МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1986

УДК 531.1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ТРЕТЬИМ

ПАШКОВ А. Г., ТЕРЕХОВ С. Д.

Рассматривается позиционная дифференциальная игра сближения – уклонения двух однотипных динамических объектов (преследователей) с третьим (убегающим) с невыпуклой функцией платы. Время окончания игры фиксировано. Платой является расстояние между преследуемым объектом и ближайшим к нему преследователем в момент окончания игры. Построена функция цены игры для всех возможных позиций, которая оказалась склеенной из четырех гладких функций. Работа близка по тематике к исследованиям [1–10].

1. Движение преследователей $P_i(y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$ $(i=1, 2)$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{y}_1^{(i)} &= y_3^{(i)}, & \dot{y}_3^{(i)} &= -\alpha y_3^{(i)} + u_1^{(i)} \\ \dot{y}_2^{(i)} &= y_4^{(i)}, & \dot{y}_4^{(i)} &= -\alpha y_4^{(i)} + u_2^{(i)} \end{aligned} \qquad (1.1)$$

с ограничениями на управления

$$[(u_1^{(i)})^2+(u_2^{(i)})^2]^{1/2} \leqslant \mu, \qquad \mu>0 \qquad (1.2)$$

Преследуемый объект $E(z_1, z_2)$ движется согласно уравнениям

$$\dot{z}_1=z_3, \quad \dot{z}_3=-\beta z_3+v_1, \quad \dot{z}_2=z_4, \quad \dot{z}_4=-\beta z_4+v_2 \qquad (1.3)$$

с ограничением на управление

$$[v_1^2+v_2^2]^{1/2}\leqslant\nu, \quad \nu>0 \qquad (1.4)$$

Здесь $u^{(i)}=(u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$, $v=(v_1, v_2)$ – векторы управления игроков. Предполагается, что объекты в течение всего времени движутся по некоторой фиксированной в пространстве плоскости, а μ и ν связаны следующими неравенствами

$$\mu\leqslant\nu, \qquad \mu\alpha^{-1}\leqslant\nu\beta^{-1} \qquad (1.5)$$

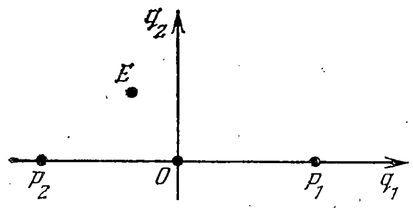
Причем, хотя бы в одном из этих соотношений имеет место строгое неравенство.

Время окончания игры ϑ зафиксировано. Плата игры задается непрерывной функцией $\sigma(x)$:

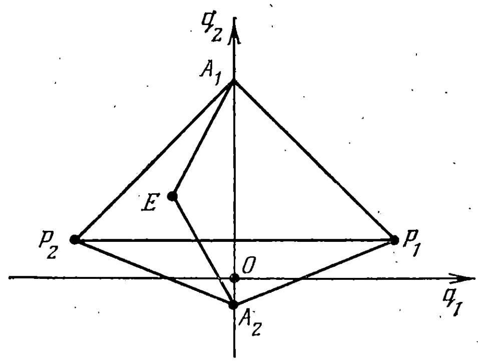
$$\begin{gathered} \sigma(x(\vartheta))=\min[\sigma_1(x(\vartheta)), \sigma_2(x(\vartheta))] \\ \sigma_i(x(\vartheta))=[(z_1(\vartheta)-y_1^{(i)}(\vartheta))^2+(z_2(\vartheta)-y_2^{(i)}(\vartheta))^2]^{1/2} \quad (i=1, 2) \end{gathered} \qquad (1.6)$$

Аргумент $x(\vartheta)$ обозначает фазовый вектор управляемой системы (1.1) – (1.4). Таким образом, плата игры есть расстояние между преследуемым объектом и ближайшим к нему преследователем в момент времени ϑ.

Стратегии и движения игроков определим в соответствии с [1].



Фиг. 1



Фиг. 2

Для любой исходной позиции игры (1.1)—(1.6) требуется определить позиционную стратегию преследователей U_0, при использовании которой преследователи гарантируют себе наименьшее значение платы (1.6).

В действительности достаточно определить функцию цены дифференциальной игры. Зная ее можно эффективно строить ε-оптимальные управления преследователей [2]. При помощи стандартной замены переменных [1] исходную игру (1.1)—(1.6) можно свести к эквивалентной дифференциальной игре, имеющей в новых переменных следующий вид

$$\dot y_1^{*(i)} = a(t)u_1^{(i)}, \qquad \dot y_2^{*(i)} = a(t)u_2^{(i)}$$

$$a(t)=[1-\exp(-\alpha(\vartheta-t))]\alpha^{-1} \tag{1.7}$$

$$\dot z_1^*=b(t)v_1, \quad \dot z_2^*=b(t)v_2$$

$$b(t)=[1-\exp(-\beta(\vartheta-t))]\beta^{-1} \tag{1.8}$$

$$[(u_1^{(i)})^2+(u_2^{(i)})^2]^{1/2}\leqslant\mu, \quad \mu>0 \quad (i=1,2)$$

$$[v_1^2+v_2^2]^{1/2}\leqslant\nu, \quad \nu>0, \quad \sigma^*(x)=\sigma(x)$$

Связь между новыми и старыми переменными имеет вид

$$y_j^{*(i)} = y_j^{(i)}+a(t)y_{j+2}^{(i)}, \qquad z_j^*=z_j+b(t)z_{j+2}, \qquad (i,j=1,2) \tag{1.9}$$

В дальнейшем будем рассматривать игру (1.5)—(1.8) (звездочку опускаем, чтобы не усложнять формулы).

Фиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат с осями q_1 и q_2, связанную с начальным положением преследователей, так что ось абсцисс q_1 соединяет начальные положения преследователей, а ось q_2 проходит через середину отрезка, соединяющего преследователей, и перпендикулярна ему, как показано на фиг. 1.

Областью достижимости $G^{(i)}(\vartheta, t, y^{(i)}(t))$ объектов P_i $(i=1, 2)$ из позиции $\{t, y^{(i)}(t)\}$ к моменту времени ϑ будет круг радиуса $r(t)=$ $=\mu\alpha^{-1}[\vartheta-t-a(t)]$ с центром в точке $\{y_1^{(i)}(t), y_2^{(i)}(t)\}$.

Аналогично, областью достижимости $G(\vartheta, t, z(t))$ объекта E из позиции $\{t, z(t)\}$ будет круг радиуса $R(t)=\nu\beta^{-1}(\vartheta-t-b(t))$ с центром в точке $\{z_1(t), z_2(t)\}$.

В [5] доказано, что при выполнении условий (1.5) выполняется неравенство

$$r(t)<R(t), \qquad \forall t: t_0\leqslant t<\vartheta \tag{1.10}$$

На фиг. 2 показана наиболее характерная для рассматриваемой дифференциальной игры позиция игроков. Граница области достижимости убегающего пересекает ось q_2 в двух точках A_1 и A_2, а сам он находится внутри четырехугольника $A_1P_1A_2P_2$. Если в некоторый момент времени преследователи и убегающий располагаются таким образом на плоскости, то будем говорить, что эта позиция (t, x) принадлежит множеству W.

Рассмотрим функцию программного максимина

$$\varepsilon_0(t_0,x_0)=\max_{v(\cdot)}\ \min_{u(\cdot)}\sigma[x(\vartheta,t_0,x_0,u(\cdot),v(\cdot))]$$

где $x(\vartheta, t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ — решение системы уравнений (1.7), (1.8) с начальным условием $x(t_0)=\{y^{(1)}(t_0), y^{(2)}(t_0), z(t_0)\}$. Непосредственно проверяется, что

$$\begin{gathered}\varepsilon_0(t_0, x_0)=\max\{\varepsilon_1(t_0, x(t_0)), \varepsilon_2(t_0, x(t_0))\}\\ \varepsilon_i(t, x)=[(y_2^{(1)}-q_i)^2+(y_1^{(1)})^2]^{1/2}-r(t), \quad (i=1, 2)\\ q_{1,2}=z_2\pm[(R(t))^2-z_1^2]^{1/2}\end{gathered}\tag{1.11}$$

если начальная позиция игроков принадлежит множеству W, определенному выше, т. е. имеют место неравенства

$$R(t_0)\geqslant|z_1(t_0)|,\tag{1.12}$$

$$[(R(t_0))^2-(z_1(t_0))^2]^{1/2}|z_1(t_0)|^{-1}\geqslant\{[(R(t_0))^2-(z_1(t_0))^2]^{1/2}+ +|z_2(t_0)-y_2^{(1)}(t_0)|\}|y_1^{(1)}(t_0)|^{-1}$$

Если неравенства (1.12) не выполняются, то

$$\begin{gathered}\varepsilon_0(t_0, x_0)=\min\{\varepsilon_3(t_0, x(t_0)), \varepsilon_4(t_0, x(t_0))\}\\ \varepsilon_{i+2}(t, x)=[(z_1-y_1^{(i)})^2+(z_2-y_2^{(i)})^2]^{1/2}+R(t)-r(t), \quad (i=1, 2)\end{gathered}\tag{1.13}$$

Далее будет доказано, что в дифференциальной игре (1.5)—(1.8) программный максимин $\varepsilon_0(t_0, x_0)$, определяемый формулами (1.11)—(1.13), совпадает с функцией цены для всех возможных позиций игры. При доказательстве этого факта воспользуемся следующим обстоятельством. Рассмотрим дифференциальную игру, которая вкладывается в игру (1.5)—(1.8). Заменим уравнение (1.7) уравнением

$$\dot y_1^{(1)}=a(t)u_1, \qquad \dot y_2^{(1)}=a(t)u_2, \qquad \dot y_1^{(2)}=-a(t)u_1, \qquad \dot y_2^{(2)}=a(t)u_2 \tag{1.14}$$

т. е. положим, что в (1.7): $u_1^{(1)}=-u_1^{(2)}=u_1$, $u_2^{(1)}=u_2^{(2)}=u_2$.

Для системы (1.14) всегда имеют место равенства $y_1^{(1)}(t)=-y_1^{(2)}(t)$, $y_2^{(1)}(t)=y_2^{(2)}(t)$, $t_0\leqslant t<\vartheta$. Если для дифференциальной игры (1.5), (1.6), (1.8), (1.14) вычислить программный максимин $\varepsilon_0^*(t, x)$, то получим

$$\varepsilon_0^*(t, x)=\varepsilon_0(t, x)\tag{1.15}$$

Пусть ρ — цена дифференциальной игры (1.5)—(1.8), а ρ_* — цена дифференциальной игры (1.5), (1.6), (1.8), (1.14). В игре (1.5), (1.6), (1.7), (1.14) у первого преследователя имеются дополнительные ограничения. Поэтому

$$\rho\leqslant\rho_*\tag{1.16}$$

Известно, что цена дифференциальной игры и программный максимин связаны неравенством

$$\rho\geqslant\varepsilon_0(t, x), \qquad \rho_*\geqslant\varepsilon_0^*(t, x)\tag{1.17}$$

Если справедливо равенство

$$\rho_*(t, x)=\varepsilon_0^*(t, x)\tag{1.18}$$

то из (1.15)—(1.18) следует, что $\rho_*(t, x)=\varepsilon_0(t, x)$.

2. Докажем равенство (1.18). Введем открытые множества D_j ($j=1$, 2, 3, 4):

$$D_1=\{(t,x): t_0\leqslant t<\vartheta,\quad z_1<\nu\beta^{-1}(\vartheta-t-b(t)),\quad z_2>y_2^{(1)},$$

$$M(R,z_1)\,|z_1|^{-1}>(M(R,z_1)+|z_2-y_2^{(1)}|)\,|y_1^{(1)}|^{-1}\}$$

$$D_2=\{(t,x): t_0\leqslant t<\vartheta,\quad z_1<\nu\beta^{-1}(\vartheta-t-b(t)),\quad z_2<y_2^{(1)},$$

$$M(R,z_1)\,|z_1|^{-1}>(M(R,z_1)+|z_2-y_2^{(1)}|)\,|y_1^{(1)}|^{-1}\}$$

$$D_3=\{(t,\ x):\ t_0\leqslant t<\vartheta,\ z_1>0\}\setminus W,$$

$$D_4=\{(t,\ x):\ t_0\leqslant t<\vartheta,\ z_1<0\}\setminus W$$

$$M(R,z_1)=\begin{cases}[(R(t))^2-z_1^2]^{1/2} & \text{при}\quad |z_1|\leqslant R(t)\\ 0 & \text{при}\quad |z_1|>R(t)\end{cases}$$

Согласно (1.11)–(1.13), имеем $\varepsilon_0(t,\ x)=\varepsilon_j(t,\ x)$ при $(t,\ x)\in D_j$ ($j=1$, 2, 3, 4).

Нетрудно проверить, что внутри области D_j функция $\varepsilon_j(\cdot)$ дифференцируема и удовлетворяет основному уравнению дифференциальных игр Беллмана — Айзекса:

$$\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial t}+\min_u\max_v\sum_k\frac{\partial\varepsilon_{jk}}{\partial x_k}f_k(t,x,u,v)=0\qquad (j=1,2,3,4)$$

где $f(t,\ x,\ u,\ v)$ — правая часть системы (1.14), (1.8). Кроме того, для любой позиции x справедливо краевое условие $\varepsilon_j(\vartheta,\ x)=\sigma(x)$ ($j=1$, 2, 3, 4).

Рассмотрим позиции, принадлежащие сингулярной поверхности S, которая разделяет области D_1 и D_2:

$$S=\{(t,x): t_0\leqslant t<\vartheta,\qquad z_2=y_2^{(1)},\qquad |z_1|\leqslant|y_1^{(1)}|\}\tag{2.1}$$

Поверхности, разделяющие области D_i и D_j ($i=1,2$; $j=3,4$), не являются особыми, так как непосредственно проверяется, что функция $\varepsilon_0(t,\ x)$ на них непрерывна вместе со всеми своими частными производными. На сингулярной поверхности S функция $\varepsilon_0(t,\ x)$ недифференцируема. В [3], [4] указаны необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять кусочно-гладкая функция цены дифференциальной игры на особых поверхностях.

Докажем, что функция $\varepsilon_0(t,\ x)$ (1.11)–(1.13) удовлетворяет этим условиям.

Для функции программного максимина достаточно доказать ее $\bar{u}$ — стабильность на особом множестве, т. е. необходимо доказать неравенство

$$\max_v\min_u\max\left\{\frac{d\varepsilon_1(t,x)}{dt},\ \frac{d\varepsilon_2(t,x)}{dt}\right\}\leqslant 0\qquad (t,x)\in S\tag{2.2}$$

Функции $\varepsilon_j(t,\ x)$ ($j=1,2$) заданы формулами (1.11). Найдем частные производные функций $\varepsilon_j(t,\ x)$ ($j=1,2$) на поверхности S:

$$\partial\varepsilon_1/\partial t=\partial\varepsilon_2/\partial t=\mu a(t)-\nu Rb(t)\,Q^{-1}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y_1^{(1)}}=\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial y_1^{(1)}}=y_1^{(1)}\,Q^{-1},\qquad \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y_2^{(1)}}=-\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial y_2^{(1)}}=MQ^{-1}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_1}=\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial z_1}=-z_1Q^{-1},\qquad \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_2}=-\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial z_2}=MQ^{-1}$$

$$M=[R^2-z_1^2]^{1/2},\qquad Q=[M^2+(y_1^{(1)})^2]^{1/2}$$

Следовательно

$$\max_v \min_u \max\{d\varepsilon_1/dt, d\varepsilon_2/dt\} = \mu a(t) - \nu R b(t) Q^{-1} +$$

$$+ \max_v \min_u (y_1^{(1)} Q^{-1} u_1 a(t) - z_1 Q^{-1} v_1 b(t) + M Q^{-1} |a(t) u_2 - b(t) v_2|)$$

Требуется доказать неравенство

$$\max_v \min_u (a(t) y_1^{(1)} u_1 - b(t) z_1 v_1 + M |a(t) u_2 - b(t) v_2|) \leqslant R\nu b(t) - \mu Q a(t) \tag{2.3}$$

Рассмотрим линии уровня функции $F_0(u) = a(t) y_1^{(1)} u_1 + M|a(t) u_2 - b(t) v_2| = \mathrm{const}$. Будем считать, что $v_2 \in [0, \nu]$ (случай $v_2 \in [-\nu, 0]$ рассматривается аналогично). Пусть $v_2 \in [a(t) \mu M (b(t) Q)^{-1}, \nu]$. Учитывая, что $a(t) \mu M [b(t) Q]^{-1} \leqslant \nu$, так как $a(t) \mu < b(t) \nu$ [5] и $0 \leqslant M \leqslant Q$, получим $\min_u F_0(u) = M b(t) v_2 - Q a(t) \mu$. Тогда $\max_v (M b(t) v_2 - Q a(t) \mu - b(t) z_1 v_1) \leqslant \leqslant \nu b(t) [z_1^2 + M^2]^{1/2} - Q a(t) \mu$.

Таким образом, неравенство (2.3) выполняется при $v_2 \in [a(t) \mu M \times \times (b(t) Q)^{-1}, \nu]$, поскольку $R = [z_1^2 + M^2]^{1/2}$. Пусть $v_2 \in [0, a(t) \mu M (b(t) Q)^{-1}]$. Тогда минимум функции $F_0(u)$ достигается в точке $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, $u_1^* = -[\mu^2 - (b(t) v_2 (a(t))^{-1})^2]^{1/2}$, $u_2^* = b(t) v_2 (a(t))^{-1}$.

Следовательно

$$\max_v \min_u (F_0(u) - z_1 b(t) v_1) = \max\{-a(t) y_1^{(1)} [\mu^2 - (b(t) v_2 (a(t))^{-1})^2]^{1/2} -$$

$$- b(t) z_1 v_1\} = \max_{v_2} F_1(v_2),$$

где $F_1(v_2) = b(t) |z_1| (\nu^2 - v_2^2)^{1/2} - a(t) y_1^{(1)} \{\mu^2 - [b(t) v_2 (a(t))^{-1}]^2\}^{1/2}$.

Функция $F_1(v_2)$ монотонно возрастает на интервале $(0, a(t) \mu M (b(t) \times \times Q)^{-1})$. Поэтому максимум достигается в точке $v_2^* = a(t) \mu M (b(t) Q)^{-1}$:

$$F_1(v_2^*) = \max_{v_2} F_1(v_2) = |z_1| Q^{-1} [(\nu b(t) Q)^2 - (a(t) \mu M)^2]^{1/2} - a(t) \mu (y_1^{(1)})^2 Q^{-1}$$

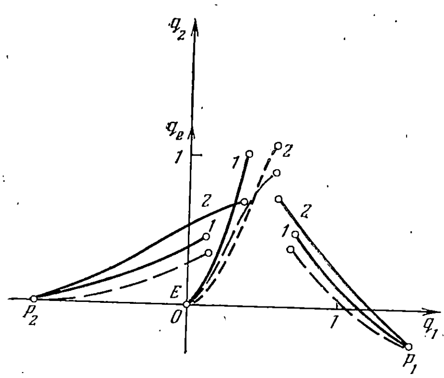
Чтобы доказать неравенство (2.3), осталось проверить, что $F_1(v_2^*) \leqslant \leqslant R \nu b(t) - a(t) \mu Q$.

Это неравенство следует из соотношений

$$a(t) \mu M^2 \leqslant R Q \nu b(t)$$

$$|z_1| [(\nu b(t) Q)^2 - (a(t) \mu M)^2]^{1/2} \leqslant R Q \nu b(t) - a(t) \mu M^2$$

Итак, для функции $\varepsilon_0(t, x)$, (1.11)–(1.13) выполнены все необходимые и достаточные условия [3], [4], поэтому эта функция действительно есть цена дифференциальной игры (1.5), (1.6), (1.8), (1.14). Из (1.15)–(1.18) следует также, что $\varepsilon_0(t, x)$ – функция цены дифференциальной игры (1.5)–(1.8).



Фиг. 3

Пример. Процесс преследования-убегания моделировался на ЭВМ. Стратегии преследователей строились в соответствии с [2]. Параметры в дифференциальной игре (1.1)–(1.6) выбраны следующими $\alpha = 0{,}1$; $\beta = 0{,}15$; $t_0 = 0$; $\vartheta = 1$; $\mu = 1$; $\nu = 2$. Кроме того, для работы программы необходимо задавать параметр ε, характеризующий погрешность в реализации управлений преследователей. Было принято $\varepsilon = 0{,}01$.

Начальная позиция выбрана следующей

$$\overset{\circ}{y}{}_1^{(1)} = 1{,}5;\quad \overset{\circ}{y}{}_2^{(1)} = -0{,}2;\quad \overset{\circ}{y}{}_3^{(1)} = -0{,}5;$$

$$\overset{\circ}{y}{}_4^{(1)} = 0{,}3;\quad \overset{\circ}{y}{}_1^{(2)} = -1;\quad \overset{\circ}{y}{}_2^{(2)} = 0;\quad \overset{\circ}{y}{}_3^{(2)} = 1;$$

$$\overset{\circ}{y}{}_4^{(2)} = 0;\quad z_1^\circ = 0;\quad z_2^\circ = 0;\quad z_3^\circ = 0{,}4;\quad z_4^\circ = 0{,}1.$$

Цена игры для этой позиции равна 0,6557. Полученные траектории игроков P_1, P_2, E отмечены на фиг. 3 цифрой 1, причем игрок E движется оптимально. Цифрой 2 отмечены траектории игроков, когда игрок E движется с экстремальным управлением, но направление движения выбирает случайным образом. В этом случае преследователи его наказывают ($\sigma(1)=0,3396$). Траектории показаны пунктиром, когда игрок E действует оптимально, а преследователи P_1, P_2 выбирают управления, направленные на игрока E в текущий момент времени. Значение платы в этом случае на 15% увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974, 456 с.
2. *Красовский Н. Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели.— Мат. сб., 1978, 107, № 4.
3. *Субботин А. И., Субботина Н. Н.* Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой цены дифференциальной игры.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 4, с. 862—865.
4. *Субботин А. И., Субботина Н. Н.* Свойства потенциала дифференциальной игры.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 204—211.
5. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования. Мат. сб.: 1980, т. 112, № 3, с. 307—330.
6. *Пашков А. Г.* Об одном достаточном условии игр сближения и уклонения.— Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 6, с. 44—48.
7. *Пашков А. Г., Терехов С. Д.* Об одной игре оптимального преследования двумя объектами одного.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 898—903.
8. *Левченков А. Ю., Пашков А. Г.* Игра оптимального сближения двух инерционных объектов с одним безынерционным.— ПММ, 1985, т. 49, вып. 4, с. 536—547.
9. *Григоренко Н. Л.* Преследование несколькими разнотипными объектами одного убегающего.— Докл. АН СССР, 1982, т. 268, № 3, с. 529—533.
10. *Чикрий А. А., Пицик М. В.* О задаче группового преследования.— ПММ, 1982, т. 46, № 5, с. 730—736.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1985