МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1986

УДК 531.76

О СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ПОВОРОТА ВЕКТОРА В ИНЕРЦИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

СВИРИДОВ М. В.

В работах [1, 2] оценивается погрешность определения углового положения твердого тела, вызванная шумами измерителей-преобразователей компонент вектора угловой скорости. Эта погрешность характеризовалась углом, на который необходимо довернуть рассчитанный из кинематических уравнений инерциальный базис вокруг соответствующей эйлеровой оси, чтобы его положение совпало с истинным. Однако во многих случаях существует необходимость решения более общей задачи — оценке точности измерения поворота некоторого заданного вектора, связанного с твердым телом, в инерциальном пространстве [1]. В данной работе эта точность характеризуется средним модулем разности измеренного и истинного векторов, определенных своими компонентами в инерциальном базисе. Как и в [2], предполагается, что погрешность численного решения кинематических уравнений пренебрежимо мала. С учетом нескольких первых членов разложения матрицанта системы уравнений для матрицы оператора возмущения [2] рассмотрена зависимость исследуемой точности от некоторых видов вращения твердого тела. В случае белых шумов определены коэффициенты релаксации первых моментов элементов этой матрицы. Для двух примеров даны точные решения полученных уравнений. В качестве кинематических параметров в работе использованы элементы матрицы направляющих косинусов.

1. Предполагается, что измеренная угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}'$ твердого тела отличается от истинной $\boldsymbol{\Omega}$ на некоторый случайный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\Omega}'-\boldsymbol{\Omega}$. При получении приближенных оценок считается, что компоненты ε_i этого вектора, заданные в связанном (измерительном) базисе, статистически независимы между собой, стационарны, имеют нулевые средние и одинаковые корреляционные функции $\Psi_{12}=\Psi(t_1-t_2)$, определяемые выражением

$$\langle\varepsilon_i(t_1)\varepsilon_k(t_2)\rangle=\Psi_{12}\delta_{ik} \tag{1.1}$$

где скобки $\langle\ \rangle$ означают статистическое усреднение, δ_{ik} — символ Кронекера. Если специально не оговорено, все латинские индексы в дальнейшем принимают значения 1, 2, 3.

Рассчитанная в процессе решения кинематических уравнений матрица $A'(t)$ направляющих косинусов представляется в виде $A'=Aa$ [2]. Здесь $A(t)$ — истинная матрица, а $a(t)$ — матрица возмущения. Подстановка этого соотношения в возмущенные шумами ε кинематические уравнения приводит к следующей системе уравнений для элементов матрицы a, имеющей стандартную форму:

$$a^{\boldsymbol{\cdot}}=-\omega a,\quad a(0)=E \tag{1.2}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени, $\omega=A^T\varepsilon A$ (индекс T означает транспонирование), матрица ε имеет компоненты $\varepsilon_{ik}=e_{ikl}\varepsilon_l$, e_{ikl} — символ Леви-Чивита, по немым латинским индексам предполагается суммирование и E — единичная матрица. Согласно теореме Эйлера

$$\omega_i=A_{ki}\varepsilon_k=[s_is_k+(\delta_{ik}-s_is_k)\cos F+e_{ikl}s_l\sin F]\varepsilon_k \tag{1.3}$$

В этом выражении $\mathbf{s}(t)$ — единичный вектор, направленный вдоль мгновенной эйлеровой оси поворота твердого тела на угол $F(t)$. В случае плоского вращения $\mathbf{s}=\text{const}$ и $\boldsymbol{\Omega}=F^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{s}$.

Пусть задан некоторый вектор **R**, компоненты $P_i=\text{const}$ которого в измерительном базисе известны и образуют матрицу $P=\|P_1P_2P_3\|^T$. В инерциальном базисе компоненты $Q_i(t)$ этого же вектора составляют матрицу $Q=A^TP$. Если Q_i' — рассчитанные по измерениям угловой скорости компоненты Q_i, то погрешность определения поворота вектора **R** характеризуется вектором **x** рассогласования, имеющим в инерциальном базисе компоненты $x_i=Q_i-Q_i'$. Эти компоненты образуют матрицу x, для которой справедливо соотношение

$$x=(E-a^T)Q \tag{1.4}$$

Использование матрицы направляющих косинусов представляется более предпочтительным, чем других кинематических параметров. Это связано с тем, что основное соотношение (1.4) линейно по a^T. Например, в параметрах Кейли — Клейна это соотношение принимает вид $h=H-u^+Hu$, где $h=x_i\sigma_i$, $H=Q_i\sigma_i$, σ_i — спиновые матрицы Паули [2] и u — матрица группы $SU(2)$, соответствующая матрице a (u^+ — эрмитово сопряженная матрица). Видно, что статистические свойства матрицы h, а значит, и исследуемой погрешности определяются свойствами квадратичных форм из параметров Кейли — Клейна, коэффициентами которых служат координаты измеряемого вектора, что не всегда удобно. Аналогичные соображения можно привести и для параметров Родрига — Гамильтона.

Учитывая ортогональность матрицы a, из (1.4) можно получить

$$L^2=\langle x^Tx\rangle=Q^T(2E-\langle a^T\rangle-\langle a\rangle)Q \tag{1.5}$$

для среднего квадрата модуля вектора **x**, заданного в инерциальном базисе, и

$$\sigma^2=L^2-\langle x^T\rangle\langle x\rangle=Q^T(E-\langle a\rangle\langle a^T\rangle)Q \tag{1.6}$$

для дисперсии этого модуля. Величины (1.5) и (1.6) используются далее для оценок исследуемой погрешности.

В общем случае задача вычисления $\langle a\rangle$ решается усреднением матрицианта системы уравнений (1.2), представленного в виде ряда Пикара. В предположении равенства нулю всех нечетных моментов вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ ряд для $\langle a\rangle$ имеет вид

$$\langle a\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma_{2m}M^{(2m)} \tag{1.7}$$

Здесь $\Gamma_{2m}(t)$ — оператор многократного интегрирования вначале по t_{2m} от 0 до t_{2m-1}, затем — по t_{2m-1} от 0 до t_{2m-2} и т. д., причем последний интеграл имеет пределы от 0 до t. Моменты $M^{(2m)}(t_1,\ldots,t_{2m})$ определяются по формуле $M^{(2m)}=\langle\prod\omega(t_k)\rangle$ $(k=1,2,\ldots,2m)$.

В соответствии с (1.7) величины L^2 и σ^2 представляются рядами

$$L^2=-\sum_{m=1}^{\infty}Q^T[\Gamma_{2m}(M^{(2m)}+M^{(2m)^T})Q$$

$$\sigma^2=R^2-\sum_{m,n=0}^{\infty}Q^T(\Gamma_{2m}M^{(2m)})(\Gamma_{2n}M^{(2n)})Q$$

Здесь $R^2=P_iP_i=Q_iQ_i=\text{const}$ — квадрат модуля измеряемого вектора. Из этих формул видно, что с точностью до первого приближения ($m,n\leqslant 1$) величины L^2 и σ^2 совпадают.

Из соотношений (1.1) и (1.3) следует

$$M_{ik}^{(2)}(t_1,t_2)=[A_{ji}(t_1)A_{jk}(t_2)-A_{jl}(t_1)A_{jl}(t_2)\delta_{ik}]\Psi_{12} \tag{1.8}$$

2. Рассмотрим примеры для плоского вращения твердого тела. В этом случае формула (1.8) приобретает вид

$$M_{ik}^{(2)} = -[(\delta_{ik}-s_i s_k)+(\delta_{ik}+s_i s_k)\cos f_{12}+e_{ikl}s_l \sin f_{12}]\Psi_{12}$$

$$f_{12}=F(t_1)-F(t_2)$$

1. Твердое тело совершает постоянное вращение с угловой скоростью $|\boldsymbol{\Omega}|=\Omega=\text{const}$. Воспользовавшись оценкой скорости роста средних двойных интегралов, данной в [2], в первом приближении можно получить

$$L^2 \simeq 2Dt \tag{2.1}$$

Здесь $2D$ — коэффициент диффузии погрешности, даваемый выражениями

$$D=N_- \int_0^\infty d\tau\, \Psi(\tau)+N_+ \int_0^\infty d\tau\, \Psi(\tau)\cos\Omega\tau, \qquad N_\pm=R^2\pm\mathbf{Rs} \tag{2.2}$$

Поскольку при плоском вращении скалярное произведение $\mathbf{Rs}=\text{const}$, величина D тоже постоянна. Из (2.1) и (2.2) видно, что исследуемая погрешность определяется полной «интенсивностью» шумов ε_i и их спектральной плотностью на частоте Ω.

2. Твердое тело совершает случайное плоское вращение с угловой, являющейся стационарной случайной функцией скоростью, имеющей нулевое среднее, корреляционную функцию $\psi(t_1-t_2)$, дисперсию σ_0 и нормальный закон распределения вероятностей. Коэффициент диффузии определяется формулой

$$D=N_- \int_0^\infty d\tau\, \Psi(\tau)+N_+ \int_0^\infty d\tau\, \Psi(\tau)\exp\left[-\tau\int_0^\tau d\theta\, \psi(\theta)+\int_0^\tau d\theta\, \theta\psi(\theta)\right] \tag{2.3}$$

Если время корреляции случайной угловой скорости твердого тела заметно превышает время корреляции шумов, то формула (2.3) существенно упрощается:

$$D\simeq N_- \int_0^\infty d\tau\, \Psi(\tau)+N_+ \int_0^\infty d\tau\, \Psi(\tau)\exp(-\sigma_0^2\tau^2)$$

В этом случае рост погрешности перестает зависеть от характера временной зависимости угловой скорости, задаваемой функцией ψ.

3. Твердое тело покоится и $\boldsymbol{\Omega}=0$. Шумы ε_i подчиняются гауссовой статистике. На основании метода математической индукции и соотношения (1.1) можно доказать, что $M^{(2m)}=\beta_{2m}E$ и $\langle a\rangle=\beta E$ (β_{2m}, β — скаляры). Формулы (1.5), (1.6) преобразуются к виду

$$L^2=2R^2(1-\beta), \qquad \sigma^2=R^2(1-\beta^2), \qquad \beta=1+\sum_{m=1}^\infty \Gamma_{2m}\beta_{2m}$$

Расцепляя корреляции высокого порядка, можно получить следующий ряд для β: $\beta=1-2\Gamma_2\Psi_{12}+\Gamma_4(4\Psi_{12}\Psi_{34}+2\Psi_{13}\Psi_{24}+4\Psi_{14}\Psi_{23})+\ldots$ Сравнение этого ряда с разложением матрицанта скалярного дифференциального уравнения $\dot\alpha=i\eta\alpha$, где η — случайный гауссов процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $\langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle=2\Psi_{12}$, показывает, что с точностью до членов четвертого порядка малости по η можно записать $\beta\simeq \simeq\langle\alpha\rangle-2I$, $\langle\alpha\rangle=\exp(-2\Gamma_2\Psi_{12})$, $I=\Gamma_4\Psi_{13}\Psi_{24}$.

Интересен случай, когда шумы ε_i имеют стационарный интеграл. Такая ситуация возникает при возникновении стационарного шума ζ_i в измерителе-преобразователе соответствующей компоненты вектора угловой скорости интегрирующего типа (см., например, [2, 3]). Пусть $\langle\zeta_i\rangle=0$ и $\langle\zeta_i(t_1)\zeta_k(t_2)\rangle=\varphi(t_1-t_2)\delta_{ik}$. Тогда $\Psi(\tau)=-\ddot\varphi(\tau)$. Момент $\langle\alpha\rangle$ ограничен.

Однако интеграл I с точностью до несущественных ограниченных слагаемых будет линейно зависеть от времени: $I \simeq -Gt$, где $G = \int\limits_0^\infty d\tau [\varphi^\bullet(\tau)]^2$.

По такому же закону будут возрастать величины L^2 и σ^2. Коэффициенты диффузии для них имеют вид: $4R^2G$ для L^2 и $4R^2G \exp(-\varkappa^2)$ для σ^2, где $\varkappa$ — дисперсия процесса ζ_i. Таким образом, в рассмотренном примере дрейф погрешности определения координат вектора в инерциальном пространстве проявляется только в четвертом порядке теории возмущений.

3. В заключение рассмотрим влияние белых шумов на поведение исследуемой погрешности. Пусть к шуму ε добавляется статистически независимый гауссовый белый шум ξ с корреляционной матрицей

$$\langle \xi_i(t_1)\xi_k(t_2)\rangle = B_{ik}(t_1)\delta(t_1-t_2) \tag{3.1}$$

Тогда уравнение для a приобретает вид $a^\bullet = -(\nu+\omega)a$, $a(0)=E$, $\nu = A^T\xi A$, $\xi_{ik}=e_{ikl}\xi_l$.

Условная плотность вероятности перехода при заданной выборочной функции $\omega(t)$ удовлетворяет уравнению Эйнштейна — Фоккера [4] с коэффициентами сноса и диффузии

$$D_{ik} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\langle \Delta a_{ik}\rangle_0 = \omega_{ij}a_{jk} + \frac{1}{2}C_{illj}a_{jk} \tag{3.2}$$

$$D_{ipkq} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\langle \Delta a_{ip}\Delta a_{kq}\rangle_0 = \frac{1}{2}C_{ijkl}a_{jp}a_{lq}$$

Здесь Δa_{ik} — приращение элемента матрицы a на интервале $[t, t+\Delta t]$, а $\langle\,\rangle_0$ означает условное среднее по белым шумам. Коэффициенты C_{ijkl} определяются соотношением $\langle \nu_{ij}(t_1)\nu_{kl}(t_2)\rangle = C_{ijkl}\delta(t_1-t_2)$. С учетом (3.1) можно получить

$$C_{ijkl} = e_{ijp}e_{klq}A_{rp}A_{sq}B_{rs}$$

Согласно (3.2), уравнение для условного среднего $\langle a\rangle_0 = b$ имеет вид [5]:

$$b^\bullet = -(\mu+\omega)b, \quad b(0)=E \tag{3.3}$$

Здесь матрица μ, определяемая выражением

$$\mu_{ik} = {}^1/_2 C_{illk} = {}^1/_2(\delta_{jk}B_{ll} - A_{pi}A_{qk}B_{pq}) \tag{3.4}$$

описывает релаксацию матрицы b, а значит, и исследуемой погрешности во времени.

В более простом варианте $\omega=0$ и белые шумы ξ_i стационарны и статистически независимы между собой. В этом случае корреляционная матрица B_{ik} постоянна и диагональна. Из (3.4) видно, что матрица μ не зависит от вида движения твердого тела лишь при одинаковой спектральной плотности γ шумов ξ_i, т. е. если $B_{ik}=\gamma\delta_{ik}$. Тогда $\mu_{ik}=\gamma\delta_{ik}$ и уравнение (3.3) имеет решение $b=\langle a\rangle = E\exp(-\gamma t)$.

Отсюда $L^2 = 2R^2[1-\exp(-\gamma t)]$, $\sigma^2 = R^2[1-\exp(-2\gamma t)]$.

Видно, что погрешность измерения поворота вектора в инерциальном пространстве, обусловленная одинаковыми белыми шумами в каждом измерителе-преобразователе компонент вектора угловой скорости, не зависит от вида вращения твердого тела. Если же интенсивности шумов различны, то, как следует из (3.4), релаксация погрешности зависит от вида движения. Например, при вращении твердого тела вокруг первой координатной оси, когда $s_1=1$, $s_2=0$, $s_3=0$, из (1.3) и (3.4) следует

$$\mu = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \gamma_2+\gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1+\gamma_2\sin^2 F+\gamma_3\cos^2 F & (\gamma_2-\gamma_3)\sin F\cos F \\ 0 & (\gamma_3-\gamma_2)\sin F\cos F & \gamma_1+\gamma_2\cos^2 F+\gamma_3\sin^2 F \end{matrix}\right\| \tag{3.5}$$

$$\gamma_1 = B_{11}, \quad \gamma_2 = B_{22}, \quad \gamma_3 = B_{33}$$

Из (3.5) видно, что матрица μ не зависит от F лишь при $\gamma_2=\gamma_3$. Наконец, если твердое тело покоится и $F=0$, то, согласно (3.5)

$$\mu=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \gamma_2+\gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1+\gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1+\gamma_2 \end{Vmatrix}$$

Решение (3.3) в этом случае имеет вид $b=\langle a\rangle=\exp(-\mu t)$. Подстановка этого решения в (1.6) и (1.7) дает формулы для L^2 и σ^2:

$$L^2=2\{R^2-Q_1^2\exp[-{}^1/_2(\gamma_2+\gamma_3)t]-Q_2^2\exp[-{}^1/_2(\gamma_1+\gamma_3)t]-$$
$$-Q_3^2\exp[-{}^1/_2(\gamma_1+\gamma_2)t]\}$$

$$\sigma^2=R^2-Q_1^2\exp[-(\gamma_2+\gamma_3)t]-Q_2^2\exp[-(\gamma_1+\gamma_3)t]-$$
$$-Q_3^2\exp[-(\gamma_1+\gamma_2)t]$$

которые позволяют оценить дрейф исследуемой погрешности на значительных временах в зависимости от интенсивностей белых шумов.

Интересно сравнить полученные результаты с результатами, данными в [2], где показано, что в общем случае различных белых шумов дисперсия угла разворота вокруг соответствующей эйлеровой оси рассчитанного и истинного положений твердого тела не зависит от вида его вращения. Это обусловлено тем, что указанная дисперсия зависит только от следа средней матрицы оператора возмущения, в то время как погрешность определения координат вектора в инерциальном пространстве определяется всеми элементами этой матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. М.: Наука, 1967. 647 с.
2. *Кробка Н. И., Свиридов М. В.* О влиянии случайных возмущений угловой скорости на решение кинематической задачи.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 1, с. 145–150.
3. *Кробка Н. И., Свиридов М. В.* Влияние случайной частотной подставки в кольцевом лазере на точность измерения вращения.– Квант. электроника, 1985, т. 12, № 2, с. 363–367.
4. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1967. 495 с.
5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.

Москва

Поступила в редакцию 12.III.1985