

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ СВОБОДНО КАТЯЩЕГОСЯ КОЛЕСА, СНАБЖЕННОГО УПРУГИМ ПНЕВМАТИКОМ

САННИКОВ В. А.

Изучение устойчивости и управляемости транспортных средств на упругих колесах (автомобиль, самолет и так далее) требует знания сил, действующих в контакте пневматиков с опорной поверхностью. Для определения этих сил используются голономные или неголономные уравнения связей. В практических расчетах чаще используются голономные связи как наиболее простые. Для использования неголономных связей, в частности предложенных в [1], необходимо экспериментально определять коэффициенты их уравнений. Методика таких экспериментов в настоящее время недостаточно разработана, а проведение их требует больших материальных затрат, особенно для колес большого размера. В связи с этим практический интерес представляет изучение возможностей определения коэффициентов уравнений неголономных связей упругого колеса по данным статических испытаний.

В публикуемой статье предлагается метод определения коэффициентов уравнений неголономных связей по известным из статического эксперимента размерам пятна контакта пневматика с опорной поверхностью и закону изменения поперечного смещения средней линии пневматика. Проведено сравнение величин этих коэффициентов, полученных при использовании предлагаемого метода и метода, изложенного в [2]. Показано, что при внесении поправки в определение угла увода по теории И. Рокара получается теория М. В. Келдыша [1].

Выведем уравнения неголономных связей упругого колеса при качении. На фиг. 1 показаны проекции всех характерных линий и точек упругого пневматика на опорную плоскость (вид сверху): k — проекция центра колеса, p — центр пятна контакта, o_1 — центр масс транспортного средства, v_p — вектор скорости точки p , a и b — координаты центра колеса в системе координат $o_1x_1z_1$, связанной с транспортным средством, δ и ψ — углы увода и рыскания колеса, Γ — траектория качения колеса (точки p), ξ — поперечное смещение центра (точки p) пятна контакта. Поперечное смещение пятна контакта ξ считается положительным, если центр пятна контакта смещен относительно центра колеса вправо. Угол увода δ считается положительным, если колесо развернуто относительно направления вектора v_p против часовой стрелки. Поворот и смещение отсчитываются наблюдателем, смотрящим на колесо сверху. На фиг. 1 $\xi > 0$, $\delta < 0$ и $\psi > 0$.

Обозначим координаты точки p , центра масс транспортного средства и центра колеса в системе координат oxz , соответственно (z_p, x_p) , (z_g, x_g) и (z_k, x_k) . С учетом равенств

$$\begin{aligned} x_p &= x_k + \xi \sin \psi, & z_p &= z_k + \xi \cos \psi \\ x_k &= x_g + b \cos \psi + a \sin \psi \end{aligned} \quad (1)$$

и соотношения $dx_p/dz_p = \operatorname{ctg}(\psi - \delta)$, следующего из фиг. 1, имеем

$$\xi' = -\frac{1}{\cos \delta} [z_g' \cos(\psi - \delta) + x_g' \sin(\psi - \delta) - (a + \xi) \psi' \sin \delta] + b \psi' \quad (2)$$

Уравнение (2) — первое уравнение неголономных связей, из которого следует соотношение

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{z_g' \cos \psi + x_g' \sin \psi - b \psi' + \xi'}{x_g' \cos \psi - z_g' \sin \psi + (a + \xi) \psi'} \quad (3)$$

и видно, что скорость поперечного смещения пятна контакта может значительно изменять угол увода по сравнению с исходным. В выражениях (2) и (3) величины z_g' , x_g' , ψ и ψ' определяются интегрированием уравнений движения транспортного средства.

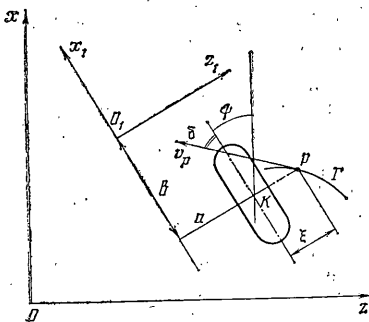
Для определения угла увода колеса составим второе уравнение неголономных связей. Согласно гипотезе И. Рокара

$$\operatorname{tg} \delta = -\xi/r \quad (4)$$

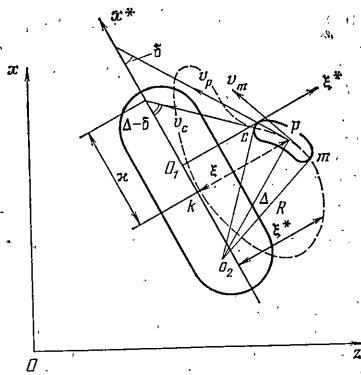
где r — радиус необжатого в вертикальном направлении колеса.

Это предположение позволяет достаточно просто определять угол увода, однако не учитывает конструктивных и эксплуатационных характеристик упругого колеса. Уточним соотношение (4), полагая, что векторы v_m , v_p и v_c скоростей движения точек m , p и c (m и c — точки пересечения проекции средней линии, лежащей на поверхности деформированного пневматика, с границей площади пятна контакта) направлены по касательным к траектории качения колеса в точках m , p и c , соответственно, а средняя линия пятна контакта $срм$ совпадает с траекторией качения колеса.

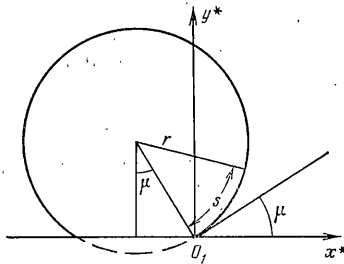
На фиг. 2 o_2 — мгновенный центр поворота пятна контакта, $so_2 = po_2 = mo_2$ — радиус кривизны траектории качения упругого колеса; штриховая линия — проекция средней линии колеса, лежащей на поверхности деформированного колеса, на



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

опорную поверхность. Система координат oxz связана с опорной поверхностью, система $o_1x^*\xi^*$ — с колесом, причем так, что ось o_1x^* направлена вдоль проекции средней линии недеформированного пневматика, oy^* нормальна опорной поверхности, а $o_1\xi^*$ проходит через точку c ; s — длина дуги недеформированной средней линии пневматика.

В системе координат $o_1x^*y^*\xi^*$ из фиг. 3 имеем ($l = |cm|$ — длина пятна контакта):

$$(ds/dx^*)_{x^*=0} = d/\sqrt{d^2 - l^2 \cos^2 \delta}, \quad d = 2r \quad (5)$$

Экспериментальные исследования [3] показывают, что зависимость от длины дуги s поперечного смещения ξ^* точек средней линии пневматика определяется зависимостью.

$$\xi^* = \xi_c e^{-s/L} \quad (6)$$

где ξ_c — поперечное смещение точки c , L — экспериментальный коэффициент, зависящий от ширины пневматика, наружного диаметра и вертикального обжатия [3]. Согласно фиг. 2, в системе координат $o_1x^*\xi^*$ имеем

$$(d\xi^*/dx^*)_{x^*=0} = -\operatorname{tg}(\Delta - \delta) \quad (7)$$

Так как $\xi_c = \xi + 1/2l \sin \delta$ и все производные при $x^*=0$ и $s=0$ совпадают, из (6) с учетом (7) найдем

$$\operatorname{tg}(\Delta - \delta) = (\xi + 1/2l \sin \delta) d / (L\sqrt{d^2 - l^2 \cos^2 \delta}) \quad (8)$$

Из фиг. 2 имеем $\operatorname{tg} \Delta = 1/2l/R$. Так как $1/R = d(\psi - \delta)/ds = (\psi - \delta^*)/s^*$ и $s^* = v_p$, то

$$\operatorname{tg} \Delta = 1/2l(\psi^* - \delta^*)/v_p \quad (9)$$

С учетом (9) уравнение (8) преобразуется к виду

$$\frac{(\xi + 1/2l \sin \delta)/d}{L\sqrt{d^2 - l^2 \cos^2 \delta}} = \frac{-l\delta^* + l\psi^* - 2v_p \operatorname{tg} \delta}{2v_p - l(\delta^* + \psi^*) \operatorname{tg} \delta} \quad (10)$$

где $v_p = |v_p|$; точки означают дифференцирование по времени.

Уравнение (10) является вторым уравнением неголономных связей, которое можно упростить, если учесть, что $2v_p \gg l(\delta^* + \psi^*) \operatorname{tg} \delta$ и положить $\sin \delta \approx \delta$, $\cos \delta \approx 1$. В этом случае второе уравнение неголономных связей будет линейным:

$$\delta^* = -\frac{2dv_p}{L\sqrt{d^2 - l^2}} \xi - \frac{2v_p}{l} \left(1 + \frac{dl}{2L\sqrt{d^2 - l^2}} \right) \delta + \psi^* \quad (11)$$

Экспериментально установлено [3], что при наклоне плоскости колеса к опорной поверхности дополнительное поперечное смещение пятна контакта ξ_γ определяется выражением $\xi_\gamma = 0,57N\gamma/k$, где N — нормальная нагрузка на колесо, k — жесткость пневматика в поперечном направлении, γ — угол наклона плоскости качения колеса ($\gamma > 0$, если $\xi_\gamma > 0$).

Полагая, что поперечное смещение точки c в этом случае определяется соотношением $\xi_c = \xi + 1/2 l \sin \delta + \xi_\gamma$, и повторяя все выкладки, сделанные для вывода уравнения (11), получим

$$\delta^* = -\frac{2dv_p}{L\sqrt{d^2-l^2}} \xi - \frac{2v_p}{l} \left(1 + \frac{dl}{2L\sqrt{d^2-l^2}}\right) \delta + 0,57 \frac{2Nd v_p}{kLl\sqrt{d^2-l^2}} \gamma + \psi^* \quad (12)$$

Если для данного колеса нет экспериментального коэффициента L , а известны жесткость в поперечном направлении k и зависимость поперечной силы Z на колесе от угла увода, полученные соответственно в статических экспериментах и при качении с установившимся углом увода, то для получения второго уравнения неголономных связей можно применить другой метод [2]. В этом случае из фиг. 2 имеем

$$\operatorname{tg}(\Delta - \delta) = (\xi + 1/2 l \sin \delta) / (\kappa - 1/2 l \cos \delta) \quad (13)$$

При качении колеса с установившимся углом увода $R = \infty$ или $\Delta = 0$ и в этом случае $v_c = v_p = v_m$. Тогда из (13) получим

$$\operatorname{tg} \delta = -\xi / \kappa \quad (14)$$

Сравнивая уравнения (14) и (4), видим, что это выражение является уточнением уравнения (4).

Определим величину κ для тех углов δ , для которых зависимость $Z(\delta)$ линейна. В этом случае

$$\delta = k\xi / Z^0, \quad Z^0 = (\partial Z / \partial \delta)_{\delta=0} \quad (15)$$

Учитывая выражения (9), (14), (15) и полагая $\operatorname{tg}(\Delta - \delta) \approx \Delta - \delta$, получим

$$\delta^* = \frac{4kv_p}{l(2Z^0 + kl)} \xi - \frac{2v_p}{l} \left(1 - \frac{kl}{2Z^0 + kl}\right) \delta + \psi^* \quad (16)$$

Учет влияния угла наклона колеса γ вместо (16) приведет к уравнению

$$\delta^* = \frac{4kv_p}{l(2Z^0 + kl)} \xi - \frac{2v_p}{l} \left(1 - \frac{kl}{2Z^0 + kl}\right) \delta - \frac{1,14Nv_p\gamma}{(Z^0 + 1/2 lk)l} + \psi^* \quad (17)$$

Таким образом, уравнения (2) и (12) или (2) и (17) представляют собой уравнения неголономных связей упругого колеса, свободно катящегося по твердой опорной поверхности.

Для сравнения величин соответствующих коэффициентов уравнений (12) и (17), полученных разными методами, введем обозначения по первому и второму методам соответственно

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{2d}{Ll\sqrt{d^2-l^2}}, & \alpha &= -\frac{4k}{l(2Z^0 + kl)} \\ \beta &= -\frac{2}{l} \left(1 + \frac{dl}{2L\sqrt{d^2-l^2}}\right), & \beta &= -\alpha \frac{Z^0}{k} \\ \omega &= \frac{1,14Nd}{kLl\sqrt{d^2-l^2}}, & \omega &= -\frac{1,14N}{(Z^0 + 1/2 lk)l} \end{aligned} \quad (18)$$

Для авиационных колес 930×305 при $N=70$ кН имеем: по первому методу $\alpha = -23,3$ 1/м², $\beta = -12,09$ 1/рад·м, $\omega = 1,604$ 1/рад·м; по второму методу $\alpha = -24,6$ 1/м², $\beta = -12,2$ 1/рад·м, $\omega = 1,707$ 1/рад·м.

Для автомобильного колеса 28-14 по данным [4] имеем $\alpha = -23,8$ 1/м² и $\beta = -8,94$ 1/рад·м.

С учетом обозначений (18) уравнение (12) или (17) может быть записано так:

$$\delta^* = (\alpha\xi + \beta\delta + \omega\gamma)v_p + \psi^* \quad (19)$$

Выражение (19) становится уравнением неголономных связей, полученных в [1], если в нем положить $\delta = -\varphi$, где φ — угловая деформация пневматика.

Сравним связи угла увода колеса с поперечным смещением пятна контакта при качении с установившимся углом увода для различных методов вывода второго уравнения неголономных связей.

При $\delta^* = 0$, $\psi^* = 0$, $\gamma = 0$ для авиационного колеса 930×305 из уравнения (12) имеем $\delta = 2d\xi / (2L\sqrt{d^2-l^2} + dl) = -1,93\xi$ рад, а из уравнения (17) $\delta = k\xi / Z^0 = -2,02\xi$ рад.

Согласно гипотезе Рокара $\delta = -\xi / r = -2,15\xi$ рад.

Сравнение полученных выражений показывает практическую пригодность обоих методов и гипотезы Рокара для определения второго уравнения неголономных связей свободно катящегося упругого колеса.

В уравнениях (12) и (17) величина v_p определяется уравнением $v_p = [x_g \cos \psi - z_g \sin \psi + (a + \xi) \dot{\psi}] / \cos \delta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси.— Тр. ЦАГИ, 1945, вып. 564, 34 с.
2. Морозов Б. И., Каганов Н. Т., Шишацкий А. И., Брылев В. В. Математическое выражение движения автомобильного колеса с неустановившимся уводом.— Автомоб. пром-сть, 1972, № 12, с. 28–30.
3. Smiley R. F., Horne B. W. Mechanical properties of pneumatic tires with special reference to modern aircraft tires.— NASA, 1960, Techn. report R-64, 58 p.
4. Литвинов А. С. Управляемость и устойчивость автомобиля. М.: Машиностроение, 1971, 416 с.

Рига

Поступила в редакцию
6.X.1983