МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1986

УДК 534.1

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ ОБОБЩЕННО-КОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

САЗОНОВ В. В.

Рассматривается обобщенно-консервативная механическая система, уравнения движения которой содержат большой параметр, характеризующий позиционные силы, действующие в системе по некоторым обобщенным координатам. Доказано существование периодических решений этих уравнений, близких периодическим решениям соответствующих вырожденных уравнений. Механические системы указанного типа встречаются при изучении динамики пассивной одноосной ориентации искусственных спутников. Найденные периодические решения можно использовать для описания номинальных невозмущенных движений спутника в ориентированном состоянии. В качестве примеров исследованы режимы одноосной аэродинамической и одноосной гравитационной ориентации. Доказано существование периодических движений спутников в этих режимах. Ранее такие периодические движения были построены численно [1, 2].

1. Рассмотрим обобщенно-консервативную механическую систему, движение которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j^{\boldsymbol{\cdot}}}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial(\Pi_0+\mu^2\Pi)}{\partial q_j}\qquad (j=1,\ldots,l)\tag{1.1}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{l}a_{jk}(q_1,\ldots,q_n)q_j^{\boldsymbol{\cdot}}q_k^{\boldsymbol{\cdot}}+\sum_{j=1}^{l}a_j(q_1,\ldots,q_l)q_j^{\boldsymbol{\cdot}}+a_0(q_1,\ldots,q_l)$$

$$\Pi_0=\Pi_0(q_1,\ldots,q_l),\quad \Pi=\Pi(q_1,\ldots,q_n)$$

Здесь $\mu$ — положительный параметр, $0<n<l$ и первое слагаемое в выражении для кинетической энергии $T$ — положительно-определенная квадратичная форма относительно обобщенных скоростей. Перейдем в (1.1) к переменным Рауса $q_j$, $q_j^{\boldsymbol{\cdot}}$, $q_\alpha$, $p_\alpha=\partial T/\partial q_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}$ $(j=1,\ldots,n;\ \alpha=n+1,\ldots,l)$. Положив $\mathbf{q}=\|q_1,\ldots,q_n\|^T$, $\mathbf{x}=\|q_{n+1},\ldots,q_l,\ p_{n+1},\ldots,p_l\|^T$ и определив нужным образом векторные функции $\mathbf{F}(\mathbf{x},\ \mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}})\in R^m$ $(m=2(l-n))$, $\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}})\in R^n$ и симметричную положительно-определенную $n\times n$-матрицу $A_0(\mathbf{q})$, уравнения Рауса рассматриваемой механической системы можно записать в виде

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\ \mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}),\quad A_0(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+\mu^2(\partial\Pi(\mathbf{q})/\partial\mathbf{q})=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}})\tag{1.2}$$

Эти уравнения допускают обобщенный интеграл энергии

$$^1/_2(\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}})^TA_0(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}+\mu^2\Pi(\mathbf{q})+G(\mathbf{x},\ \mathbf{q})=\mathrm{const}\tag{1.3}$$

Далее полагаем, что функции $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$, $A_0$, $\Pi$ и $G$ достаточно гладко зависят от своих аргументов, $\partial\Pi(0)/\partial\mathbf{q}=0$ и матрица $\partial^2\Pi(0)/\partial\mathbf{q}^2$ положительно определена. Систему

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\ 0,\ 0)\tag{1.4}$$

назовем вырожденной. Она допускает первый интеграл $G(\mathbf{x},\ 0)=\mathrm{const}$. Относительно системы (1.4) предположим следующее:

эта система имеет двухпараметрическое семейство периодических решений

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(t+t_0,\ c) \tag{1.5}$$

с периодом $a(c)$, где $c\in(c_1^\circ,\ c_2^\circ)$ и $t_0\in(-\infty,\ +\infty)$ — параметры;

при $c\in[c_1,\ c_2]\subset(c_1^\circ,\ c_2^\circ)$ система уравнений в вариациях для решения (1.5) имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное $a(c)$-периодическое решение $\boldsymbol{\varphi}^{\boldsymbol{\cdot}}(t+t_0,\ c)$;

при $c\in[c_1,\ c_2]$ выполнено условие $\partial G[\boldsymbol{\varphi}(t+t_0,\ c),\ 0]/\partial\mathbf{x}\neq 0$.

Не ограничивая общности, положим в (1.5) $t_0=0$. Исследуем вопрос о существовании $a(c)$-периодических решений системы (1.2) $\mathbf{x}(t,\ c,\ \mu)$, $\mathbf{q}(t,\ c,\ \mu)$, определенных для значений $(c,\ \mu)$ из некоторого неограниченного множества $I_\mu\subset[c_1,\ c_2]\times[0,\ +\infty)$ и удовлетворяющих при допустимых $\mu\to+\infty$ условиям $\mathbf{x}(t,\ c,\ \mu)\to\boldsymbol{\varphi}(t,\ c)$, $\mathbf{q}(t,\ c,\ \mu)\to 0$, $\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}(t,\ c,\ \mu)\to 0$. Чтобы сформулировать теорему о таких решениях, необходимо построить множество $I_\mu$. Для этого рассмотрим $a(c)$-периодическую систему

$$\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}-C^\circ(t,\ c)\,\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}+\mu^2\Lambda\mathbf{q}=0$$

$$\Lambda=A_0^{-1}(0)\,(\partial^2\Pi(0)/\partial\mathbf{q}^2),\quad C^\circ(t,\ c)=A_0^{-1}(0)\,(\partial\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t,\ c),\ 0,\ 0)/\partial\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}) \tag{1.6}$$

Так как матрицы $A_0(0)$ и $\partial^2\Pi(0)/\partial\mathbf{q}^2$ симметричны и положительно определены, то соответствующие им квадратичные формы можно одновременно привести к каноническому виду. Иными словами, существует невырожденная матрица $S$ такая, что

$$S^TA_0(0)S=E_n,\qquad S^T(\partial^2\Pi(0)/\partial\mathbf{q}^2)S=\mathrm{diag}(\omega_1^2E_{n_1},\ldots,\omega_r^2E_{n_r}) \tag{1.7}$$

Здесь $E_k$ — единичная матрица порядка $k$, $n_j>0$ $(j=1,\ldots,r)$, $n_1+\ldots+n_r=n$, $0<\omega_1<\omega_2<\ldots<\omega_r$. Сделав в (1.6) замену переменной $\mathbf{q}=S\mathbf{q}^\circ$ и вернувшись к прежним обозначениям, будем считать, что матрица $\Lambda$ в этой системе совпадает с правой частью второй формулы (1.7).

Матрицу $C^\circ(t,\ c)$ представим в блочной форме: $C^\circ(t,\ c)=\|C_{jk}^\circ(t,\ c)\|_{j,k=1}^r$, где блок $C_{jk}^\circ(t,\ c)$ имеет размеры $n_j\times n_k$. Решим начальные задачи

$$X_j^{\boldsymbol{\cdot}}={}^1/_2C_{jj}^\circ(t,\ c)X_j,\qquad X_j(0)=E_{n_j}\qquad (j=1,\ldots,r)$$

и введем матрицы

$$H_j^\circ(c)=\frac{1}{a(c)}\mathrm{Ln}\,X_j(a(c))\qquad (j=1,\ldots,r)$$

Будем считать, что все $H_j^\circ(c)$ действительны. Выбор действительных $\mathrm{Ln}\,X_j(a(c))$ всегда возможен, поскольку уравнения (1.2) являются уравнениями Рауса, обобщенно-консервативной механической системы [3].

Введем следующее определение. Пусть $P$ — произвольная $k\times k$-матрица с собственными числами $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. Введем функцию

$$\Delta(k,P,b,\sigma)=|\det[\mathrm{sh}\,b(P+i\sigma E_k)]|=$$

$$=\left\{\prod_{j=1}^{k}[\mathrm{sh}^2(b\,\mathrm{Re}\,\lambda_j)+\sin^2 b(\sigma+\mathrm{Im}\,\lambda_j)]\right\}^{1/2},\qquad i=\sqrt{-1}$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ рассмотрим множество $I^\circ(\varepsilon)=\{(c,\ \mu):\ c_1\leqslant c\leqslant c_2,\ \mu\geqslant 0,\ \Delta(n_j,\ H_j^\circ(c),\ {}^1/_2a(c),\ \mu\omega_j)\geqslant\varepsilon\ (j=1,\ldots,r)\}$.

Каждая функция $\Delta(n_j,\ H_j^\circ(c),\ {}^1/_2a(c),\ \mu\omega_j)$ — периодическая по $\mu$. Поэтому существует такое число $\varepsilon_0^*(c)>0$, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0^*(c)$:

$$\{\mu:\mu\geqslant 0,\quad \Delta(n_j,H_j^\circ(c),{}^1/_2a(c),\mu\omega_j)\geqslant\varepsilon\quad (j=1,\ldots\ r)\}=$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}[\alpha_k(\varepsilon,c),\beta_k(\varepsilon,c)],\quad 0\leqslant\alpha_1(\varepsilon,c)\leqslant\beta_1(\varepsilon,c)<\alpha_2(\varepsilon,c)\leqslant\beta_2(\varepsilon,c)<\ldots$$

$$0<l_1(c)<\varliminf_{k\to\infty}[\beta_k(\varepsilon,c)-\alpha_k(\varepsilon,c)]<l_2(c)\qquad (c_1\leqslant c\leqslant c_2)$$

и числа $l_1(c)$ и $l_2(c)$ не зависят от $\varepsilon$. Пусть $0<\varepsilon_0<\sup \varepsilon_0^*(c)$ $(c_1\leqslant c\leqslant c_2)$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Справедлива

*Теорема 1.* Для любого $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0)$ существуют такие положительные числа $C_0$, $C_1$, $C_2$ и $M$, что при $(c, \mu)\in I^\circ(\varepsilon)$, $\mu\geqslant M$ система (1.2) имеет единственное $a(c)$-периодическое решение $\mathbf{x}_*(t, c, \mu)$, $\mathbf{q}_*(t, c, \mu)$, удовлетворяющее условиям

$$\|\mathbf{x}_*(t, c, \mu)-\boldsymbol{\varphi}(t, c)\|\leqslant C_0/\mu, \quad \|\mathbf{q}_*(t, c, \mu)\|\leqslant C_1/\mu^2$$

$$\|\mathbf{q}_*^{\boldsymbol{\cdot}}(t, c, \mu)\|\leqslant C_2/\mu \quad (0\leqslant t\leqslant a(c)) \tag{1.8}$$

$$\int\limits_0^{a(c)} [\boldsymbol{\varphi}^{\boldsymbol{\cdot}}(t, c)]^T[\mathbf{x}_*(t, c, \mu)-\boldsymbol{\varphi}(t, c)]\,dt=0$$

*Замечания.* 1°. Если $\varepsilon\to 0$, то $C_0$, $C_1$, $C_2$, $M\to+\infty$.

2°. Последнее условие (1.8) служит для устранения произвольного сдвига по времени, допускаемого в периодических решениях автономных систем.

3°. Упомянутое выше множество $I_\mu$ имеет вид $I_\mu=\{(c, \mu)\colon (c, \mu)\in I^\circ(\varepsilon), \mu\geqslant M\}$. Механический смысл множества $I^\circ(\varepsilon)$ заключается в следующем.

Рассмотрим для уравнения (1.6) периодическую краевую задачу $\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}(a(c))$, $\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}(0)=\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}(a(c))$. Можно показать, что значения $\mu$, при которых эта задача имеет нетривиальные решения, приближенно определяются уравнениями $\Delta(n_j, H_j^\circ(c), {}^1/_2a(c), \mu\omega_j)=0$ $(j=1, \ldots, r)$. Точность здесь тем выше, чем больше $\mu$. Таким образом, условие $(c, \mu)\in I^\circ(\varepsilon)$ исключает из анализа периодических решений системы (1.2) резонансы между медленными (с частотой $2\pi/a(c)$) и быстрыми (с частотами $\mu\omega_1, \ldots, \mu\omega_r$) колебаниями.

Предполагалось, что система (1.4) имеет семейство колебательных периодических решений, т. е. в (1.5) $\boldsymbol{\varphi}(t+a(c), c)=\boldsymbol{\varphi}(t, c)$. Теорема 1 остается справедливой и в случае семейства вращательных периодических решений. А именно, когда существуют число $b\neq 0$ и отличный от нуля постоянный вектор $\mathbf{e}\in R^m$ с целочисленными компонентами такие, что в (1.2)—(1.5) $\mathbf{F}(\mathbf{x}+b\mathbf{e}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}})=\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}})$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}+b\mathbf{e}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}})=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}})$, $G(\mathbf{x}+b\mathbf{e}, \mathbf{q})=G(\mathbf{x}, \mathbf{q})$, $\boldsymbol{\varphi}(t+a(c), c)=\boldsymbol{\varphi}(t, c)+b\mathbf{e}$ при всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}$, $c$ и $t$.

Систему (1.2), допускающую первый интеграл (1.3), можно рассматривать вне связи с системой (1.1). Если такая система (1.2) удовлетворяет всем перечисленным требованиям, то для нее по-прежнему имеет место теорема 1. Эта теорема остается справедливой и в случае системы

$$\begin{gathered}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mu^{-2}),\\ A_0(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+\mu^2(\partial\Pi(\mathbf{q})/\partial\mathbf{q})=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mu^{-2})\end{gathered} \tag{1.9}$$

с первым интегралом

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{q})+\mu^{-2}G_1(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mu^{-2})=\mathrm{const} \tag{1.10}$$

если зависимость функций $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$ и $G_1$ от $\mu^{-2}$ в окрестности точки $\mu^{-2}=0$ достаточно гладкая и вырожденная система

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0, 0, 0) \tag{1.11}$$

имеющая интеграл $G(\mathbf{x}, 0)=\mathrm{const}$, удовлетворяет условиям, предъявляемым к системе (1.4).

**2.** Для доказательства теоремы 1 преобразуем систему (1.2). Сделаем в ней замену переменных $\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(t, c)+\boldsymbol{\xi}$, $t=a(c)\tau/2\pi$ и умножим второе уравнение слева на $A_0^{-1}(\mathbf{q})$. В получившихся уравнениях выделим в явном виде некоторые члены, линейные относительно $\xi$, $\mathbf{q}$ и $d\mathbf{q}/d\tau$. В результате придем к $2\pi$-периодической системе

$$\xi'=A(\tau, c)\xi+\mathbf{F}_1(\tau, \xi, \mathbf{q}, \mathbf{q}', c)$$
$$\mathbf{q}''-C(\tau, c)\mathbf{q}'+\rho^2\Lambda\mathbf{q}=B(\tau, c)\xi+\mathbf{f}_1(\tau, \xi, \mathbf{q}, \mathbf{q}', c)+\rho^2\mathbf{h}_1(\mathbf{q}) \tag{2.1}$$

$$A(\tau, c)=\varkappa\frac{\partial\mathbf{F}(\varphi, 0, 0)}{\partial\mathbf{x}}, \quad B(\tau, c)=\varkappa^2A_0^{-1}(0)\frac{\partial\mathbf{f}(\varphi, 0, 0)}{\partial\mathbf{x}}$$

$$C(\tau, c)=\varkappa C^0(\varkappa\tau, c), \quad \varphi=\varphi(\varkappa\tau, c), \quad \rho=\mu\varkappa, \quad \varkappa=a(c)/2\pi$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по $\tau$ и при $\xi$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'\to0$ равномерно по $c\in[c_1, c_2]$ имеют место оценки

$$\mathbf{F}_1(\tau, \xi, \mathbf{q}, \mathbf{q}', c)=O(\|\mathbf{q}\|+\|\mathbf{q}'\|+\|\xi\|^2), \quad \mathbf{h}_1(\mathbf{q})=O(\|\mathbf{q}\|^2)$$
$$\mathbf{f}_1(\tau, \xi, \mathbf{q}, \mathbf{q}', c)-\mathbf{f}_1(\tau, 0, 0, 0, c)=O(\|\mathbf{q}\|+\|\mathbf{q}'\|^2+\|\xi\|^2) \tag{2.2}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что матрица $\Lambda$ в (2.1) совпадает с правой частью второй формулы (1.7).

Следующие преобразования служат для упрощения линейных членов во втором уравнении (2.1) и подробно описаны в [3]. Ниже приводятся только определяющие их формулы и окончательный результат. Преобразования затрагивают лишь $n$-мерный вектор и выполняются по схеме

$$\mathbf{q}\to\mathbf{z}\to\mathbf{u}\to\mathbf{y}: \quad \mathbf{q}=\mathbf{z}+\rho^{-2}\Lambda^{-1}B(\tau, c)\xi$$
$$\mathbf{u}=\mathbf{z}+\rho^{-2}D(\tau, c)\mathbf{z}', \quad \mathbf{u}=\Phi(\tau, c)\mathbf{y} \tag{2.3}$$

Матрицы $D$ и $\Phi$ строятся так. Представим матрицы $C$ и $D$ в блочной форме, причем разбиение на блоки возьмем такое, как во второй формуле (1.7): $C=\|C_{jk}\|_{j,k=1}^{r}$, $D=\|D_{jk}\|_{j,k=1}$, где $C_{jk}$ и $D_{jk}$ — блоки размером $n_j\times n_k$. Положим $D_{jk}=(\omega_k^2-\omega_j^2)^{-1}C_{jk}$ при $j\neq k$ и $D_{jj}=0$. Ясно, что $D(\tau+2\pi, c)=D(\tau, c)$. Рассмотрим начальные задачи $X_j'={}^1/_2C_{jj}(\tau, c)X_j$, $X_j(0)=E_{n_j}$ $(j=1, \ldots, r)$.

Согласно теории Флоке их решения можно представить в виде $X_j(\tau, c)=\Phi_j(\tau, c)\exp[H_j(c)\tau]$, $\Phi_j(\tau+2\pi, c)=\Phi_j(\tau, c)$, $H_j(c)=(2\pi)^{-1}\times\mathrm{Ln}\,X_j(2\pi, c)=\varkappa H_j^0(c)$, $(j=1, \ldots, r)$.

Будем считать, что все $H_j(c)$ действительны (см. п. 1) и положим

$$\Phi(\tau, c)=\mathrm{diag}(\Phi_1(\tau, c), \ldots, \Phi_r(\tau, c)),$$
$$H(c)=\mathrm{diag}(H_1(c), \ldots, H_r(c))$$

В результате преобразований (2.3) уравнения (2.1) принимают вид

$$\xi'=A(\tau, c)\xi+\mathbf{F}_2(\tau, \xi, \mathbf{y}, \mathbf{y}', c, \rho)$$
$$\mathbf{y}''-2H(c)\mathbf{y}'+[\rho^2\Lambda+H^2(c)]\mathbf{y}=\mathbf{f}_2(\tau, \xi, \mathbf{y}, \mathbf{y}', c, \rho)+\rho^2\mathbf{h}_2(\tau, \xi, \mathbf{y}, \mathbf{y}', c, \rho) \tag{2.4}$$

где функции $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{h}_2$ при $\xi$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$, $\rho^{-1}\to0$ удовлетворяют оценкам, аналогичным (2.2), но более громоздким [3]. Поскольку исходная система (1.2) имеет первый интеграл (1.3), система (2.4) имеет первый интеграл

$$Q(\tau, \xi, \mathbf{y}, \mathbf{y}', c, \rho)\equiv\psi_0^T(\tau, c)\xi+Q_1(\tau, \xi, \mathbf{y}, \mathbf{y}', c, \rho)=\mathrm{const}$$
$$\psi_0(\tau, c)=\partial G[\varphi(\varkappa\tau, c), 0]/\partial\mathbf{x} \tag{2.5}$$

причем для $Q_1$ при $\xi$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$, $\rho^{-1}\to0$ равномерно по $c\in[c_1, c_2]$ справедлива оценка

$$\partial Q_1(\tau, \xi, \mathbf{y}, \mathbf{y}', c, \rho)/\partial\xi=O(\|\xi\|+\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}'\|+\rho^{-1}) \tag{2.6}$$

Введенное в п. 1 множество $I^\circ(\varepsilon)$ в результате замены $\mu\to\rho$ переходит в множество

$$I(\varepsilon)=\{(c,\rho): c_1\leqslant c\leqslant c_2,\ \rho\geqslant 0,\ \Delta(n_j, H_j(c), \pi, \rho\omega_j)\geqslant\varepsilon\ (j=1,\ldots,r)\}$$

Смысл этого множества такой. Если $c_1\leqslant c\leqslant c_2$ и $\rho\geqslant 0$, то краевая задача $\mathbf{y}''-2H(c)\mathbf{y}'+[\rho^2\Lambda+H^2(c)]\mathbf{y}=0$, $\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}(2\pi)$, $\mathbf{y}'(0)=\mathbf{y}'(2\pi)$ не имеет нетривиальных решений в том и только в том случае, когда $(c,\rho)\in I(\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon>0$. Сформулированная в п. 1 теорема 1 эквивалентна следующей теореме.

*Теорема* 2. Пусть уравнение

$$\xi'=A(\tau,c)\xi,\qquad c\in[c_1,c_2] \tag{2.7}$$

допускает единственное нетривиальное $2\pi$-периодическое решение $\xi_0(\tau,c)=\varphi^*(\varkappa\tau,c)$. Тогда для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ существуют такие положительные числа $B_0$, $B_1$, $B_2$ и $L$, что при $(c,\rho)\in I(\varepsilon)$, $\rho\geqslant L$ система (2.4) имеет единственное $2\pi$-периодическое решение $\xi_*(\tau,c,\rho)$, $\mathbf{y}_*(\tau,c,\rho)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered}\|\xi_*(\tau,c,\rho)\|\leqslant B_0/\rho,\qquad \|\mathbf{y}_*(\tau,c,\rho)\|\leqslant B_1/\rho^2\\ \|\mathbf{y}_*'(\tau,c,\rho)\|\leqslant\frac{B_2}{\rho}\quad(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi),\qquad \int_0^{2\pi}\xi_0^T(\tau,c)\xi_*(\tau,c,\rho)\,d\tau=0\end{gathered} \tag{2.8}$$

При доказательстве этой теоремы для краткости не будем указывать зависимость рассматриваемых функций от $c$ и $\rho$. Пусть $\tau$, $s\in[0,2\pi]$, $(c,\rho)\in I(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Обозначим через $G(\tau,s)$ функцию Грина [4] краевой задачи $\mathbf{y}''-2H\mathbf{y}'+[\rho^2\Lambda+H^2]\mathbf{y}=\mathbf{f}(\tau)$, $\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}(2\pi)$, $\mathbf{y}'(0)=\mathbf{y}'(2\pi)$; через $G_0(\tau,s)$ — обобщенную функцию Грина [5] краевой задачи $\xi'=A(\tau)\xi+\mathbf{F}(\tau)$, $\xi(0)=\xi(2\pi)$. Функция $G_0(\tau,s)$ определяется теми же краевыми условиями и условием скачка при $\tau=s$, что и обычная функция Грина, и соотношениями [5]:

$$\partial G_0(\tau,s)/\partial\tau=A(\tau)G_0(\tau,s)-b\psi_0(\tau)\psi_0^T(s)$$

$$\int_0^{2\pi}\xi_0^T(\tau)G_0(\tau,s)\,d\tau=0,\qquad b=\left(\int_0^{2\pi}\|\psi_0(\tau)\|^2\,d\tau\right)^{-1}$$

Здесь $\psi_0(\tau)$ — то же, что и в (2.5). В силу предположений п. 1 относительно семейства решений (1.5) $\psi_0(\tau)$ — единственное нетривиальное $2\pi$-периодическое решение системы, сопряженной системе (2.7).

Отыскание $2\pi$-периодических решений системы (2.4) приводит к решению системы интегральных уравнений [1]

$$\xi(\tau)=\int_0^{2\pi}G_0(\tau,s)\mathbf{F}_2[s,\xi(s),\mathbf{y}_1(s),\mathbf{y}_2(s)]\,ds \tag{2.9}$$

$$\mathbf{y}_j(\tau)=\int_0^{2\pi}g_j(\tau,s)\{\mathbf{f}_2[s,\xi(s),\mathbf{y}_1(s),\mathbf{y}_2(s)]+\rho^2\mathbf{h}_2[s,\xi(s),\mathbf{y}_1(s),\mathbf{y}_2(s)]\}\,ds.$$

$$j=1,2;\quad \mathbf{y}_1=\mathbf{y},\quad \mathbf{y}_2=\mathbf{y}',\quad g_1(\tau,s)=G(\tau,s),\quad g_2(\tau,s)=\partial G(\tau,s)/\partial\tau$$

Аналогично [3] устанавливается существование таких чисел $B_0$, $B_1$, $B_2$ и $L_1$, что при всех $(c,\rho)\in I(\varepsilon)$, $\rho\geqslant L_1$ система (2.9) имеет единственное решение $\xi=\xi_*(\tau)$, $\mathbf{y}_1=\mathbf{y}_*(\tau)$, $\mathbf{y}_2=\mathbf{y}_*'(\tau)$, удовлетворяющее условиям (2.8). Это решение непрерывно дифференцируемо по $\tau$ и непрерывно зависит от $c$ и $\rho$. Можно доказать, что функции $\xi_*$, $\mathbf{y}_*$ удовлетворяют пе-

[1] Впервые задача построения периодических решений в критическом случае была сведена к интегральным уравнениям при помощи обобщенной функции Грина в [6]. В [5] этот прием использовался для изучения периодических решений дифференциальных уравнений, обладающих первыми интегралами.

риодическим краевым условиям на отрезке $[0, 2\pi]$, второму уравнению (2.4) и уравнению

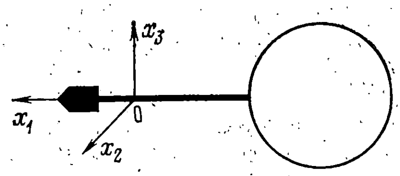
$$\xi_*'=A(\tau)\xi_*+\mathbf{F}_2(\tau, \xi_*, \mathbf{y}_*, \mathbf{y}_*')-\psi_0(\tau)p$$
$$p=b\int_0^{2\pi}\psi_0^T(\tau)\mathbf{F}_2[\tau, \xi_*(\tau), \mathbf{y}_*(\tau), \mathbf{y}_*'(\tau)]d\tau \tag{2.10}$$

Поскольку система (2.4) имеет первый интеграл (2.5), из (2.10) с помощью простого приема, предложенного в [5], можно вывести равенство

$$p\int_0^{2\pi}\psi_0^T(\tau)\frac{\partial Q[\tau, \xi_*(\tau), \mathbf{y}_*(\tau), \mathbf{y}_*'(\tau)]}{\partial\xi}d\tau=0 \tag{2.11}$$

В силу (2.6) и (2.8) существует такое $L\geqslant L_1$, что при $(c, \rho)\in I(\varepsilon)$ и $\rho\geqslant L$ интеграл в (2.11) отличен от нуля. Для указанных значений $c$ и $\rho$ имеем $p=0$ и $\xi_*$, $\mathbf{y}_*$ — $2\pi$-периодическое решение системы (2.4).

**3.** В качестве примера к теореме 1 исследуем режим одноосной аэродинамической ориентации спутника. Рассмотрим спутник (твердое тело), центр масс которого движется по круговой орбите вокруг Земли. Спутник состоит из контейнера с аппаратурой и аэродинамического стабилизатора, имеющего форму сферы и соединенного с контейнером длинной штангой (фиг. 1). Размеры контейнера малы по сравнению с размерами сферы, и его аэродинамическое сопротивление не учитывается. Масса контейнера намного больше массы стабилизатора. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс введем две правые декартовы системы координат: $Ox_1x_2x_3$ — систему координат, образованную главными центральными осями инерции спутника (центр давления аэродинамического стабилизатора лежит на оси $Ox_1$), и орбитальную систему координат $OX_1X_2X_3$ (ось $OX_3$ **направлена вдоль радиуса**-вектора точки $O$ относительно центра Земли, ось $OX_1$ направлена по касательной к орбите в сторону движения спутника).



Фиг. 1

Положение системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ зададим с помощью углов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ (фиг. 2). Матрица перехода от одной из этих систем к другой имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline X_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ X_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ X_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad \begin{array}{l} a_{11}=\cos\alpha\cos\beta \\ a_{21}=\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma \\ a_{31}=\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma \end{array}$$

$$a_{12}=-\sin\beta, \qquad a_{13}=\sin\alpha\cos\beta$$
$$a_{22}=\cos\beta\cos\gamma, \qquad a_{23}=\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma$$
$$a_{32}=\cos\beta\sin\gamma, \qquad a_{33}=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma$$

Уравнения движения спутника относительно центра масс под действием гравитационного и восстанавливающего аэродинамического моментов при естественных упрощающих предположениях (в частности, предполагается, что плотность атмосферы вдоль орбиты постоянна) можно записать в виде (1.1), где $l=3$, $n=2$, $q_1=\alpha$, $q_2=\beta$, $q_3=\gamma$, $t$ — безразмерное время, в единицах которого орбитальный период равен $2\pi$, $\mu>0$ — безразмерный параметр, характеризующий величину аэродинамического момента

$T={}^1/_2\lambda_1(\gamma^\cdot a_{11}-\beta^\cdot \sin\alpha+a_{21})^2+{}^1/_2\lambda_2(\gamma^\cdot a_{12}+\alpha^\cdot+a_{22})^2+{}^1/_2(\gamma^\cdot a_{13}+\beta^\cdot\cos\alpha+a_{23})^2$, $\Pi_0=-{}^3/_2(\lambda_1 a_{31}^2+\lambda_2 a_{32}^2+a_{33}^2)$, $\Pi=-a_{11}$, $\lambda_1=I_1/I_3$, $\lambda_2=I_2/I_3$, $I_j$ — момент инерции спутника относительно оси $Ox_j$ ($j=1, 2, 3$). В дальнейшем полагаем, что $I_2>I_3$ и $\mu\gg1$.

Положим $p_\gamma=\partial T/\partial\gamma^\cdot$, $\mathbf{x}=\|\gamma, p_\gamma\|^T$, $\mathbf{q}=\|\alpha, \beta\|^T$ и приведем уравнения движения спутника к виду (1.2). Полученные уравнения удовлетворяют всем условиям, предъявляемым к уравнениям (1.2) в п. 1, причем правые части этих уравнений $2\pi$-периодически зависят от $\gamma$. Вырожденная система (1.4) в данном случае имеет вид

$$\gamma^\cdot=p_\gamma/\lambda_1,\quad p_\gamma^\cdot=-4\lambda\lambda_1\sin\gamma\cos\gamma,\quad \lambda=(I_2-I_3)/I_1 \tag{3.1}$$

и эквивалентна уравнению математического маятника $2\gamma^{\cdot\cdot}+4\lambda\sin2\gamma=0$. Эти система допускает два двухпараметрических семейства периодических решений, выражающихся через эллиптические функции: семейство колебательных решений (аддитивную постоянную во времени опускаем)

$$\gamma=\gamma_0(t, c)\equiv\arcsin(c\,\mathrm{sn}\,2\sqrt{\lambda}t) \tag{3.2}$$
$$p_\gamma=p_0(t, c)\equiv2c\lambda_1\sqrt{\lambda}\,\mathrm{cn}\,2\sqrt{\lambda}t,\qquad a(c)=2K(|c|)/\sqrt{\lambda}$$

и семейство вращательных решений

$$\gamma=\gamma_0(t, c)\equiv\mathrm{am}(2\sqrt{\lambda}t/c) \tag{3.3}$$
$$p_\gamma=p_0(t,c)\equiv\frac{2\lambda_1\sqrt{\lambda}}{c}\,\mathrm{dn}\frac{2\sqrt{\lambda}\,t}{c},\qquad a(c)=\frac{cK(|c|)}{\sqrt{\lambda}},\quad c\neq0$$

Здесь $c\in(-1, 1)$ — параметр, модуль эллиптических функций $k=|c|$. При $c\neq0$ система (3.1) и семейства ее периодических решений (3.2), (3.3) удовлетворяют условиям, предъявляемым к системе (1.4) и решениям (1.5) в п. 1. Далее полагаем, что $c\in[c_1, c_2]\subset(-1, 1)$, $c_1c_2>0$.

Пусть $\varphi(t, c)=\|\gamma_0(t, c), p_0(t, c)\|^T$; функции $\gamma_0(t, c)$, $p_0(t, c)$ и $a(c)$ определены соотношениями (3.2) или (3.3). Первый из этих случаев будем называть случаем колебаний, второй — случаем вращений. Построим в плоскости $(c, \mu)$ множество $\Gamma^\circ(\varepsilon)$. Для исследуемой системы

$$\Lambda=\begin{Vmatrix}\lambda_2^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\quad C^\circ(t, c)=\frac{2-\lambda_1+\lambda\lambda_1}{\lambda_1}p_0(t, c)\begin{Vmatrix}0 & \lambda_2^{-1}\\ -1 & 0\end{Vmatrix}$$

поэтому $H^\circ=0$ и

$$\Gamma^\circ(\varepsilon)=\left\{(c,\mu): c_1\leqslant c\leqslant c_2,\quad \mu\geqslant0,\quad \left|\sin\frac{\mu a(c)}{2\sqrt{\lambda_2}}\right|\geqslant\varepsilon,\quad \left|\sin\frac{\mu a(c)}{2}\right|\geqslant\varepsilon\right\}$$

Если $\varepsilon\in(0, 1)$, то множество $\Gamma^\circ(\varepsilon)$ непусто и неограничено. Согласно теореме 1 для любого $\varepsilon\in(0, 1)$ существуют такие положительные числа $C_0$, $C_1$, $C_2$ и $M$, что при $(c, \mu)\in\Gamma^\circ(\varepsilon)$, $\mu\geqslant M$ система (1.2) относительно $\gamma$, $p_\gamma$, $\alpha$ и $\beta$ имеет единственное $a(c)$-периодическое решение $\mathbf{x}_*(t, c, \mu)$, $\mathbf{q}_*(t, c, \mu)$, удовлетворяющее условиям (1.8). В движениях спутника, описываемых указанным решением, $\alpha=O(\mu^{-2})$, $\beta=O(\mu^{-2})$, т. е. ось $Ox_1$ направлена приблизительно по касательной к орбите. Поэтому такие движения можно использовать для пассивной одноосной ориентации спутника.

Можно доказать, что исследуемая система (1.2) инвариантна относительно преобразований $(t, \gamma, p_\gamma, \alpha, \beta)\to(-t, -\gamma, p_\gamma, -\alpha, \beta)$, $(t, \gamma, p_\gamma, \alpha, \beta)\to$ $\to(-t, \gamma, -p_\gamma, -\alpha, -\beta)$, $(t, \gamma, p_\gamma, \alpha, \beta)\to(t, \gamma+\pi, p_\gamma, -\alpha, -\beta)$. Вследствие этой инвариантности и свойств функций $\gamma_0(t, c)$, $p_0(t, c)$ решение $\mathbf{x}_*(t, c, \mu)$, $\mathbf{q}_*(t, c, \mu)$ в случае колебаний удовлетворяет краевым условиям

$$\gamma(0)=\alpha(0)=\beta^\cdot(0)=p_\gamma({}^1/_4a)=\alpha({}^1/_4a)=\beta({}^1/_4a)=0,\quad a=a(c) \tag{3.4}$$

а в случае вращений — краевым условиям

$$\gamma(0)=\alpha(0)=\beta^\cdot(0)=\gamma({}^1/_4a)-{}^1/_2\pi=\alpha^\cdot({}^1/_4a)=\beta({}^1/_4a)=0,\quad a=a(c) \tag{3.5}$$

Можно доказать, что продолжение всякого решения краевой задачи (3.4) (краевой задачи (3.5)) на всю действительную ось является колебательным (вращательным) $a$-периодическим решением [7].

Введем множества

$$I_K^\circ(\varepsilon)=\left\{(c,\mu): c_1\leqslant c\leqslant c_2,\quad \mu\geqslant 0,\quad \left|\sin\frac{\mu a(c)}{4\sqrt{\lambda_2}}\right|\geqslant\varepsilon,\quad \left|\cos\frac{\mu a(c)}{4}\right|\geqslant\varepsilon\right\}$$

$$I_B^\circ(\varepsilon)=\left\{(c,\mu): c_1\leqslant c\leqslant c_2,\quad \mu\geqslant 0,\quad \left|\cos\frac{\mu a(c)}{4\sqrt{\lambda_2}}\right|\geqslant\varepsilon,\quad \left|\cos\frac{\mu a(c)}{4}\right|\geqslant\varepsilon\right\}$$

Справедливо следующее утверждение. Для любого $\varepsilon\in(0, 1)$ существуют такие положительные числа $C_0$, $C_1$, $C_2$ и $M$, что при $(c, \mu)\in I_K^\circ(\varepsilon)$ $((c, \mu)\in I_B^\circ(\varepsilon))$, $\mu\geqslant M$ краевая задача (3.4) (краевая задача (3.5)) имеет единственное решение $\mathbf{x}_*(t, c, \mu)$, $\mathbf{q}_*(t, c, \mu)$, удовлетворяющее при $0\leqslant t\leqslant {}^1/_4 a(c)$ первым трем условиям (1.8) (продолжение этого решения на отрезок $[0, a(c)]$ удовлетворяет всем условиям (1.8)).

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2 из [3] и не использует понятия обобщенной функции Грина и факта существования у системы (1.2) первого интеграла. Упрощение доказательства обусловлено тем, что краевая задача $\Delta\gamma(0)=\Delta p_\gamma({}^1/_4 a)=0$ $(\Delta\gamma(0)=\Delta\gamma({}^1/_4 a)=0)$ для уравнений в вариациях $\Delta\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}=\Delta p_\gamma/\lambda_1$, $\Delta p_\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}=-4\lambda\lambda_1\cos 2\gamma\cdot\Delta\gamma$ в случае решения (3.2) (решения (3.3)) при $c\in[c_1, c_2]$ не имеет нетривиальных решений. Результаты численного исследования краевых задач (3.4) и (3.5) (в других переменных) описаны в [1]. Там же приведен подробный анализ механического смысла найденных решений.

4. В качестве второго примера применения теоремы 1, теперь к системе вида (1.9), рассмотрим режим одноосной гравитационной ориентации спутника. На круговой орбите движение спутника (твердого тела) относительно центра масс под действием гравитационного момента можно описать уравнениями [2]:

$$\Omega_1^{\boldsymbol{\cdot}}=\lambda(\Omega_2\Omega_3-3a_{32}a_{33}),\quad \Omega_2^{\boldsymbol{\cdot}}=(1-\lambda_1)(\Omega_1\Omega_3-3a_{31}a_{33})/(1+\lambda\lambda_1)$$

$$\Omega_3^{\boldsymbol{\cdot}}=-(1-\lambda_1+\lambda\lambda_1)(\Omega_1\Omega_2-3a_{31}a_{32}),\quad \gamma^{\boldsymbol{\cdot}}=\Omega_1-\operatorname{tg}\beta(\Omega_2\cos\gamma-\Omega_3\sin\gamma)$$

$$\delta^{\boldsymbol{\cdot}}=\sec\beta(\Omega_2\cos\gamma-\Omega_3\sin\gamma)-1,\quad \beta^{\boldsymbol{\cdot}}=\Omega_2\sin\gamma+\Omega_3\cos\gamma \tag{4.1}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по безразмерному орбитальному времени $t$, $\lambda_1=I_1/I_3$, $\lambda=(I_2-I_3)/I_1$; $I_1$, $I_2$, $I_3$ — моменты инерции спутника относительно его главных центральных осей инерции $Ox_1$, $Ox_2$, $Ox_3$; $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ — отнесенные к орбитальной частоте компоненты абсолютной угловой скорости спутника в системе координат $Ox_1x_2x_3$; $\gamma$, $\delta$ и $\beta$ — углы (фиг. 3), задающие положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно введенной в п. 3 орбитальной системы координат. Входящие в (4.1) и нужные для дальнейшего элементы соответствующей матрицы перехода (см. п. 3) выражаются через эти углы следующим образом:

$$a_{21}=\sin\beta,\qquad a_{31}=-\cos\beta\cos\delta$$

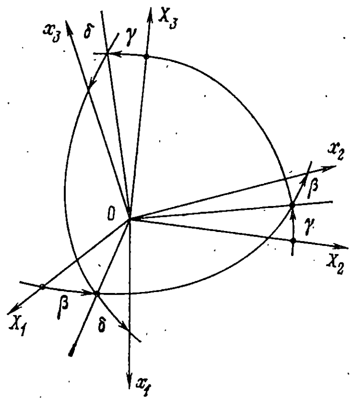
$$a_{22}=\cos\beta\cos\gamma,\qquad a_{32}=-\sin\delta\sin\gamma+\cos\delta\sin\beta\cos\gamma$$

$$a_{23}=-\cos\beta\sin\gamma,\qquad a_{33}=-\sin\delta\cos\gamma-\cos\delta\sin\beta\sin\gamma$$

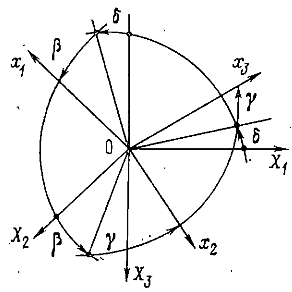
Полагаем, что в (4.1) $0<\lambda_1$, $0<\lambda\ll 1$. Эти уравнения допускают первый интеграл (обобщенный интеграл энергии):

$$\begin{gathered}{}^1/_2\lambda_1(\Omega_1^2-2\Omega_1a_{21}+3a_{31}^2)+{}^1/_2(1+\lambda\lambda_1)(\Omega_2^2-2\Omega_2a_{22}+3a_{32}^2)+\\+{}^1/_2(\Omega_3^2-2\Omega_3a_{23}+3a_{33}^2)=\mathrm{const}\end{gathered} \tag{4.2}$$

Преобразуем систему (4.1). Исключим из нее $\Omega_2$ и $\Omega_3$, выразив их через $\delta^{\boldsymbol{\cdot}}$ и $\beta^{\boldsymbol{\cdot}}$, и в полученных уравнениях сделаем замену $t=\mu\tau$, $\Omega_1=\mu^{-1}\Omega$, $\delta=\mu^{-1}\xi$, $\beta=\mu^{-1}[\eta+\lambda_1\Omega/(4-3\lambda_1)]$, $\mu=\lambda^{-1/2}$.




Фиг. 2




Фиг. 3

В результате придем к системе

$$\begin{gathered}
\gamma'=d\Omega-\eta+\mu^{-2}F_1(\gamma,\ \Omega,\ \xi,\ \eta,\ \xi',\ \eta',\ \mu^{-2}) \\
\Omega'=-\sin\gamma\cos\gamma+\mu^{-2}F_2(\gamma,\ \Omega,\ \xi,\ \eta,\ \xi',\ \eta',\ \mu^{-2}) \\
\xi''+\mu^2 d_1^2\xi=-b\Omega\eta'+F_3(\gamma,\ \Omega,\ \xi,\ \eta,\ \xi',\ \eta',\ \mu^{-2}) \\
\eta''+\mu^2 d_2^2\eta=b\Omega\xi'+F_4(\gamma,\ \Omega,\ \xi,\ \eta,\ \xi',\ \eta',\ \mu^{-2}) \\
d=4(1-\lambda_1)/(4-3\lambda_1),\quad b=\lambda_1(2-3\lambda_1)/(4-3\lambda_1) \\
d_1=\sqrt{3(1-\lambda_1)},\quad d_2=\sqrt{4-3\lambda_1}
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по $\tau$; функции $F_j$ ($j=1,\ldots,4$) аналитически зависят от $\mu^{-2}$; при $\xi$, $\eta$, $\xi'$, $\eta'$, $\mu^{-2}\to 0$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}
F_j(\gamma,\ \Omega,\ \xi,\ \eta,\ \xi',\ \eta',\ \mu^{-2})-F_j(\gamma,\ \Omega,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \mu^{-2})= \\
=O[|\xi|+|\eta|+\mu^{-2}(|\xi'|+|\eta'|)] \quad (j=3,\ 4)
\end{gathered}$$

Первый интеграл (4.2) в новых переменных принимает вид

$$\lambda_1(d\Omega^2+\sin^2\gamma)+d_1^2\xi^2+d_2^2\eta^2+\mu^{-2}G_1(\gamma,\ \Omega,\ \xi,\ \eta,\ \xi',\ \eta',\ \mu^{-2})=\text{const} \tag{4.4}$$

в котором $G_1$ аналитически зависит от $\mu^{-2}$. Если дифференцирование по $\tau$ обозначать точкой, положить $\mathbf{x}=\|\gamma,\ \Omega\|^T$, $\mathbf{q}=\|\xi,\ \eta\|^T$ и ввести подходящим образом функции $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$, $A_0$, $\Pi$, $G$ и $G_1$, то систему (4.3) и ее интеграл (4.4) можно записать соответственно в виде (1.9) и (1.10). Вырожденная система (1.11) в данном случае принимает вид

$$\gamma'=d\Omega,\qquad \Omega'=-\sin\gamma\cos\gamma \tag{4.5}$$

и, так же как система (3.1), допускает два семейства периодических решений: колебательные решения

$$\gamma=\gamma_0(\tau,\ c)\equiv\arcsin(c\,\mathrm{sn}\sqrt{d}\tau) \tag{4.6}$$

$$\Omega=\Omega_0(\tau,c)\equiv\frac{c}{\sqrt{d}}\mathrm{cn}\sqrt{d}\,\tau,\qquad a(c)=\frac{4K(|c|)}{\sqrt{d}}$$

и вращательные решения

$$\begin{gathered}
\gamma=\gamma_0(\tau,c)\equiv\mathrm{am}\frac{\sqrt{d}\,\tau}{c},\qquad \Omega=\Omega_0(\tau,c)\equiv\frac{1}{c\sqrt{d}}\mathrm{dn}\frac{\sqrt{d}\,\tau}{c} \\
a(c)=2cK(|c|)/\sqrt{d},\quad c\neq 0
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Здесь, как в (3.2) и (3.3), $c\in(-1,\ 1)$ — параметр, модуль эллиптических функций $k=|c|$. При $c\neq 0$ система (4.5) и семейства ее периодических решений (4.6), (4.7) удовлетворяют условиям, предъявляемым к системе (1.4) и решениям (1.5) в п. 1. Далее полагаем, что $c \in [c_1, c_2] \subset \subset (-1, 1)$, $c_1 c_2 > 0$.

Пусть $\varphi(\tau, c) = \|\gamma_0(\tau, c), \Omega_0(\tau, c)\|^T$; функции $\gamma_0(\tau, c)$, $\Omega_0(\tau, c)$ и $a(c)$ определены соотношениями (4.6) или (4.7). Построим в плоскости $(c, \mu)$ множество $I^\circ(\varepsilon)$. Для исследуемой системы

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2 \end{Vmatrix}, \qquad C^\circ(\tau, c) = b\Omega_0(\tau, c) \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

поэтому $H^\circ = 0$ и

$$I^\circ(\varepsilon) = \{(c, \mu): c_1 \leqslant c \leqslant c_2, \ \mu \geqslant 0, \ |\sin(^1/_2 \mu d_j a(c))| \geqslant \varepsilon \ (j=1, 2)\}$$

Согласно теореме 1 для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют такие положительные числа $C_0$, $C_1$, $C_2$ и $M$, что при $(c, \mu) \in I^\circ(\varepsilon)$, $\mu \geqslant M$ система (4.3) имеет единственное $a(c)$-периодическое решение $\mathbf{x}_*(\tau, c, \mu)$, $\mathbf{q}_*(\tau, c, \mu)$, удовлетворяющее условиям (1.8). В движениях спутника, описываемых таким решением, $\delta = O(\mu^{-3})$, $\beta = O(\mu^{-1})$, т. е. ось $Ox_1$ направлена приблизительно в притягивающий центр. Поэтому такие движения можно использовать для пассивной одноосной ориентации спутника.

Система (4.3) инвариантна относительно преобразований $(\tau, \gamma, \Omega, \xi, \eta) \to (-\tau, -\gamma, \Omega, -\xi, \eta)$, $(\tau, \gamma, \Omega, \xi, \eta) \to (-\tau, \gamma, -\Omega, -\xi, -\eta)$, $(\tau, \gamma, \Omega, \xi, \eta) \to (\tau, \gamma+\pi, \Omega, \xi, \eta)$. В силу такой инвариантности и свойств функций $\gamma_0(\tau, c)$, $\Omega_0(\tau, c)$ решение $\mathbf{x}_*(\tau, c, \mu)$, $\mathbf{q}_*(\tau, c, \mu)$ в случае колебаний удовлетворяет краевым условиям

$$\gamma(0) = \xi(0) = \eta'(0) = \Omega(^1/_4 a) = \xi(^1/_4 a) = \eta(^1/_4 a) = 0, \quad a = a(c) \tag{4.8}$$

а в случае вращений — краевым условиям

$$\gamma(0) = \xi(0) = \eta'(0) = \gamma(^1/_4 a) - {}^1/_2\pi = \xi(^1/_4 a) = \eta'(^1/_4 a) = 0, \quad a = a(c) \tag{4.9}$$

Продолжение всякого решения краевой задачи (4.8) (краевой задачи (4.9)) на всю действительную ось является колебательным (вращательным) периодическим решением [7].

Введем множества

$$I_K^\circ(\varepsilon) = \{(c, \mu): c_1 \leqslant c \leqslant c_2, \ \mu \geqslant 0, \ |\sin(^1/_4 \mu d_1 a(c))| \geqslant \varepsilon, \ |\cos(^1/_4 \mu d_2 a(c))| \geqslant \varepsilon\}$$

$$I_B^\circ(\varepsilon) = \{(c, \mu): c_1 \leqslant c \leqslant c_2, \ \mu \geqslant 0, \ |\sin(^1/_4 \mu d_j a(c))| \geqslant \varepsilon \ (j=1, 2)\}$$

Справедливо следующее утверждение. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют такие положительные числа $C_0$, $C_1$, $C_2$ и $M$, что при $(c, \mu) \in I_K^\circ(\varepsilon)$ ($(c, \mu) \in I_B^\circ(\varepsilon)$), $\mu \geqslant M$ краевая задача (4.8) (краевая задача (4.9)) имеет единственное решение $\mathbf{x}_*(\tau, c, \mu)$, $\mathbf{q}_*(\tau, c, \mu)$, удовлетворяющее на отрезке $[0, {}^1/_4 a(c)]$ первым трем условиям (1.8). Продолжение этого решения на отрезок $[0, a(c)]$ удовлетворяет всем условиям (1.8). Доказательство этого утверждения проводится, как и доказательство аналогичного утверждения в п. 3. Результаты численного исследования краевых задач (4.8), (4.9) (в других переменных) описаны в [2]. Там же дан детальный анализ механического смысла найденных решений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Сазонов В. В.* Одноосная аэродинамическая ориентация искусственных спутников.— Космич. исслед., 1985, т. 23, № 4, с. 518—529.
2. *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Одноосная гравитационная ориентация искусственных спутников.— Космич. исслед., 1981, т. 19, № 5, с. 659—673.
3. *Сазонов В. В.* Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром.— ПММ, 1983, т. 47, № 5, с. 707—719.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970, 720 с.
5. *Lewis D. C.* On the role of first integrals in the perturbation of periodic solutions.— Ann. Math., 1956, v. 63, № 3, p. 535—548.
6. *Hölder E.* Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik.— Math. Z., 1929, B. 31, S. 197—257.
7. *Heinbockel J. H., Struble R. A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries.— SIAM Journal, 1965, v. 13, № 2, p. 425—440.— Рус. перев.: Механика, Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1966, № 1, с. 3—17.


Москва

Поступила в редакцию
11.I.1985