

УДК 539.374

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ
ПРИ ЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ УПРОЧНЕНИЯ

АНДРОНОВ Г. Ф.

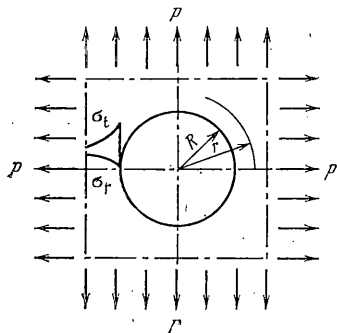
Сложность большинства упругопластических задач и необходимость учета реального характера нагружения и действительной характеристики упрочнения материала приводит, как правило, к приближенному решению этих задач различными численными методами.

Точные решения упругопластических задач существуют лишь для самых простых случаев нагружения в окрестностях концентраторов самой простой геометрии. Даже для наиболее простого в условиях пластического состояния случая плоской деформации [1] известны только решения для симметричного нагружения при линейном [1] и степенном [2] упрочнении. Для несимметричного нагружения бесконечной плоскости в зоне кругового отверстия имеется решение лишь для случая идеальной пластичности [3], причем необходимо выполнение условия охвата пластической зоной всего контура отверстия.

Для плоского напряженного состояния, реализуемого при нагружении тонкой пластины, известны точные решения осесимметричной задачи только для случаев идеальной пластичности [4] и степенного закона упрочнения материала [5]. Для диаграммы деформирования материала с линейным упрочнением получено решение в замкнутой форме [6] благодаря использованию приближенных выражений для интенсивности напряжений и деформаций, предложенных А. А. Ильюшиным. В [5] рекомендуется при использовании точных выражений Хубера — Мизеса для интенсивности напряжений и деформаций производить численное интегрирование системы дифференциальных уравнений и предлагается существенно упростить решение для степенного закона упрочнения введением вместо текущего значения радиуса r параметра φ , обеспечивающего тождественно выполнение условия Хубера — Мизеса $\sigma_i^2 = \sigma_t^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t \sigma_r$. В этом случае окружные и радиальные напряжения определяются выражениями $\sigma_t = 2/\sqrt{3} \sigma_i \cos(\varphi - \pi/3)$, $\sigma_r = 2/\sqrt{3} \sigma_i \sin(\varphi - \pi/3)$.

Далее приводится исследование, показывающее возможность решения этой задачи в замкнутом виде при применении параметра φ , также и при наличии линейного упрочнения.

1. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние для бесконечной тонкой пластины с круглым отверстием радиуса R , подвергнутой на бесконечности равномерному растяжению интенсивности p (фиг. 1). Анализ проводится по теории малых упругопластических деформаций для несжимаемого материала в случае простого однократного нагружения, используемого при анализе напряженно-деформированного состояния в окрестностях концентраторов напряжений.



Фиг. 1

Интенсивность напряжений при линейном упрочнении определяется выражением [1, 6]:

$$\sigma_i = \lambda \sigma_T + E(1 - \lambda) \varepsilon_i \quad (1.1)$$

где λ — параметр упрочнения, ε_i — интенсивность деформаций, E — модуль упругости материала. Уравнения равновесия и совместности деформаций в рассматриваемом случае имеют вид:

$$d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_t)/r = 0, \quad d\varepsilon_i/dr + (\varepsilon_i - \varepsilon_r)/r = 0 \quad (1.2)$$

Первое из уравнений системы (1.2) после подстановки значений напряжений приводится к виду

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\sin(\varphi - \pi/6)} \left(\frac{d\sigma_i}{d\varphi} \frac{\cos \varphi}{\sigma_i} - \sin \varphi \right) \quad (1.3)$$

Используя зависимости теории малых упругопластических деформаций

$$\varepsilon_t = 1/2 \varepsilon_i / \sigma_i (2\sigma_t - \sigma_r), \quad \varepsilon_r = 1/2 \varepsilon_i / \sigma_i (2\sigma_r - \sigma_t) \quad (1.4)$$

получаем после преобразований

$$\varepsilon_t = \varepsilon_i \sin \varphi, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_i \cos (\varphi + \pi/6) \quad (1.5)$$

Подставив значения (1.5) во второе уравнение (1.2), получим

$$\frac{dr}{r} = - \frac{d\varphi}{\sqrt{3} \sin (\varphi - \pi/6)} \left(\frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i} \frac{\sin \varphi}{d\varphi} + \cos \varphi \right) \quad (1.6)$$

Приравнявая первые части уравнений (1.3) и (1.6) приходим к выражению

$$d\sigma_i / \sigma_i \cos \varphi + d\varepsilon_i / (\sqrt{3}\varepsilon_i) \sin \varphi = 2/\sqrt{3} \sin (\varphi - \pi/6) d\varphi \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) после подстановки значения σ_i из выражения (1.1) приводится к дифференциальному уравнению Абеля второго рода, не разрешаемого в квадратурах и представляющего существенные трудности и при решении в численном виде на ЭВМ.

От решения уравнения (1.7) можно перейти к решению системы уравнений ($Z(\varphi)$ — неизвестная функция от параметра φ):

$$\frac{d\sigma_i}{d\varphi \sigma_i} = - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{Z(\varphi)}{\cos \varphi}, \quad \frac{d\varepsilon_i}{d\varphi \varepsilon_i} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}Z(\varphi)}{\sin \varphi} \quad (1.8)$$

После интегрирования уравнения (1.8) с использованием зависимости (1.1) приходим к выражению (C_1 и C_2 — произвольные постоянные):

$$\lambda \sigma_r / E = C_1 \exp \left[-1/\sqrt{3} \varphi + \int Z(\varphi) d\varphi / \cos \varphi \right] - \\ - (1-\lambda) C_2 \exp \left[\sqrt{3} \varphi - \int \sqrt{3} Z(\varphi) / \sin \varphi d\varphi \right] \quad (1.9)$$

Логарифмируя уравнение (1.9) и беря производную по φ получаем выражение для функции $Z(\varphi)$:

$$Z(\varphi) = \frac{1/\sqrt{3} + \sqrt{3}(1-\lambda)}{\sqrt{3}(1-\lambda)/\sin \varphi + 1/\cos \varphi} \quad (1.10)$$

После определения функции $Z(\varphi)$ функции ε_i и σ_i находятся из системы (1.8).

Более удобным представляется определение интенсивности деформаций ε_i интегрированием второго уравнения системы (1.8) с последующим определением σ_i по формуле (1.1).

В результате интегрирования получим

$$\varepsilon_i = C_e \frac{\exp \{ [1 - \alpha(1-\lambda)] \sqrt{3} \varphi \}}{[\sin \varphi + (1-\lambda) \sqrt{3} \cos \varphi]^\alpha}, \quad \alpha = \frac{1+3(1-\lambda)}{1+3(1-\lambda)^2} \quad (1.11)$$

где C_e — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Для определения произвольной постоянной C_e выразим напряженно-деформированное состояние для упругого поведения материала ($\lambda=0$) через параметр φ . В рассматриваемом случае известные зависимости $\sigma_t, \sigma_r = p(1 \pm R^2/r^2)$, $\sigma_i = p(1+3R^4/r^4)^{1/2}$ и $\varepsilon_i = \sigma_i/E$ приводятся к виду

$$\sigma_t = 2p \frac{\cos(\varphi - \pi/3)}{\sqrt{3} \cos(\varphi - \pi/6)}, \quad \sigma_r = 2p \frac{\cos \varphi}{\sqrt{3} \cos(\varphi - \pi/6)}$$

$$\sigma_i = \frac{p}{\cos(\varphi - \pi/6)} \quad \varepsilon_i = \frac{p}{E \cos(\varphi - \pi/6)} \quad (1.12)$$

$$R^2/r^2 = \operatorname{tg}(\varphi - \pi/6)/\sqrt{3}$$

Для идеальной пластичности ($\lambda=1$) было получено [1, 4]:

$$\varepsilon_i = C_T \exp(\sqrt{3}\varphi)/\sin \varphi \quad (1.13)$$

$$C_T = \sigma_T/E \sin \varphi_T \exp[-\sqrt{3}\varphi_T], \quad \varphi_T = \arccos p/\sigma_T + \pi/6 \quad (1.14)$$

В уравнениях (1.14) φ_T — значение параметра, соответствующего границе пластичности, где $r=r_T$ и $\varepsilon_i=\sigma_T/E$.

Из уравнения (1.12) для упругого состояния для точки, соответствующей $\sigma_i=\sigma_T$ и $\varepsilon_i=\sigma_T/E$ получим $\varphi_T = \arccos p/\sigma_T + \pi/6$, совпадающее со значением φ_T для идеального пластичного материала.

Учитывая существование функции $\varepsilon_i=f(\varphi)$ во всем диапазоне параметра упрочнения λ от единицы до нуля включительно, можно сделать вывод, что параметр φ_T , определяющий границу пластической зоны, не зависит от параметра упрочнения λ и определяется зависимостью $\varphi_T = \arccos p/\sigma_T + \pi/6$ справедливой и для упругого поведения материала.

Этот же результат получаем, если напряжения в упругой области будем искать в виде [1] $\sigma_{i,r} = A \pm B/r^2$, где A и B — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Из условия $\sigma_i=p$ на бесконечности получаем $A=p$.

Приравнявая напряжения на границе упругой и пластической области, где $\varphi=\varphi_T$ и $r=r_T$ будем иметь $p=1/\sqrt{3}\sigma_T[\cos \varphi_T + \cos(\varphi_T - \pi/3)]$ и $\varphi_T = \arccos(p/\sigma_T) + \pi/6$. Произвольная постоянная C_e определяется из условия $\varepsilon_i=\sigma_T/E$ при $\varphi=\varphi_T$ на границе упругой и пластической областей.

Подставляя в уравнение (1.11) $\varepsilon_i=\sigma_T/E$ и $\varphi=\varphi_T$, получаем

$$C_e = \sigma_T/E [\sin \varphi_T + (1-\lambda)\sqrt{3} \cos \varphi_T]^\alpha \exp\{[(1-\lambda)\alpha - 1]\sqrt{3}\varphi_T\} \quad (1.15)$$

Отметим, что при $\lambda=1$ и $\alpha=1$, значение C_e совпадает со значением C_T по формуле (1.14), найденным для случая идеальной пластичности. Используя второе уравнение (1.14), получаем

$$\sin \varphi_T = \frac{p}{2\sigma_T} \left[1 + \sqrt{3 \left[\left(\frac{\sigma_T}{p} \right)^2 - 1 \right]} \right], \quad \cos \varphi_T = \frac{p}{2\sigma_T} \left[\sqrt{3} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_T}{p} \right)^2 - 1} \right] \quad (1.16)$$

Уравнения (1.16) позволяют привести выражение (1.15) к виду

$$C_e = 1/2 p E^{-1} [4 - 3\lambda + \lambda \sqrt{3 \left[(\sigma_T/p)^2 - 1 \right]}]^\alpha \exp\{[(1-\lambda)\alpha - 1]\sqrt{3}\varphi_T\} \quad (1.17)$$

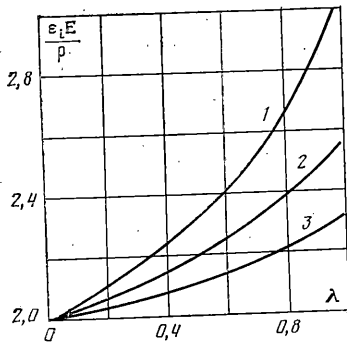
которое при $\lambda=0$ дает значение $C_e=2p/E$, совпадающее с постоянной уравнения системы (1.12) для ε_i упругого состояния.

Таким образом величина C_e , являющаяся константой по отношению к параметру φ , одновременно является функцией двух параметров — нагрузки p/σ_T и параметра упрочнения λ и существует во всем диапазоне нагрузок p/σ_T и параметра упрочнения λ .

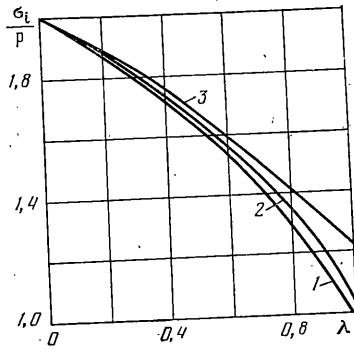
При граничных значениях параметра упрочнения функция $C_e = f(p/\sigma_T, \lambda)$ приобретает соответствующие значения для частных случаев — идеальной пластичности ($\lambda=1$) и упругого состояния ($\lambda=0$) материала.

После подстановки в уравнение (1.14) значения C_e по формулам (1.15) или (1.17) определяется ε_i , а по формуле (1.1) σ_i .

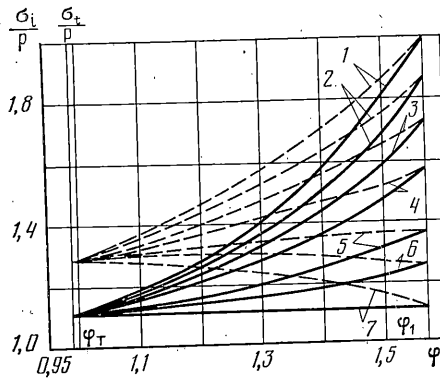
Отметим, что при $\lambda=1$ выражение (1.11) обращается в зависимость (1.13), соответствующую идеально пластичному материалу, а при $\lambda=0$ уравнение (1.14) превращается в зависимость, соответствующую упругому поведению материала.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Анализ показывает, что интенсивность деформаций ϵ_i и ее максимальная составляющая $\epsilon_i = \epsilon_i \sin \varphi$ всегда максимальны на контуре отверстия при $\varphi = \pi/2$. Выражение для ϵ_i в этом случае упрощается и принимает вид

$$\epsilon_i = C_\epsilon \exp \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{3} \pi [1 - \alpha(1 - \lambda)] \right\} \quad (1.18)$$

На фиг. 2, 3 приведены расчетные зависимости для интенсивности деформаций и напряжений $\epsilon_i = f(p/\sigma_T, \lambda)$ и $\sigma_i = f(p/\sigma_T, \lambda)$ при $p/\sigma_T = 1$ (кривые 1); $p/\sigma_T = 0,9$ (кривые 2) и $p/\sigma_T = 0,8$ (кривые 3) в диапазоне параметра упрочнения от $\lambda = 1$ до $\lambda = 0$ на контуре отверстия.

Из зависимости следует, что влияние уровня нагрузки возрастает с увеличением пластичности материала, достигая максимума при $\lambda = 1$.

Анализ показывает, что характер распределения интенсивности напряжений σ_i и главного напряжения σ_1 по сечению существенно зависит от параметра упрочнения материала. При повышенной пластичности материала ($\lambda > 0,8$) характер распределения напряжений более сложный, чем при параметре упрочнения для $\lambda < 0,8$. При $\lambda < 0,8$ при любом уровне нагрузки напряжения σ_i всегда максимальны на контуре отверстия и как и при упругом поведении материала уменьшаются с уменьшением параметра φ (увеличением текущего радиуса r).

При $\lambda > 0,8$ максимум напряжений σ_i смещается от контура в глубь сечения, причем величина смещения возрастает с увеличением параметра λ и достигает максимума при $\lambda = 1$. Смещение максимума напряжений в глубь материала характерно для пластичного материала и в условиях плоской деформации [1.3], что обуславливается влиянием радиального напряжения σ_r . На фиг. 4 приведены зависимости $\sigma_i/p = f(\lambda, \varphi)$ (сплошные кривые) и $\sigma_i/p = f(\lambda, \varphi)$ (штриховые кривые) при $p/\sigma_T = 0,9$ в пластической зоне при различных значениях λ (кривые 1-7 - соответствуют $\lambda = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9; 1,0$).

Анализ полученных зависимостей подтверждает вывод работы [7], согласно которой характер деформированного состояния таков, что дефор-

мация остается максимальной на контуре в процессе нагружения. Интенсивность же деформации максимальная на контуре убывает с удалением от контура и тем медленнее, чем больше нагрузка (чем больше пластическая область). Разрушение (зона максимального σ_i) может происходить и на некотором удалении от поверхности контура.

Отметим постоянство параметра φ_T при $p/\sigma_T = \text{const}$ и постоянство значений σ_i и σ_r на границе пластичности при любом параметре упрочнения λ , что вытекает из уравнений (1.11) и (1.17).

Отметим также, что радиальное напряжение σ_r в отличие от окружного напряжения σ_i в пластической зоне изменяется незначительно с изменением параметра упрочнения материала λ .

2. Для окончательного решения задачи осталось установить зависимость параметра φ от текущего значения радиуса r по сечению.

Для этого воспользуемся уравнением (1.6) и учтем, что из второго уравнения системы (1.8) следует

$$\frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i} = d\varphi \left[\sqrt{3} + \frac{[1+3(1-\lambda)] \cos \varphi}{\sin \varphi + \sqrt{3}(1-\lambda) \cos \varphi} \right] \quad (2.1)$$

После подстановки уравнения (2.1) в уравнение (1.6) получаем зависимость, определяющую связь текущего радиуса с параметром φ :

$$r^2 = C_R \exp \{ 2(K-1/\sqrt{3}) Z_1^\beta Z_2^\gamma / \sin^2(\varphi - \pi/6) \} \quad (2.2)$$

$$K = \frac{1+3(1-\lambda)(2-3\lambda)}{2\sqrt{3}(3\lambda^2-6\lambda+4)}, \quad \beta = \frac{[1+3(1-\lambda)](2-\lambda)}{2(3\lambda^2-6\lambda+4)}$$

$$\gamma = \frac{\lambda(3\lambda-2)[1+3(1-\lambda)]}{2(4-3\lambda)(3\lambda^2-6\lambda+4)}$$

$$Z_1 = \sqrt{3} \sin^2 \varphi + (2-3\lambda) \sin \varphi \cos \varphi - (1-\lambda) \sqrt{3} \cos^2 \varphi$$

$$Z_2 = (\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi - 1) / (\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 3(1-\lambda))$$

Постоянную C_R определяем из начальных условий. На контуре отверстия при $\varphi_1 = \pi/2$ имеем $r=R_1$, $Z_1 = \sqrt{3}$ и $Z_2 = 1$. В этом случае

$$C_R = \frac{1}{4} R^2 3^{1-\beta/2} \exp [\pi(1/\sqrt{3}-K)] \quad (2.3)$$

В результате уравнение (2.2) приводится к виду

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{3^{1-\beta/2}}{4} \frac{Z_1^\beta Z_2^\gamma}{\sin^2(\varphi - \pi/6)} \exp [(2\varphi - \pi)(K - 1/\sqrt{3})] \quad (2.4)$$

Можно убедиться, что уравнение (2.4) совпадает с известным решением для случая идеальной пластичности ($\lambda=1$) [1], когда

$$r^2/R^2 = \frac{1}{2} \sqrt{3} \exp [\sqrt{3}(\pi/2 - \varphi)] / \sin(\varphi - \pi/6) \quad (2.5)$$

Для упругого поведения материала ($\lambda=0$):

$$r^2/R^2 = \sqrt{3} \operatorname{ctg}(\varphi - \pi/6) \quad (2.6)$$

Это значение дает и уравнение (2.2) после подстановки в него параметра $\lambda=0$.

Уравнение (2.4) после подстановки параметра $\varphi = \varphi_T = \arccos p/\sigma_T + \pi/6$ позволяет определить радиус пластичности r_T , разделяющий упругую и пластическую зоны, где интенсивность напряжений и деформаций достигают значений σ_T и σ_T/E соответственно.

Решение несколько усложняется, если кроме внешней нагрузки интенсивности p действует по внутреннему контуру отверстия нагрузка ин-

тенсивности g . В этом случае значение параметра φ_T остается неизменным и равным $\varphi_T = \arccos p/\sigma_T + \pi/6$.

Действительно, задавая напряжения в упругой зоне в виде [1, 4] $\sigma_{i,r} = A \pm B/r^2$ и учитывая, что на бесконечности $\sigma_{i,r} = p$, получаем $A = p$.

Затем приравнивая напряжения при $\varphi = \varphi_T$ напряжениям в упругой зоне при $r = r_T$, получаем систему

$$p + B/r_T^2 = 2/\sqrt{3} \sigma_T \cos(\varphi_T - \pi/3) \quad (2.7)$$

$$p - B/r_T^2 = 2/\sqrt{3} \sigma_T \cos \varphi_T$$

из которой следует $\varphi_T = \arccos p/\sigma_T + \pi/6$.

Уравнение (1.14) для ε_i в рассматриваемом случае остается справедливым, как и зависимости (1.15) и (1.17) для константы C_ε . Сохраняется в этом случае и общий вид зависимости (2.2) для функции $r = f(\varphi)$. Изменяется только произвольная постоянная C_R в уравнении (2.2). Для определения постоянной C_R необходимо определить значение параметра φ на контуре отверстия. Как и при $g = 0$, параметр φ_1 определяем из уравнения для σ_r на контуре отверстия. При $r = R$ и $\varphi = \varphi_1$ имеем $\sigma_r = 2/\sqrt{3} \sigma_i \cos \varphi_1 = -g$.

Учитывая, что $\sigma_i = \lambda \sigma_T + (1 - \lambda) E \varepsilon_i$, приходим к трансцендентному уравнению

$$-\frac{g\sqrt{3}}{2\sigma_T} = \cos \varphi_1 \left[\lambda + \frac{(1 - \lambda) E C_\varepsilon \exp\{[1 - \alpha(1 - \lambda)]\sqrt{3}\varphi_1\}}{\sigma_T [\sin \varphi_1 + (1 - \lambda)\sqrt{3} \cos \varphi_1]^\alpha} \right] \quad (2.8)$$

которое удобно решать графически. При этом следует учитывать что φ_1 лежит в диапазоне от $\pi/2$ при $g = 0$ до $\varphi_1 = \arccos(-1/2 g\sqrt{3}/\sigma_T)$.

Этот вывод следует из анализа напряженного состояния при предельных параметрах пластичности.

Для упругого поведения материала ($\lambda = 0$) имеем

$$\sigma_{i,r} = p \pm (p + g) R^2/r^2 \quad \sigma_i = \sigma_r = (p^2 + 3(p + g)^2 R^4/r^4)^{1/2} = p/\cos(\varphi - \pi/6) \quad (2.9)$$

$$r^2/R^2 = \sqrt{3}(p + g)/p \operatorname{ctg}(\varphi - \pi/6)$$

Из последнего уравнения системы (2.9) следует $\varphi_1 = \arccos \operatorname{ctg}(p/[\sqrt{3}(p + g)] + \pi/6)$. При $g = 0$ получаем $\varphi_1 = \pi/2$.

С ростом значения g/p растет и параметр φ_1 достигая максимума $\varphi_1 = \pi/3$ при $p/g \rightarrow 0$.

Для идеально пластичного материала ($\lambda = 1$) из условия $\sigma_r = 2/\sqrt{3} \sigma_T \cos \varphi_1 = -g$ при $\varphi = \varphi_1$ получаем $\varphi_1 = \arccos(-\sqrt{3}/2 g/\sigma_T)$, откуда следует, что $\varphi_{1 \min} = \pi/2$ при $g = 0$. С ростом значения g/σ_T параметр φ_1 увеличивается. В частности, при $g/\sigma_T = 1$, параметр $\varphi_1 = 5/6\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.
2. *Надаи А.* Пластичность. М.—Л.: Глав. ред. общетехн. лит., 1936. 280 с.
3. *Галин Л. А.* Плоская упругопластическая задача.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 367—386.
4. *Дженелидзе Г. Ю.* Концентрация напряжений на краю кругового отверстия в равномерно напряженном поле при пластической деформации.— Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1947, № 3, с. 111—117.
5. *Махонина Т. М.* Упругопластическое состояние шайбы при степенном упрочнении. Расчеты на прочность: Сб. статей. М.: Машгиз, 1960, Вып. 5, с. 212—225.
6. *Шапиро Г. С.* Об интегрировании в квадратурах уравнений плоской одномерной задачи теории пластичности с учетом упрочнения материала.— ПММ, 1949, т. 13, вып. 6, с. 659—662.
7. *Панферов В. М.* Концентрация напряжений при упругопластических деформациях.— Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 4, с. 47—66.

Москва

Поступила в редакцию
7.II.1985