатого шарнирного стержня на основании (1.2)–(1.3) одномерный упругий эквивалент $\Delta\sigma \sim \Delta\epsilon$ имеет матрицу

$$E^N = E[1 + E\rho n / (N+1)\alpha\sigma]^{-1} \quad (2.1)$$

и критическое условие представляется формулой Эйлера, в которой модуль E надо заменить на E^N :

$$\sigma = \pi^2 E^N I / Fl^2 = \pi^2 EI \{ Fl^2 [1 + E\rho n / \alpha\sigma (N+1)] \}^{-1}$$

Поскольку сомножители перед квадратной скобкой представляют эйлерово напряжение σ_0 , то следующее отсюда критическое условие для p имеет вид

$$p = \alpha(N+1)(\sigma_0 - \sigma) / E\rho n \quad (2.2)$$

Заключенное здесь множество особых точек составляет арифметическую прогрессию; можно сказать, что псевдобифуркационный ритм в данном случае является равномерным. При $N=0$ условие (2.2) выражает критерий Работнова – Шестерикова [3], при $N=1$ – критерий Куршина [6]. По найденному критическому значению на основании (1.1) определяется соответствующее критическое время. При введении обозначений

$$\omega = \sigma / \sigma_0, \quad \zeta = E\rho n / \alpha\sigma_0 \quad (2.3)$$

критическое условие (2.2) представится в виде

$$\zeta + (N+1)\omega = N+1 \quad (2.4)$$

Вопрос об устойчивости (несущей способности) исследовался экспериментально [7] на образцах из дуралюмина Д-16Т диаметром 6 мм, длиной 100 мм при температуре 250°С. Процесс ползучести описывался соотношением (1.1), а соответствующие постоянные определялись из кривых ползучести при растяжении образцов, изготовленных из прутка той же плавки, и таким образом было найдено $E = 5,79 \cdot 10^4$ МПа, $\sigma_0 = 128,5$ МПа. Значение параметра α в работе не приведено, но нужное для подсчета величины ζ отношение α/n можно определить из приведенных там результатов расчета по критериям Работнова – Шестерикова и Куршина. Это отношение равно приблизительно 0,27.

Продольная деформация в экспериментах на устойчивость не замерялась непосредственно, а определялась при заданном уровне напряжения по кривой ползучести при растяжении в предположении, что мгновенная деформация является упругой. Ниже для данных [7] (первые три строки) приведены значения деформации ползучести p , отвечающие среднему значению времени для исчерпания несущей способности (резкое нарастание прогиба) для всех образцов при данном уровне напряжения, а также подсчитанные по указанным выше значениям E , σ_0 и α/n параметры ω и ζ ($e_0 = \sigma_0/E$):

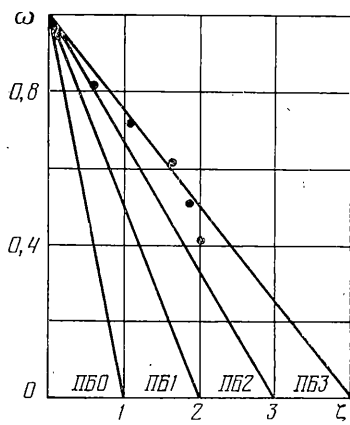
$\sigma \cdot 10^{-7}$	5,41	6,66	7,90	9,16	10,40	12,07
$t \cdot 10^{-2}$	834	202	103	25	5	12
$e \cdot 10^2$	0,205	0,215	0,230	0,220	0,210	0,210
p/e_0	0,51	0,47	0,43	0,29	0,14	0,01
ω	0,42	0,51	0,61	0,71	0,81	0,94
ζ	2,04	1,88	1,72	1,16	0,56	0,04

Соответствующие точки представлены на фиг. 1 вместе с результатами расчета по формуле (2.4). Как видно эти точки в большинстве случаев располагаются между прямыми, отвечающими псевдобифуркациям второго и третьего порядков.

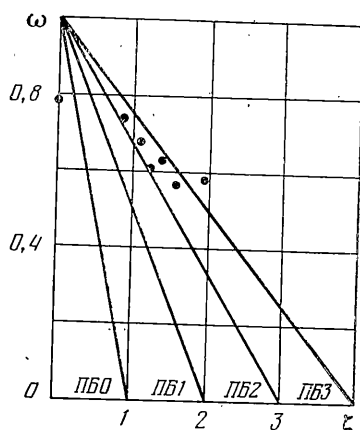
В работе [8] исследовалась устойчивость стержней из алюминиевого сплава 2024-T4 длиной 96,5 мм и сечением 12,7×6,35 мм при температуре 260°С. Модуль упругости при этой температуре $E = 5,88 \cdot 10^4$ МПа. Приведены кривые ползучести при растяжении. Результаты экспериментов по устойчивости представлены в виде точек на плоскости усилие – критическое время. Располагая кривыми ползучести можно вычислить и критическую деформацию ползучести.

Ниже представлены в первых трех строках данные [8] и результаты их пересчета в переменные ω^* , ζ^* . При этом использовалось значение σ_0^* , отвечающее экспериментальным данным, т. е. 112 МПа (приведенное в [8] расчетное значение σ_0 этой величины не совпадало с экспериментальным).

$\sigma \cdot 10^{-7}$	11,28	10,98	9,81	8,92	9,06	8,24	8,53
$t \cdot 10^{-2}$	0	13	36	69	72	156	186
$p \cdot 10^2$	0	0,07	0,09	0,10	0,12	0,13	0,16
ω^*	0,77	0,74	0,67	0,60	0,62	0,56	0,57
ζ^*	0	0,84	1,09	1,22	1,40	1,55	1,93



Фиг. 1



Фиг. 2

Величину α/n на основе данных работы [8] определить не представляется возможным, но если принять ее равной $1/3$, то картина расположения экспериментальных точек, представленная на фиг. 2, будет такой же, как и в предыдущем случае, эти точки вновь в основном группируются между прямыми псевдобифуркаций второго и третьего порядков.

3. Для обобщенного плоского напряженного состояния из девятиаторной формы связи с матрицей (1.3) следует [4] связь для самих тензоров $\Delta\sigma_{ij} = E_{ijmn}^N \Delta e_{mn}$ ($i, j, m, n=1, 2$):

$$E_{ijmn}^N = B [{}^2/3 N (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{ij}\delta_{mn}) - k\sigma_{ij}\sigma_{mn}\sigma_u^{-2}] \quad (3.1)$$

Для пластин, с учетом гипотез Кирхгоффа — Лява отсюда вытекает упругий эквивалент для связи моментов и кривизн

$$\Delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_{ijz} dz = -\frac{h^2}{12} E_{ijmn}^N \Delta w_{,mn} \quad (3.2)$$

который должен заменить соотношение упругости в уравнении бифуркации нулевого порядка

$$\Delta M_{ij,ij} + h\sigma_{ij}\Delta w_{,ij} = 0 \quad (3.3)$$

На основании (3.1), (3.2) уравнение (3.3) для однородного докритического состояния приводится к виду

$$N\Delta w_{,ijij} - {}^3/4 k\sigma_{ij}\sigma_{mn}\Delta w_{,ijmn} + 9B^{-1}h^{-2}\sigma_{ij}\Delta w_{,ij} = 0 \quad (3.4)$$

Для шарнирно закрепленной прямоугольной пластинки ($a \cdot b$), сжатой в направлении наибольшего размера a , решение этого уравнения имеет вид

$$w = C \sin m\pi x/a \sin \pi y/b \quad (3.5)$$

Соответствующее критическое условие будет

$$N\Lambda - {}^3/16 k\lambda - (Ep + N\alpha\sigma)/\alpha\sigma_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$\Lambda = {}^4/4 (\lambda + 2 + \lambda^{-1}), \quad \lambda = m^2 b^2 a^{-2}, \quad \sigma_0 = {}^2/9 \pi^2 E h^2 b^{-2}$$

Выражение σ_0 представляет критическое напряжение упругой пластинки.

Уравнение (3.6) с учетом (2.3) легко приводится к виду

$$\xi^2 + \xi \{ -nN(\Lambda - \omega) + \omega(N+1) - {}^3/16 [1 - N(n-1)]\lambda \} - nN(\Lambda - \omega)(N+1)\omega = 0 \quad (3.7)$$

и имеет положительный корень

$$\xi = {}^1/2 [\theta + \sqrt{\theta^2 + 4nN(N+1)(\Lambda - \omega)\omega}] \quad (3.8)$$

$$\theta = {}^3/16 \lambda - \omega + N [n(\Lambda - \omega) - \omega - {}^3/16 \lambda(n-1)]$$

Особая точка отвечает минимальному по λ значению ξ , откуда следует, что

$$\partial\lambda/\partial\lambda=3[N(n-1)-1]/\{16nN[1+(N+1)\omega/\xi]\}^{-1/4}(1-\lambda^{-2}) \quad (3.9)$$

Простые исследования [4] показывают, что случай $N=0$ является вырожденным: вне зависимости от a/b форма прогиба отвечает одной полуwave вдоль направления сжатия ($\lambda=b^2/a^2$). В остальных случаях λ зависит от определяющих параметров и для достаточно длинных пластин близко к единице.

Во всех случаях критическая зависимость $\xi \sim \omega$ оказывается близкой к линейной, и соответствующая приближенная картина на плоскости $\xi \sim \omega$ может быть представлена прямыми, соединяющими точку $\xi=0, \omega=1$ с точками оси ξ , определяемыми из условия (3.8) при $\omega=0$. Исключение составляет лишь случай $N=0$, где соответствующая прямая должна выходить из точки $\xi=0, \omega=3/16$.

Для точек ξ_0 пересечения указанных линий с осью ξ в силу (3.6), (1.4) и (3.9) имеем

$$N\lambda+3/16[N(n-1)-1]n^{-1}-\xi_0n^{-1}=0 \quad (3.10)$$

$$\lambda=2[1+3(N+1)/nN]^{-1/2}$$

откуда следует, что

$$\xi_0=nNQ, \quad Q=1/2\{1+1/2[1+3(N+1)/nN]^{-1/2}\}=1/2(1+\lambda^{-1}) \quad (3.11)$$

Для длинных пластин $Q \cong 1$, а для относительно коротких слабо зависит от n для $n \geq 2,5$, что характерно для алюминиевых сплавов. Следовательно, ξ_0 можно считать пропорциональным n , и для пластин, в качестве характерного параметра удобно брать не ξ (как для стержня) а параметр

$$\eta=\xi/n=Er/\alpha\sigma_0=p/\alpha\epsilon_0 \quad (3.12)$$

Тогда аппроксимирующие прямые на плоскости $\eta \sim \omega$ будут представляться уравнением

$$\eta+NQ\omega=NQ \quad (3.13)$$

и для их построения существенное значение имеет лишь параметр α . А поскольку Q слабо зависит от N , то псевдобифуркационный ритм оказывается почти равномерным.

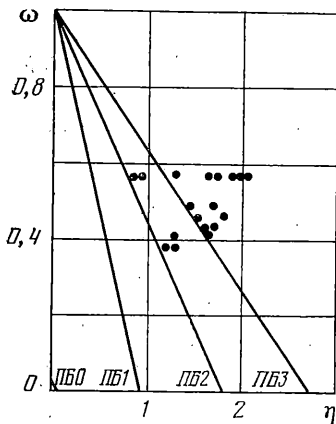
В [9], посвященной проверке одного частного подхода к устойчивости, проведены испытания на сжатых вдоль длинных сторон шарнирных пластинок из листового алюминиевого сплава 2024-T3 при температуре 315°С. Определенные при этой температуре модули упругости и мгновенное критическое напряжение равны $E=5,8 \cdot 10^4$ МПа; $\sigma_0^*=34,8$ МПа. Данных по параметрам α и n в работе нет (экспери-

Таблица 1

№	σ	τ	$p \cdot 10^4$	ω^*	η^*
1	23	3,7	6,38	0,56	0,86
2	23	3,9	6,9	0,56	0,92
3	23	5,4	9,55	0,56	1,29
4	23	7,5	12,70	0,56	1,70
5	23	8,0	13,80	0,56	1,80
6	23	8,3	14,4	0,56	1,90
7	23	8,6	14,9	0,56	2,00
8	23	9,0	15,4	0,56	2,03
9	21	10,0	11,1	0,49	1,42
10	21	12,0	13,0	0,49	1,70
11	19	14,5	11,3	0,46	1,50
12	19	17,0	13,2	0,46	1,80
13	19	22,5	17,1	0,46	2,30
14	18	19,0	11,5	0,43	1,60
15	18	21,2	12,9	0,43	1,70
16	18	22,5	12,0	0,42	1,60
17	17	21,0	10,0	0,41	1,30
18	16	27,0	9,2	0,38	1,20
19	16	28,0	9,7	0,38	1,30

мент обрабатывался по теории установившейся ползучести). Ориентируясь на сходство материалов 2024-T4 и 2024-T3 можно лишь предположить, что также как и для стержня из первого материала $\alpha/n \approx 1/3$. Для величины n (основываясь на близости химического состава указанных материалов и алюминиевых сплавов типа Д-16Т) предпочтительным [10] представляется выбор $n=3$ и, следовательно $\alpha=1$.

Производя в этих предположениях пересчет экспериментальных точек, приведенных графически в работе [9] в плоскость $\eta \sim \omega$ (табл. 1, $\tau = t\sigma_0(\sigma_0 - \sigma)$) первые две колонки взяты непосредственно из [9], изменены лишь единицы измерения получаем картину, представленную на фиг. 3. Как видно экспериментальные точки тяготеют к полосе между прямыми отвечающими второму и третьему порядку псевдобифуркации.



Фиг. 3

4. Этот результат в достаточной мере условен и приведен здесь только потому, что данных по устойчивости пластин для привычных сплавов типа Д-16Т не имеется. Такие данные имеются для цилиндрических оболочек и, переходя к их рассмотрению, отметим следующее.

Для алюминиевых сплавов типа Д-16Т, судя по экспериментальным данным, в частности, [11] параметр α уменьшается с увеличением температуры. Если для 150°C он порядка $1,5 \sim 2$, то для 200°C — порядка $1 \sim 1,5$. Для 250°C его значение можно оценить следующим образом. Как уже отмечено выше по данным [7], $\alpha/n \approx 0,27$. Отдельно значения α и n в этой работе не приводятся. Однако для сплава Д-16Т имеются данные других авторов. Так из [10, 11] следует, что при умеренных напряжениях (до 250 МПа) можно считать $n=3$. Тогда по [7] при температуре 250° параметр α должен быть равен $0,81$. Учитывая приближенность этой оценки, надо, по-видимому, принять, что в действительности при такой температуре α имеет порядок $0,6 \sim 1$ и в среднем составляет величину около $\alpha=0,75$, которая в дальнейшем и используется в расчетах при указанной температуре.

Отметим, что в случае несовпадения приведенного в экспериментальной работе теоретического значения σ_0 с экспериментальным σ_0^* , при подсчете будет использоваться (как было при обработке данных [8,9]) значения σ_0^* .

В дальнейшем используются уравнения равновесия цилиндрической оболочки, сжатой в осевом и окружном направлении [12]:

$$\Delta T_{ij,j} = 0, \quad \Delta M_{ij,ij} + T_{ij}\Delta w_{,ij} - \Delta T_{22}/R = 0 \quad (4.1)$$

$$i, j = 1, 2, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y$$

где x — продольная, y — окружная координата, R — средний радиус оболочки

$$\Delta T_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{ij} dz, \quad \Delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{ij} z dz \quad (4.2)$$

и геометрическое соотношение

$$\Delta e_{11} = \Delta u_{,1} - z\Delta w_{,11}, \quad \Delta e_{22} = \Delta v_{,2} + \Delta w/R - z\Delta w_{,22} \quad (4.3)$$

$$\Delta e_{12} = 1/2(\Delta u_{,2} + \Delta v_{,1}) - z\Delta w_{,12}$$

где u — продольное, v — окружное перемещение, w — прогиб. Используя соотношения упругого эквивалента

$$\Delta \sigma_{ij} = E_{ijmn}^N \Delta e_{mn} \quad (4.4)$$

с матрицей E_{ijmn}^N , определяемой формулами (3.1) и (4.3), после некоторых выкладок получим

$$\Delta T_{11} = Bh[(1/3N - kv_1^2)u_{,1} + 2/3N(v_{,2} + wR^{-1}) - k(v_{,2} + wR^{-1})v_1v_2] \quad (4.5)$$

$$\Delta T_{22} = Bh[2/3Nu_{,1} + (1/3N - kv_2^2)(v_{,2} + wR^{-1}) - kv_1v_2w_{,1}]$$

$$\Delta T_{12} = 1/3BhN(u_{,2} + v_{,1})$$

$$\Delta M_{11} = -1/12Bh^3[(1/3N - kv_2^2)w_{,11} + (2/3N - kv_1v_2)w_{,22}]$$

$$\Delta M_{22} = -1/12 B h^3 [(2/3 N - k v_1 v_2) w_{,11} + (4/3 N - k v_2^2) w_{,22}]$$

$$\Delta M_{12} = -1/18 B h^3 w_{,12}$$

где у параметров Δu , Δv , Δw опущен знак Δ , дифференцирование представлено индексами после запятой и введены обозначения $v_1 = \sigma_{11}/\sigma_u$, $v_2 = \sigma_{22}/\sigma_u$.

Поскольку σ_u — интенсивность напряжений, то $v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2 = 1$. Вводя для ΔT_{ij} функцию напряжений $\Delta T_{11} = \Phi_{,22}$, $\Delta T_{22} = \Phi_{,11}$, $\Delta T_{12} = -\Phi_{,12}$ на основании (4.5) и последнего уравнения (4.1) получим

$$R^{-1} \Phi_{,11} + 1/12 B h^3 [4/3 N L L w - k (v_1^2 w_{,1111} + v_2^2 w_{,2222} + 2 v_1 v_2 w_{,1122}) - T_{11} w_{,11} - T_{22} w_{,22}] = 0 \quad (4.6)$$

Здесь и дальше L означает гармонический оператор.

Применяя к первым трем формулам (4.5) операторы $\partial^2/\partial y^2 - 1/2 \partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/\partial x^2 - 1/2 \partial^2/\partial y^2$, $-3 \partial^2/\partial x \partial y$ соответственно, используя функцию напряжений и складывая результаты, после некоторых преобразований получим

$$L L \Phi = B h (R^{-1} w_{,11} - k M \Psi) \quad (4.7)$$

$$M = v_1 (\partial^2/\partial y^2 - 1/2 \partial^2/\partial x^2) + v_2 (\partial^2/\partial x^2 - 1/2 \partial^2/\partial y^2)$$

$$\Psi = v_1 \partial u / \partial x + v_2 (\partial v / \partial y + w / R) \quad (4.8)$$

Умножим первые два уравнения (4.5) на $(v_1 - v_2/2)$ и $(v_2 - v_1/2)$ соответственно и сложим. Тогда для параметра Φ получим выражение

$$h^{-1} M M \Phi = \Psi B (N + k v_1 v_2 - k v_1^2 - k v_2^2) \quad (4.9)$$

на основании которого уравнение (4.7) преобразуется к виду

$$k M M \Phi = (k - N) (L L \Phi - B h N R^{-1} w_{,11}) \quad (4.10)$$

Обозначая осевое и внутреннее давление через σ и q соответственно будем иметь

$$\sigma_{11} = T_{11}/h = -\sigma, \quad \sigma_{22} = T_{22}/h = q R / h \quad (4.11)$$

Для шарнирно опертой оболочки ищем решение уравнений (4.6), (4.10) в виде

$$w = C \sin \frac{m_1 \pi x}{l} \sin \frac{m_2 y}{R}, \quad \Phi = D \sin \frac{m_1 \pi x}{l} \sin \frac{m_2 y}{R} \quad (4.12)$$

Внося это представление в указанные уравнения и вводя обозначения

$$\lambda_1 = m_1 \pi R / m_2 l, \quad \lambda_2 = m_2^2 h / R \quad (4.13)$$

после некоторых преобразований получим критическое условие

$$(\sigma - q R h^{-1} \lambda_1^{-2}) B^{-1} R h^{-1} = 1/9 [(N - 3/4 k v_1^2) \lambda_1^2 + 2(N - 3/4 k v_1 v_2) + (N - 3/4 k v_2^2) \lambda_1^{-2}] \lambda_2 - N \{ [k (1/4 v_1^2 - v_1 v_2 + v_2^2) - (k - N)] \lambda_1^2 + [k (v_1^2 - v_1 v_2 + 1/4 v_2^2) - (k - N)] \lambda_1^{-2} - [k (v_1^2 + v_2^2 - 5/2 v_1 v_2) + 2(k - N)] \}^{-1} (k - N) \lambda_2^{-1} \quad (4.14)$$

которое при введении параметров $\beta = \sigma_{22}/\sigma_{11} = -q R / h \sigma$, $\kappa^2 = 1 + \beta^2 - \beta$ и сохранении обозначений $\eta = E p / \alpha \sigma_0$, $\omega = \sigma / \sigma_0$, где σ_0 — упругое критическое напряжение для оболочки при фиксированном значении β , принимает вид

$$(1 + \beta \lambda_1^{-2}) (\kappa^{-1} \eta + N \omega) = 1/18 [(N - 3/4 k v_1^2) \lambda_1^2 + 2(N - 3/4 k v_1 v_2) + (N - 3/4 k v_2^2) \lambda_1^{-2}] \lambda_2 - 3/2 N \{ [k (1/4 v_1^2 - v_1 v_2 + v_2^2) - (k - N)] \lambda_1^2 + [k (v_1^2 - v_1 v_2 + 1/4 v_2^2) - (k - N)] \lambda_1^{-2} - [k (v_1^2 + v_2^2 - 5/2 v_1 v_2) + 2(k - N)] \}^{-1} (k - N) \lambda_2^{-1} \quad (4.15)$$

Таблица 2

№	R/h	T°, K	σ^0	ε^0	t	ω^*	η^*
1	147	290	3,8	0,39	—	—	—
2	147	290	3,4	0,35	—	—	—
3	147	290	3,2	0,33	—	—	—
4	116	290	3,2	0,37	—	1	0
5	116	290	3,5	0,36	—	—	—
6	147	530	2,3	0,37	183	0,64	0,518
7	147	530	2,3	0,42	1750	0,64	0,70
8	147	530	2,3	0,48	1640	0,64	0,925
9	147	530	2,6	0,35	59	0,75	0,3
10	147	530	2,7	0,44	249	0,78	0,59
11	147	580	0,11	0,52	1021	0,30	1,52
12	147	580	0,12	0,53	770	0,33	1,52
13	147	590	0,09	0,56	345	0,26	1,72
14	116	590	0,11	0,52	1615	0,30	1,52
15	147	590	0,15	0,43	37	0,44	1,00
16	147	590	0,15	0,51	159	0,44	1,30
17	147	590	0,16	0,46	68	0,47	1,07
18	116	620	0,05	0,60	4290	0,15	2,02
19	116	620	0,05	0,62	1350	0,15	2,09
20	116	620	0,07	0,53	545	0,20	1,68
21	116	620	0,12	0,34	56	0,33	0,82

Отметим, что с учетом (2.3), (3.12), по (1.3) имеем

$$k = \eta [N(n-1) - 1] [\eta n + \omega(N+1)]^{-1}$$

5. Рассмотрим случай осевого сжатия ($q = \beta = \nu_2 = 0$, $\kappa = 1$). Критическое условие принимает вид

$$\eta + N\omega = \frac{1}{6} [N(\lambda_1 + \lambda_1^{-1})^2 - \frac{3}{4} k \lambda_1^2] \lambda_2 - \frac{3}{2} N(k - N) [N(\lambda_1 + \lambda_1^{-1})^2 - k(\frac{3}{4} \lambda_1^2 + 3)]^{-1} \lambda_2^{-1} \quad (5.1)$$

В случае упругости ($p = \eta = k = 0$) имеем $\omega = \frac{1}{6} \lambda + \frac{3}{2} \lambda^{-1}$, $\lambda = \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_1^{-1})^2$ и минимальное значение ω по λ достигается при $\lambda = 3$, так что $\omega = 1$ и, следовательно введенный параметр σ_0 — эйлерово значение напряжения при осевом сжатии.

Случай $N = 0$ является вырожденным (система уравнений (4.7), (4.10) сводится к одному обыкновенному уравнению относительно w), однако уравнение (5.1) применимо и в этом случае и с учетом (4.16)

$$\eta n + \omega = \frac{1}{8} \lambda_2 \lambda_1^2 = \frac{1}{8} \pi^2 m_1 R h l^2 \quad (5.2)$$

Минимальное значение η достигается при $m_1 = 1$. Соответствующая псевдобифуркационная прямая на плоскости $\eta \sim \omega$ не проходит через точку $\eta = 0$, $\omega = 1$ (фиг. 4).

При $N > 0$ для определения зависимости $\eta \sim \omega$ на основании (5.1) нужно определить λ_1 , λ_2 , отвечающие минимальному значению η . Опуская эту процедуру, в общем случае отметим, что согласно прямым подсчетам результирующая зависимость $\eta \sim \omega$ близка к линейной и содержит точку $\eta = 0$, $\omega = 1$. Пользуясь этим обстоятельством, ограничимся нахождением значения η_0 при $\omega = 0$.

Минимум η_0 по λ_1 и λ_2 при $\omega = 0$, как можно проверить, достигается при

$$\lambda_1 = \{1 - \frac{3}{4} [N(n-1) - 1] N^{-1} n^{-1}\}^{-1/2}, \quad (5.3)$$

$$\lambda_2 = 9N(N+1)n^{-1} [N(\lambda_1 + \lambda_1^{-1})^2 - \frac{3}{4} k \lambda_1^2]^{-1} [N(\lambda_1 + \lambda_1^{-1})^2 - 3k(\frac{1}{4} \lambda_1^2 + 1)]^{-1}$$

и определяется формулой подобной случаю пластинки, но с другим значением $Q(\delta^2 = 1 + 3(N+1)/nN)$:

$$\eta_0 = NQ, \quad Q^2 = (N+1)(2+\delta) [nN(\delta-1) + 3(N+1)]^{-1/2} \quad (5.4)$$

№	h	T°, C	ω	t	p/e₀	ω*	η*
I	0,5	20	0,58	—			
II	0,5	20	0,54	—			
III	0,48	20	0,53	—	0	1	0
1	0,5	250	0,579	5			
2	0,5	250	0,615	5			
3	0,5	250	0,549	5			
4	0,5	250	0,319	9000	0,33	0,57	0,79
5	0,5	250	0,376	3300	0,23	0,68	0,56
6	0,5	250	0,430	1212	0,198	0,77	0,47
7	0,51	250	0,400	5400	0,215	0,72	0,52
8	0,5	250	0,376	1200	0,223	0,68	0,54
9	0,5	250	0,485	360	0,091	0,87	0,22
10	0,5	250	0,485	180	0,05	0,87	0,13

Таблица 4

h	T°, C	ω	q'	t	p/e₀	ω*	η*
0,50	250	0,69	0,104	—			
0,52	250	0,65	0,096	—	0	1	0
0,47	250	0,64	0,126	1500	0,04	0,96	0,08
0,48	250	0,62	0,120	1980	0,03	0,93	0,06
0,48	250	0,42	0,112	4200	0,43	0,63	0,86
0,47	250	0,50	0,117	2220	0,18	0,75	0,36
0,48	250	0,48	0,112	1680	0,23	0,72	0,46
0,50	250	0,47	0,104	3240	0,32	0,70	0,64

При значении $n=3$, которое используется в дальнейшем, $Q = \{ [N + \sqrt{N(2N+1)}] / 3N \}^{1/2}$ и слабо зависит от N , что обеспечивает почти равномерный «псевдобифуркационный ритм».

Соответствующие прямые, аппроксимирующие истинные линии, представлены на фиг. 4. Точками нанесены результаты испытаний на устойчивость при осевом сжатии, приведенные в [13]. Испытывались цилиндрические оболочки из сплава Д-16АТ длиной 400 мм, внутренним диаметром 319 мм и толщиной стенки 1,10 мм и 1,38 мм. Температура изменялась от 290 до 620° К. Первые пять колонок табл. 2 взяты из [13] ($\sigma^0 = \sigma R / Eh$, $\varepsilon^0 = \varepsilon R / h$). Теоретическое значение σ_0 на основе (4.15) должно быть равно $\sqrt{2/3} Eh / R$ в то время, как на основании первых пяти строчек табл. 2 экспериментальное значение этой величины равно $0,36 Eh / R$, т. е. $\sigma_0^* = 0,6 \sigma_0$. Принимая, как это было оговорено выше в качестве эйлерового напряжения σ_0^* , $n=3$, $\alpha=0,75$ были подсчитаны соответствующие значения ω^* и η^* , помещенные в двух последних колонках табл. 2 и отмеченные точками на фиг. 4.

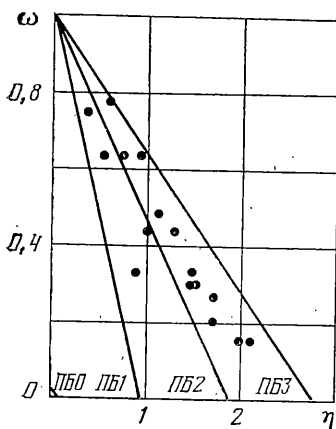
В работе [14] испытывались оболочки из материала Д-16Т размерами $l=425$ мм, $h=0,5$ мм, $R=88$ мм при комнатной температуре и при 250° С. Результаты эксперимента представлены в табл. 3. Первые пять колонок взяты непосредственно из [14], откуда видно, что $\sigma_0^* = 0,55 \sigma_0$. При этом значении эйлеровой нагрузки и $n=3$, $\alpha=0,75$ подсчитаны параметры двух последних колонок и результат представлен на фиг. 5 в виде точек в сетке псевдобифуркационных прямых, повторяющих сетку на рис. 2.

6. Как показывают прямые расчеты и при совместном действии осевого и бокового давления псевдобифуркационные линии можно аппроксимировать прямыми. За исключением вырожденного случая $N=0$, эти прямые проходят через точку $\eta=0$, $\omega=1$. Основываясь на предыдущем результате, где λ_1 близко к единице, будем при определении η_0 заранее полагать $\lambda_1=1$. Кроме того ограничимся случаем, когда σ_{22} достаточно мало, так что $\sigma_{22} = qR/h \ll E\rho n / (N+1)$ и, следовательно, как и выше $k \approx [N(n-1)-1] / n = \text{const}$. Тогда для η_0 в силу (4.15) при $\sigma = \omega = \nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1$, $\kappa = \beta \rightarrow \infty$, $\omega \kappa = qR/h \sigma_0$ имеем

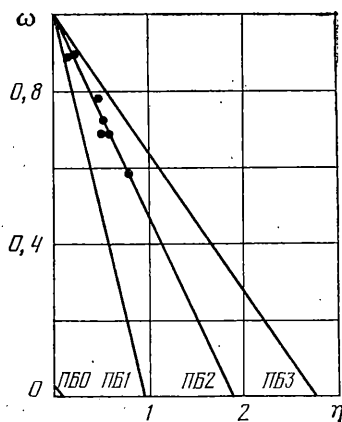
$$\begin{aligned} \eta_0 + NRqh^{-1} \sigma_0^{-1} &= N \{ \sqrt{2/3} \lambda_2 [13/16 + 3/16(N+ \\ &+ 1) / Nn] + 6\lambda_2^{-1}(k-N) / (15k-16N) \} = \\ &= N \{ \lambda_2 / 24 [13 + 3 / (Nn)(N+1)] + 6\lambda_2^{-1}(k-N) / (15k-16N) \} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Минимум η_0 по λ_2 достигается при $\lambda_2 = 12 \{ (k-N) / (15k-16N) [13 + 3(N+1) / Nn] \}^{1/2}$ и равен

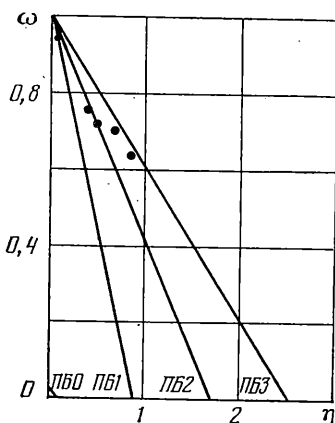
$$\eta_0 = N [(N+1)^{1/2} (13Nn + 3N + 3)^{1/2} (Nn + 15N + 15)^{-1/2} N^{-1/2} n^{-1/2} - qR h^{-1} \sigma_0^{-1}] \quad (6.2)$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

При $n=3$ аппроксимирующие псевдобифуркационные прямые, проходящие через точки $\eta=0$, $\omega=1$ и η_0 , $\omega=0$ представлены на фиг. 6. Как и в [14], где кроме одноосного нагружения приведены данные экспериментов и при одновременном действии σ и q принималось $q=10^{-1}$ МПа; материал, длина и радиус оболочек и температура были те же, что и при одноосном нагружении. Как и прежде величина σ_0 заменялась экспериментальным значением $\sigma_0^*=0,67\sigma_0$.

Данные эксперимента приведены в первых шести колонках табл. 4 ($q'=2qR^2/Eh^2$). Рассчитанные значения ω^* и η^* (две последние колонки) нанесены в виде точек на фиг. 6. Сделанное предположение относительно величины σ_{12} , как следует из табл. 4 выполняется тем лучше, чем меньше ω и, по-видимому, вполне приемлемо при $\omega=0$.

Таким образом границей неустойчивости для сплавов типа Д-16Т является полоса между вторым и третьим порядком псевдобифуркаций. Вероятно это положение справедливо и для сплавов типа 2024-Т. В отношении указанного свойства стержни, пластинки и оболочка ведут себя одинаково. Но для нахождения такой полосы в стержнях требуется задание отношения α/n , в то время, как для пластин и оболочек можно (в отношении критической деформации) задавать один параметр α .

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. — ПММ, 1957, т. 21, вып. 3, с. 406–412.
2. Ключников В. Д. Особые точки процессов деформирования сложных сред. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1, с. 95–102.
3. Ключников В. Д. Устойчивость упруго-пластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
4. Ключников В. Д. К вопросу устойчивости течения сложных сред. — В кн.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984, с. 122–135.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Куршин Л. М. Устойчивость стержней в условиях ползучести. — ПМТФ, 1961, № 6, с. 128–134.

7. Кузнецов А. П. Устойчивость сжатых стержней из дуралюмина в условиях ползучести.— ПМТФ, 1961. № 6, с. 160—162.
8. Charman J. C., Erichson B., Hoff N. J. A theoretical and experimental investigation of creep buckling.— Intern. J. Mech. Sci. 1960, N. 1, N. 2/3, p. 145—174.
9. Хофф Н. Дж., Бенуа М. Экспериментальная проверка теории коробления пластин при ползучести.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 491—494.
10. Куришин Л. М. Устойчивость при ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3, с. 125—160.
11. Наместников В. С., Хвостунков А. А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках.— ПМТФ, 1960, № 4, с. 90—95.
12. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1969. 695 с.
13. Баранов А. Н., Морозов М. А. Экспериментальные исследования критической деформации цилиндрических оболочек в условиях ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1, с. 114—118.
14. Щербakov В. Т. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при ползучести.— Учен. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 3, с. 160—165.

Москва, Вьетнам

Поступила в редакцию
10.V.1984