МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1986

УДК 534.014

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРИ ШИРОКОПОЛОСНОМ СЛУЧАЙНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

КОВАЛЕВА А. С.

Задачи синтеза оптимального управления стохастическими системами не всегда могут быть решены точно. Даже в тех случаях, когда производящий оператор стохастического процесса выписывается в явном виде (для систем с марковскими или пуассоновскими возмущениями), аналитическое решение уравнения Беллмана остается чрезвычайно сложной задачей и требует привлечения приближенных или численных методов [1]. Еще более сложными оказываются задачи оптимального управления с возмущениями иной природы, вообще говоря, немарковскими, для которых оператор уравнения динамического программирования нельзя выписать в явном виде.

В работе рассматриваются слабоуправляемые системы с малыми случайными возмущениями, отличными от «белого шума» или марковского процесса. Для анализа систем используется метод «диффузионной аппроксимации» [2–5]. Сущность подхода состоит в аппроксимации исходной возмущенной системы предельным стохастическим дифференциальным уравнением Ито и в построении управления, минимизирующего искомый функционал на траекториях полученной предельной диффузионной системы. В [6] подобный прием использовался для построения программного управления, в публикуемой работе строится синтез управления в системах с широкополосным случайным возмущением.

Доказана близость найденного решения к оптимальному для двух типов управляемых систем. Рассмотрены некоторые задачи управления колебаниями. Приводятся модельные примеры: управляемый спуск в атмосфере и управление колебаниями линейной системы при параметрическом возмущении.

1. Пусть уравнение возмущенного движения приведено к виду

$$x^{\cdot}=\varepsilon^{-1}F(x,\ \xi(\tau/\varepsilon^2))+G(x,\ u),\quad x(0)=r \tag{1.1}$$

Здесь x, F, G — n-мерные векторы, $\xi(t)$ — l-мерный вектор случайных возмущений, компоненты которого — непрерывные справа, ограниченные стационарные случайные процессы, удовлетворяющие условию равномерно сильного перемешивания [2, 7], причем $\mathrm{M}F(x,\ \xi)=0$ при фиксированном x, u — m-мерный вектор управления, определяемый из условия минимума функционала

$$J(x,\ u)=\mathrm{M}\Psi(x(\tau_f)) \tag{1.2}$$

на траекториях системы (1.1) в области $u\in U\subset R_m$, ε — малый параметр, τ_f — фиксированный момент окончания процесса.

Предполагается, что при $x\in R_n$, $u\in U$, $0\leqslant\tau\leqslant\tau_f$ функция Ψ непрерывна и удовлетворяет условию полиномиального роста по x [8], функции F, G непрерывны и возрастают не быстрее, чем $|x|$ при $|x|\to\infty$, функция F обладает непрерывными и ограниченными частными производными по x до второго порядка включительно, частные производные функции G по x, u непрерывны и ограничены. Чтобы подчеркнуть зависимость траектории x от управляющего воздействия, в случае необходимости будем писать $x=x(\tau,\ u)$.

Следуя [1], назовем управление $u(\tau,\ x)$ допустимым на отрезке $[0,\ \tau_f]$, если для всех $x(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant\tau_f$ функция $u\in U$ и при $u=u(\tau,\ x)$ существует единственное решение уравнения (1.1). Если $u(\tau,\ x)$ — кусочно-непрерывная функция своих аргументов, то при сделанных предположениях относительно коэффициентов решение уравнения (1.1) существует и единственно [9].

Решение задачи (1.1), (1.2) обычно связано с решением уравнения динамического программирования. Поэтому наиболее хорошо изучены задачи управления при марковских и пуассоновских возмущениях, для которых можно в явном виде выписать уравнение динамического программирования. Вместе с тем, опираясь на результаты работ [2, 6], можно построить приближенное решение задачи (1.1), (1.2), минуя анализ уравнения Беллмана.

Пусть существует оптимальное управление $u_*(\tau, x)$, минимизирующее функционал (1.2) на траектории системы (1.1), $x_*=x(\tau, u_*)$ и $J(x_*, u_*)=\Psi(x(\tau_f, u_*))$.

Рассмотрим следующее уравнение динамического программирования:

$$L_0V^\circ(\tau, x)+H(x, V_x^\circ)=0, \quad V^\circ(\tau_f, x)=\Psi(x) \tag{1.3}$$

$$H(x,p)=\min_u(G(x,u),p) \tag{1.4}$$

и коэффициенты оператора L_0:

$$L_0=\partial/\partial\tau+\sum_{j=1}^n b_j(x)\,\partial/\partial x_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial^2/\partial x_i\,\partial x_j \tag{1.5}$$

вычисляются по формулам

$$b_j(x)=\int_{-\infty}^0 b_j(x,0,t)\,dt, \qquad a_{ij}(x)=\int_{-\infty}^\infty a_{ij}(x,0,t)\,dt \tag{1.6}$$

$$b(x, s, t)=\mathrm{M}[F_x(x, \xi(s))F(x, \xi(t))]$$

$$a_{ij}(x, s, t)=\mathrm{M}[F_i(x, \xi(s))F_j(x, \xi(t))]$$

если пределы существуют равномерно по x [2].

Покажем, что управление $u_0(\tau, x)$, найденное из решения краевой задачи (1.3), (1.4), оказывается квазиоптимальным по отношению к исходной системе, т. е.

$$J(x_0, u_0)-J(x_*, u_*)\leqslant C\varepsilon, \quad x_0=x(\tau, u_0) \tag{1.7}$$

Доказательство строится так же, как доказательство теоремы 3.2.1 в [1]. Рассмотрим, наряду с (1.1), уравнение Ито

$$d\zeta=[b(\zeta)+G(\zeta, u(\tau, \zeta))]d\tau+\sigma(\zeta)\,dw, \tag{1.8}$$

$$\zeta(0)=r$$

Здесь w — стандартный n-мерный винеровский процесс, $\sigma\sigma'=\|a_{ij}\|$, a_{ij} и b — коэффициенты оператора (1.5). Пусть ζ_0, ζ_* — решения уравнения (1.8) при $u=u_0(\tau, \zeta)$ и $u=u_*(\tau, \zeta)$, $J(\zeta_0, u_0)=\Psi(\zeta_0(\tau_f))$, $J(\zeta_*, u_*)=\Psi(\zeta_*(\tau_f))$.

Если функции F, G удовлетворяют перечисленным условиям гладкости и область U — компакт, то [8] существует оптимальное управление $u_{\text{opt}}\equiv u_0$, минимизирующее функционал $J(\zeta, u)$ на траекториях системы (1.8) и удовлетворяющее соотношениям (1.3), (1.4).

Функция $u_0(\tau, \zeta)$ измерима и ограничена [8], т. е. управление $u_0(\tau, x)$ является допустимым для исходной системы (1.1). Если управления u_0 и u_* — достаточно гладкие функции, то коэффициенты уравнений (1.1) и (1.8) удовлетворяют условиям работы [3], т. е. при $\varepsilon\to 0$ и $0\leqslant\tau\leqslant\tau_f$ процесс x_0 слабо сходится к процессу ζ_0, процесс x_* к процессу ζ_* соответственно. В силу слабой сходимости процессов для достаточно малых ε и любого непрерывного функционала справедлива оценка [3]:

$$|J(x_0, u_0)-J(\zeta_0\, u_0)|\leqslant C_1\varepsilon \tag{1.9}$$

$$|J(x_*, u_*)-J(\zeta_*, u_*)|\leqslant C_2\varepsilon; \quad 0\leqslant\tau\leqslant\tau_f$$

В свою очередь из оптимальности управлений u_* и u_0 на траекториях систем (1.1) и (1.8), соответственно, следуют очевидные неравенства

$$J(x_*,\ u_*)\leqslant J(\zeta_0,\ u_0)+[J(x_0,\ u_0)-J(\zeta_0,\ u_0)] \tag{1.10}$$

$$J(\zeta_0,\ u_0)\leqslant J(x_*,\ u_*)+[J(\zeta_*,\ u_*)-J(x_*,\ u_*)]$$

Из (1.9), (1.10) имеем

$$|J(x_*,\ u_*)-J(\zeta_0,\ u_0)|\leqslant C_3\varepsilon \tag{1.11}$$

Запишем $J(x_0,\ u_0)-J(x_*,\ u_*)=[J(x_0,\ u_0)-J(\zeta_0,\ u_0)]+[J(\zeta_0,\ u_0)-$ $-J(x_*,\ u_*)]$.

Оценивая выражения в квадратных скобках с учетом (1.9), (1.11), получим требуемое неравенство (1.7).

Следуя [5], можно доказать справедливость оценок (1.9)—(1.11) и вытекающего из них неравенства (1.7) и в случае ограниченного кусочно-непрерывного управления.

Замечание. Для сокращения записи ограничились рассмотрением задачи Больца. Если функционал имеет вид

$$J(x,u)=\mathrm{M}\left[\int\limits_0^{\tau_f} f(s,x(s),u(s))\,ds+\Psi(x(\tau_f))\right] \tag{1.12}$$

то введением дополнительной переменной $dx_{n+1}/d\tau=f(\tau,\ x,\ u)$, $x_{n+1}(0)=0$ задача сводится к рассмотренной и уравнение (1.4) записывается в виде

$$L_0V^\circ+H(\tau,\ x,\ V_x^\circ)=0,\quad V(\tau_f,\ x)=\Psi(x) \tag{1.13}$$

где L_0 — тот же оператор (1.5):

$$H(\tau,x,p)=\min_u[(G(x,u),p)+f(\tau,x,u)] \tag{1.14}$$

Рассмотрим пример: модельная задача управления движением твердого тела в атмосфере. Уравнение управляемого движения имеет вид [1, с. 195]: $dE/dh=u-\gamma\rho(h)E+q-\mu(h)\xi_\varepsilon(h)E$. Здесь E — кинетическая энергия вертикально падающего тела, γ, q,— коэффициенты, связанные с параметрами аппарата, h — высота, u — приведенная сила тяги двигателя, осуществляющего торможение, $\rho(h)$, $\mu(h)\xi_\varepsilon(h)$ — средняя скорость и флуктуации плотности атмосферы, причем $\xi_\varepsilon(h)$ — стационарный случайный процесс с достаточно быстро убывающей корреляционной функцией, и можно представить $\xi_\varepsilon(h)=\varepsilon^{-1}\xi(h/\varepsilon^2)$.

Требуется минимизировать кинетическую энергию аппарата в момент спуска, при $h=h_1$ при ограничениях на ресурсы управления. Функционал задачи имеет вид

$$J=\mathrm{M}\left[\int\limits_0^{h_1} u^2\,dh+k^2E^2(h_1)\right]=\min$$

Во многих задачах управления движением в атмосфере случайное возмущение $\xi_\varepsilon(h)$ рассматривают как выход некоторого формирующего фильтра, на вход которого воздействует белый шум. Уравнение движения дополняется уравнениями фильтра [1, § 2.5], и решается традиционная задача управления диффузионным процессом в системе увеличенной размерности. Асимптотический метод избавляет от необходимости выписывать дополнительные уравнения.

Управление u_0 ищется из условия (1.14):

$$H=\min\{[u-\gamma\rho(h)E+q]V_E^\circ+u^2\},\quad u_0=-{}^1/{}_2V_E^\circ \tag{1.15}$$

где V° — решение уравнения Беллмана

$$\frac{\partial V^\circ}{\partial h}+b_1E\frac{\partial V^\circ}{\partial E}+\frac{1}{2}E^2\sigma_1^2\frac{\partial^2V^\circ}{\partial E^2}+H\left(h,E,\frac{\partial V^\circ}{\partial E}\right)=0 \qquad (1.16)$$

$$V^\circ(h_1, E)=kE^2$$

а коэффициенты b_1, σ_1 вычисляются по формуле (1.6):

$$b_1=\mu^2(h)\int\limits_{-\infty}^{0} K(t)\,dt=\frac{1}{2}\mu^2(h)S(0), \quad \sigma_1^2=2b_1 \qquad (1.17)$$

Здесь $K(t)$ и $S(\omega)$ — корреляционная функция и спектральная плотность процесса $\xi(t)$, $t=h/\varepsilon^2$.

Из (1.15)–(1.17) получим (ср. [1], с. 196)

$$u_0=-P(h)E \qquad (1.18)$$

$$P(h)=k\exp\left(\int\limits_h^{h_1}p(l)\,dl\right)\left[1+k\int\limits_h^{h_1}\exp\left(\int\limits_l^{h_1}p(s)\,ds\right)dl\right]$$

$$p(h)=-2\gamma\rho(h)+\sigma_1^2(h)+2b_1(h)=-2\gamma\rho(h)+2\mu^2(h)S(0)$$

2. В задачах управления колебаниями функции G, f, как правило, зависят от быстрого времени $t=\tau/\varepsilon^2$ и уравнения движения и функционал имеют вид

$$dx/d\tau=\varepsilon^{-1}F(x,\ \xi(\tau/\varepsilon^2))+G(\tau/\varepsilon^2,\ x,\ u), \quad x(0)=r \qquad (2.1)$$

$$J(x,u)=\mathrm{M}\left[\int\limits_0^{\tau_f}f(s/\varepsilon^2, x(s), u(s))\,ds+\Psi(x(\tau_f))\right] \qquad (2.2)$$

Процесс $\xi(t)$ предполагается непрерывным ограниченным случайным процессом, удовлетворяющим условию равномерно сильного перемешивания, функции f, G периодичны или почти-периодичны по t.

Пусть, далее, функции f и Ψ непрерывны и удовлетворяют условию полиномиального роста по x, u [8], функции F, G удовлетворяют условиям роста и гладкости, перечисленным в п. 1.

Рассуждая так же, как в п. 1, можно показать, что при любом допустимом управлении процесс $x(\tau)$ слабо сходится при $\varepsilon\to0$, $0\leqslant\tau\leqslant\tau_f$ к диффузионному процессу $\zeta(\tau)$ — решению уравнения

$$d\zeta=[b(\zeta)+G(\tau/\varepsilon^2,\zeta,u)]\,d\tau+\sigma(\zeta)\,dw, \quad \zeta(0)=r \qquad (2.3)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам [2]:

$$b(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}ds\int\limits_{t_0-T}^{s}b(x,s,t)\,dt, \qquad a_{ij}(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}ds\int\limits_{t_0}^{t_0+T}a_{ij}(x,s,t)\,dt \qquad (2.4)$$

если пределы существуют равномерно по t_0, x и удовлетворяют условиям п. 1. Функции $a_{ij}(x,\ s,\ t)$, $b(x,\ s,\ t)$ те же, что в (1.5).

Как и в п. 1, можно показать, что квазиоптимальное управление $u_\varepsilon=u_\varepsilon(\tau,\ x)$ ищется из условия

$$u_\varepsilon=\arg\min H(\tau/\varepsilon_2,\ x,\ u,\ p)/u\in U=Q(\tau/\varepsilon^2,\ x,\ p) \qquad (2.5)$$

$$H(t,\ x,\ u,\ p)=(G(t,\ x,\ u),\ p)+f(t,\ x,\ u)$$

где $p=V_x^\varepsilon(\tau,\ x)$ и V^ε — решение уравнения динамического программирования

$$L_0V^\varepsilon+H^u(\tau/\varepsilon^2,\ x,\ V_x^\varepsilon)=0, \quad V^\varepsilon(\tau_f,\ x)=\Psi(x) \qquad (2.6)$$

$$H^u(t,\ x,\ p)=H(t,\ x,\ Q(t,\ x,\ p))$$

Здесь L_0 — параболический оператор (1.5) с коэффициентами (2.4).

В [10, 11] доказано, что при $\varepsilon\to 0$, $0\leqslant\tau\leqslant\tau_f$ решение уравнения (2.6) аппроксимируется решением усредненного уравнения

$$L_0V^\circ+H_0(x,\ V_x^\circ)=0,\qquad V^\circ(\tau_f,\ x)=\Psi(x) \tag{2.7}$$

$$H_0(x,p)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T H^u(t,x,p)\,dt \tag{2.8}$$

Введем в рассмотрение управление

$$u_0(\tau,\ x,\ \varepsilon)=Q(\tau/\varepsilon^2,\ x,\ V_x^\circ(\tau)) \tag{2.9}$$

где $Q(t,\ x,\ p)$ — та же функция, что в (2.5). Можно показать, что

$$J(x_0,\ u_0)-J(x_*,\ u_*)\leqslant C\varepsilon \tag{2.10}$$

т. е. управление (2.9) квазиоптимально по отношению к исходной системе. За исключением некоторых деталей доказательство оценки (2.10) практически совпадает с доказательством аналогичного соотношения (1.7) и ввиду ограниченности объема статьи не приводится.

3. Рассмотрим пример — управление параметрическими колебаниями. Уравнение движения записывается в виде

$$x^{\cdot\cdot}+2\varepsilon^2\beta x^{\cdot}+\lambda^2(1+\varepsilon\xi(t))x=\varepsilon^2u \tag{3.1}$$

Управление u выбирается таким образом, чтобы минимизировать амплитуду колебаний при ограниченных энергетических ресурсах. Задачи такого типа возникают при гашении колебаний висящего груза при помощи коррекции движения точки подвеса, при управлении возмущенным движением нелинейных колебательных систем и т. д.

Заменой

$$x=R\cos(\lambda t+\varphi),\qquad x^{\cdot}=-\lambda R\sin(\lambda t+\varphi),\qquad t=\tau/\varepsilon^2 \tag{3.2}$$

уравнение (3.1) приводится к виду (2.1):

$$dR/d\tau=[-2\beta R\sin\psi+\varepsilon^{-1}\lambda R\cos\psi\xi(\tau/\varepsilon^2)-\lambda^{-1}u]\sin\psi \tag{3.3}$$

$$d\varphi/d\tau=[-2\beta\sin\psi+\varepsilon^{-1}\lambda\cos\psi\xi(\tau/\varepsilon^2)-(\lambda R)^{-1}u]\cos\psi$$

$$\psi=\lambda\tau/\varepsilon^2+\varphi$$

Управление u ищется из условия минимума функционала

$$J=R^2(\tau_f)+\int_0^{\tau_f}(k_1R^2+k_2u^2)\,ds \tag{3.4}$$

Пусть $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним и достаточно быстро убывающей корреляционной функцией $K(\sigma)$. Выпишем коэффициенты оператора L_0 и функции H и H_0. Из (2.4), (3.3) получим

$$b_1=\beta_1R,\quad \beta_1=-b+{}^3/_{16}\lambda^2S(2\lambda),\quad a_{11}=\sigma_1^2R^2 \tag{3.5}$$

$$\sigma_1^2={}^1/_8\lambda^2S(2\lambda),\qquad a_{12}=0,\ldots,\qquad S(2\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}K(\sigma)\cos 2\lambda\sigma\,d\sigma$$

Уравнение (1.14) имеет вид

$$H=\min_u\,[k_2u^2+k_1R^2-u\lambda^{-1}(V_R^\circ\sin\psi+R^{-1}V_\varphi^\circ\cos\psi)$$

откуда

$$u_0=(2k_2\lambda)^{-1}(V_R^\circ\sin\psi+R^{-1}V_\varphi^\circ\cos\psi) \tag{3.6}$$

$$H=-(4k_2\lambda^2)^{-1}(V_R^\circ\sin\psi+R^{-1}V_\varphi^\circ\cos\psi)+k_1R^2$$

Усредняя последнее выражение, получим

$$H_0=-(8k_2\lambda^2)^{-1}[(V_R{}^\circ)^2+(R^{-1}V_\varphi{}^\circ)^2]+k_1R^2 \tag{3.7}$$

Коэффициенты и граничное условие усредненного уравнения (2.7) не зависят от φ, т. е. $V^\circ=V^\circ(\tau, R)$.

Согласно (3.5), (3.7), уравнение (2.7) принимает вид $V_\tau{}^\circ+\beta_1RV_R{}^\circ+{}^1/_2\sigma_1{}^2R^2V_{RR}{}^\circ-(V_R{}^\circ)^2/8k_2\lambda^2+k_1R^2=0$, $V^\circ(\tau_f, R)=R^2$ и совпадает с уравнением динамического программирования стационарной линейной системы с квадратичным критерием качества. Искомое решение строится в виде [1, 8]:

$$V^\circ(\tau, R)=P(\tau)R^2 \tag{3.8}$$

коэффициент P удовлетворяет уравнению

$$P^\cdot+\mu P-(2k_2\lambda^2)^{-1}P^2+k_1=0, \quad P(\tau_f)=1$$

$$\mu=2\beta_1+\sigma_1{}^2=-2\beta+{}^1/_2\lambda^2S(2\lambda)$$

Положим для простоты $k_1=0$. Тогда $P(\tau)=-2k_2\lambda\mu[(1-2k_2\lambda\mu)\times \times\exp\mu(\tau-\tau_f)-1]^{-1}>0$, $0\leqslant\tau\leqslant\tau_f$.

Из (3.2), (3.6), (3.8) следует, что управление

$$u_0=(\lambda k_2)^{-1}P(\tau)R\sin(\lambda t+\varphi)$$

реализуется в виде отрицательной обратной связи по скорости

$$u_0=-P(\tau)(k_2\lambda^2)^{-1}x^\cdot \tag{3.9}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях.— М.: Наука, 1978.
2. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью.— Теория вероятн. и ее прим., 1966, т. 11, № 3, с. 444—462.
3. *Papanicolau G. C., Kohler W.* Asymptotic theory of mixing stochastic ordinary differential equations.— Comm. Pure and Appl. Math., 1974, v. 27, p. 641—668.
4. *Kushner H. G.* Approximation and weak convergence methods for random processes with applications to stochastic systems theory.— MIT Press, Cambridge, MA, 1984.
5. *Kushner H. G.* Asymptotic distributions of solutions of ordinary differential equations with wide — band noise inputs: approximate invariant measures.— Stochastics, 1982, v. 6, p. 259—277.
6. *Ковалева А. С.* Программное управление слабоуправляемыми стохастическими системами.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1984, № 4, с. 81—85.
7. *Billingsley P.* Convergence of probability measures.— New York, 1968.
8. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.— М.: Мир, 1978.
9. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М.: Наука, 1969.
10. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений.— Матем. сборник, 1970, т. 81, № 1, с. 53—61.
11. *Bensoussan A., Boccardo L., Murat P.* Homogenisation of Bellman equation.— In: Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 1985, v. 69, p. 249—260.

Москва

Поступила в редакцию 23.VI.1983