

УДК 531.383

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЖУРАВЛЕВ В. Ф.

Выводятся уравнения движения динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки под действием произвольного внешнего момента.

Уравнения записаны в невырождающихся переменных, облегчающих применение асимптотических методов и упрощающих геометрическую интерпретацию движения.

Рассматривается задача о поведении волчка Лагранжа в случае, когда точка подвеса совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости. Особенность задачи состоит в том, что траектория единичного вектора оси симметрии тела в указанных условиях может быть всюду плотной на единичной сфере. Это делает невозможным использование для описания движения локальных координат типа углов Эйлера.

Применение уравнений в невырождающихся переменных позволяет осуществить полное исследование системы. Полученные результаты имеют отношение к модели ядерного магнитного резонанса, для которого в данной работе выводятся уравнения типа уравнений Блоха [1], минуя феноменологические подходы.

Рассмотренная модель может служить также и для описания ряда явлений в гироскопах с неконтактным подвесом.

1. Уравнения движения. Рассмотрим динамически симметричное твердое тело (фиг. 1), закрепленное в точке O , момент инерции которого вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через точку O , обозначим A , а момент инерции тела вокруг оси симметрии — C . К телу приложен произвольный внешний момент: $M = M_1 + M_2$, где M_1 — момент внешних сил, перпендикулярный оси симметрии, а M_2 — параллельный ей. (На фиг. 1 показан лишь частный случай нагружения тела силой тяжести.) Трехгранник xuz инерциальный.

Переменные, описывающие положение тела, таковы: x, y, z — компоненты единичного вектора $e = \{x, y, z\}$, направленного по оси симметрии, γ — угол, определяющий положение тела вокруг этой оси.

Для отсчета угла γ введем вспомогательный трехгранник $x_1y_1z_1$, ось z_1 которого направлена по оси тела, а положение двух других осей определяется условием: $(\Omega, e) = 0$, где Ω — абсолютная угловая скорость трехгранника $x_1y_1z_1$.

Введенный таким образом трехгранник является неголономным: его кинематика связана с эффектом параллельного переноса вектора на римановой сфере [2–3].

Уравнения движения описанного твердого тела в указанных переменных имеют вид

$$Ae \times e'' + C\gamma' e' = M_1, \quad C\gamma'' = M_2 \quad (1.4)$$

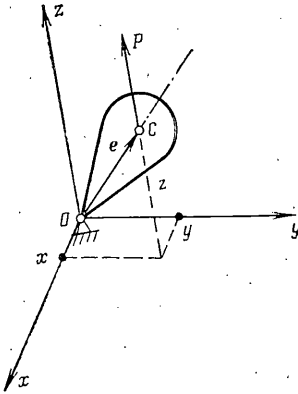
где M_2 — модуль вектора M_2 .

Доказательство. Угловая скорость тела равна $\Omega + \gamma'e$, поэтому кинетический момент имеет вид $K = J(\Omega + \gamma'e)$, где J — тензор инерции тела. Рассматривая кинетический момент в проекциях на оси x_1, y_1, z_1 и учитывая, что Ω не имеет проекции на ось z_1 , а e на оси x_1 и y_1 , получим $K = A\Omega + C\gamma'e$. Вычислим абсолютную производную вектора e : $e' = \Omega \times e$. Умножая векторно это равенство слева на вектор e , найдем $e \times e' = e \times [\Omega \times e] = \Omega$.

В результате выражение для кинетического момента приобретает вид: $K = Ae \times e' + C\gamma'e$. Запишем уравнение движения

$$dK/dt = Ae \times e'' + C\gamma''e + C\gamma'e' = M$$

Учитывая, что $e \times e'' \perp e$ и $e' \perp e$, получаем (1.1).



Фиг. 1

Если момент M выражен явно через введенные фазовые переменные $M = M(e, e', \gamma, \gamma')$, то уравнения (1.1) замкнуты и позволяют найти $e(t)$ и $\gamma(t)$. Обычно положение динамически симметричного тела вокруг оси симметрии (т. е. угол γ) интереса не представляет, в этом случае нахождение $e(t)$ завершает решение задачи. Если же необходимо найти положение тела полностью, то требуется еще проинтегрировать уравнения Пуассона с известной угловой скоростью $\Omega = e \times e'$ для нахождения положения трехгранника $x_1 y_1 z_1$.

Случай понижения порядка системы (1.1).

Случай I. Момент M не зависит от γ . Обозначив $H = C\gamma'$, получим

$$Ae \times e'' + He' = M_1(e, e', H), \quad H' = M_2(e, e', H)$$

Случай II. Составляющая $M_2 = 0$ (например, когда все силы, действующие на тело, проходят через ось симметрии):

$$Ae \times e'' + He' = M_1(e, e'), \quad H = \text{const} \neq 0 \quad (1.2)$$

Этот частный случай уравнений (1.1) приведен в [4].

Рассмотрим характерный пример, имеющий конкретные физические приложения, в котором использование уравнений (1.1) позволяет обойти трудности, связанные с вырождением локальных координат в окрестности особых точек, и более компактно и наглядно представить решение.

2. Волчок Лагранжа на подвижном основании. Полагаем без ограничения общности, что центр масс тела C находится от точки O на расстоянии, равном единице. Система координат xuz не вращается относительно инерциального пространства и вместе с точкой подвеса тела O совершает колебания в горизонтальной плоскости xy . В этой системе координат на тело действуют следующие силы: $F_1 = Pe_3$ — сила веса (ускорение земного тяготения предполагается направленным вверх), $F_2 = ae_a$ — сила инерции переносного движения, $F_3 = -\xi e'$ — диссипативная сила. Единичные векторы e_3, e_a и e определяют, соответственно, направление вертикали, направление ускорения точки подвеса и положение центра масс C : $e_3 = \{0, 0, 1\}$, $e_a = \{\cos \omega t, -\sin \omega t, 0\}$, $e = \{x, y, z\}$, где ω — частота вибрации, а ξ — коэффициент диссипации. Поскольку все силы проходят через ось симметрии, то момент сил вокруг этой оси равен нулю и описанная система имеет интеграл движения, равный проекции момента количества движений тела на эту ось. Обозначим величину этого интеграла буквой H . Уравнения движения тела могут быть представлены в виде (1.2):

$$Ae \times e'' + He' = e \times F, \quad F = F_1 + F_2 + F_3 \quad (2.1)$$

В дальнейшем будем считать величину кинетического момента H достаточно большой. В этом случае в системе (2.1) существует представительное интегральное многообразие, к которому стремятся не лежащие на

нем интегральные кривые при $H \rightarrow \infty$. Будем искать это многообразие в виде

$$\mathbf{e}^* = \mathbf{G}(t, \mathbf{e})/H \quad (2.2)$$

Подлежащая определению функция $\mathbf{G}(t, \mathbf{e})$ должна удовлетворять уравнению, полученному после подстановки (2.2) в (2.1):

$$\frac{A}{H} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{A}{H^2} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{e}} \mathbf{G} + \mathbf{G} = \mathbf{e} \times \mathbf{F} \quad (2.3)$$

Это уравнение будем решать относительно \mathbf{G} асимптотически. Безразмерный малый параметр ε по предположению связывает заданные параметры задачи так:

$$A\omega/H \sim \xi/H \sim P/(\omega H) \sim \varepsilon, \quad a/(\omega H) \sim \varepsilon^2 \quad (2.4)$$

Соотношения эквивалентности определяют большую величину кинетического момента H и малую величину силы инерции переносного движения a в сравнении с силой тяжести P . Дальше никакие изменения в обозначениях в уравнениях (2.1)–(2.3) с целью явного выделения малого параметра ε не производятся, соотношения (2.4) учитываются лишь при сравнении порядков различных членов в процессе преобразований.

Введем функцию $\mathbf{G}_h = \mathbf{G} + o(\varepsilon^h)$, отличающуюся от точной, удовлетворяющей уравнению (2.3) функции $\mathbf{G}(t, \mathbf{e})$ членами более высокого порядка малости, чем ε^h (или, что эквивалентно, H^{-h}). Для различных \mathbf{G}_h в силу (2.3) получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0 &= P\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{G}_1 &= P\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3 + a\mathbf{e} \times \mathbf{e}_a - \frac{\xi}{H} \mathbf{e} \times \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{G}_2 &= P\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3 + a\mathbf{e} \times \mathbf{e}_a - \frac{\xi}{H} \mathbf{e} \times \mathbf{G}_1 - \frac{A}{H} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial t} - \frac{A}{H^2} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{G}_0}{\partial \mathbf{e}} \mathbf{G}_0 \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{G}_h &= P\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3 + a\mathbf{e} \times \mathbf{e}_a - \frac{\xi}{H} \mathbf{e} \times \mathbf{G}_{h-1} - \frac{A}{H} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{G}_{h-1}}{\partial t} - \frac{A}{H^2} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{G}_{h-2}}{\partial \mathbf{e}} \mathbf{G}_{h-2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Соотношения (2.5) представляют собой явную рекуррентную схему, позволяющую последовательно найти все \mathbf{G}_h . Используя теорему о сжимающем операторе в полном метрическом пространстве [5], стандартным образом доказываются существование и единственность неподвижной точки оператора $\alpha(t, \mathbf{e}) \rightarrow \beta(t, \mathbf{e})$:

$$\beta = P\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3 + a\mathbf{e} \times \mathbf{e}_a - \frac{\xi}{H} \mathbf{e} \times \alpha - \frac{A}{H} \mathbf{e} \times \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{A}{H^2} \mathbf{e} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{e}} \alpha$$

Очевидно, свойство сжимаемости у данного оператора имеется заведомо при достаточно больших H . Подставляя \mathbf{G}_0 в \mathbf{G}_1 , получаем первое приближение для интегрального многообразия (называемого также уточненными прецессионными уравнениями) в виде

$$\mathbf{e}^* = \frac{1}{H} P\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3 + \frac{1}{H} a\mathbf{e} \times \mathbf{e}_a - \frac{\xi P}{H^2} \mathbf{e} \times [\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3] \quad (2.6)$$

Подставляя найденное на предыдущем шаге \mathbf{G}_1 в \mathbf{G}_2 , находим второе приближение для искомого интегрального многообразия и этими приближениями ограничимся

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^* &= \frac{1}{H} \mathbf{e} \times (P\mathbf{e}_3 + a\mathbf{e}_a) - \frac{1}{H^2} \mathbf{e} \times [\mathbf{e} \times [\xi P\mathbf{e}_3 + \xi a\mathbf{e}_a + Aa\mathbf{e}_a^*]] - \\ &\quad - \frac{1}{H^3} \{ \xi^2 P + AP^2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_3) \} (\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Перейдем к вращающейся вместе с вектором перегрузки системе координат $e = \{x, y, z\} \rightarrow r = \{u, v, w\}$:

$$x = u \cos \omega t + v \sin \omega t, \quad y = -u \sin \omega t + v \cos \omega t, \quad z = w \quad (2.8)$$

$$e = \Gamma r, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Поскольку уравнения (2.6) и (2.7) записаны в инвариантной векторной форме, то замена переменных (2.8) в них сводится в правых частях лишь к замене e на r . Левая часть (e) преобразуется известным образом: $\Gamma^{-1} \dot{e} = \Gamma^{-1} (\dot{\Gamma} r + \Gamma \dot{r}) = \dot{r} + \Gamma^{-1} \dot{\Gamma} r = \dot{r} - \omega r_3 \times r$.

В итоге уравнение (2.6) запишется:

$$\dot{r} = (P/H - \omega) r \times r_3 + (a/H) r \times r_a - (\xi P/H^2) r \times [r \times r_3] \quad (2.9)$$

где векторы r_3 и r_a , а также необходимый для преобразования (2.7) вектор $\Gamma^{-1} e_a$ имеют вид

$$r_3 = \Gamma^{-1} e_3 = \{0, 0, 1\}, \quad r_a = \Gamma^{-1} e_a = \{1, 0, 0\}, \quad \Gamma^{-1} \dot{e}_a = -\omega \{0, 1, 0\} \quad (2.10)$$

Введем в уравнении (2.9) замену времени $t \rightarrow \tau$ и обозначения

$$t = (H^2/\xi P) \tau, \quad \mu = aH/(\xi P), \quad \Delta = (P/H - \omega) H^2/(\xi P) \quad (2.11)$$

Тогда в покоординатной форме это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \Delta v - uw, & \dot{v} &= -\Delta u + \mu w - vw \\ \dot{w} &= -\mu v + v^2 + u^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Уравнение второго приближения (2.7) после перехода к вращающейся системе координат и замены времени (2.11) в покоординатной форме запишется

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (\Delta - \alpha/\mu - \gamma w) v - uw + \alpha(v^2 + w^2) + \beta v w \\ \dot{v} &= -(\Delta - \alpha/\mu - \gamma w) u + \mu w - vw - \alpha u v - \beta(w^2 + u^2) \\ \dot{w} &= -\mu v + u^2 + v^2 - \alpha u w + \beta v w \end{aligned} \quad (2.13)$$

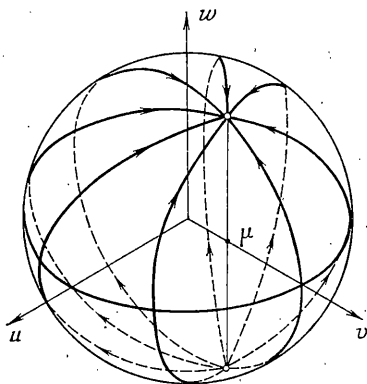
где дополнительно использованы обозначения $\alpha = a/P$, $\beta = \omega A a/(\xi P)$, $\gamma = AP/\xi H$.

Все входящие в задачу физические параметры в уравнениях первого приближения (2.12) связаны двумя безразмерными параметрами (11): μ характеризует интенсивность вибрации, а Δ — расстройку частот. Равенство $\Delta = 0$ определяет резонанс: частота вибрации совпадает с частотой прецессии P/H . Именно с этого случая начнем изучение уравнений (2.12). Эти уравнения, так же как и уравнения (2.13), представляют собой уравнения на сфере, соотношение $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ является их интегралом. Для полной интегрируемости достаточно знать еще один первый интеграл. Можно проверить, что при $\Delta = 0$ уравнения (2.12) на единичной сфере имеют интеграл

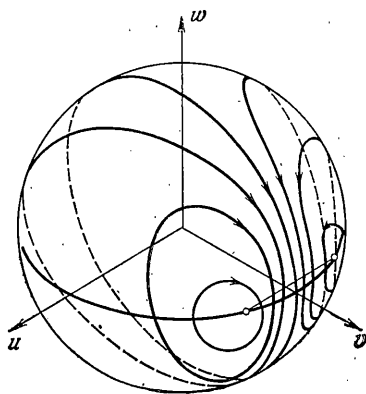
$$1/2 w^2 / (v - \mu)^2 - 1/2 (1 - \mu^2) / (v - \mu)^2 + \mu / (v - \mu) = \text{const} \quad (2.14)$$

Решение задачи в этом случае получается в квадратурах. Интеграл (2.14) представляет собой уравнение траектории на сфере в проекции на плоскость (v, w) . Если $\mu \leq 1$ (вибрация малой интенсивности), то интеграл (2.14) имеет особенность в точке $v = \mu$ и траектории на единичной сфере имеют вид, изображенный на фиг. 2. Имеются две неподвижные точки с координатами $u = 0$, $v = \mu$, $w = \sqrt{1 - \mu^2}$ и $u = 0$, $v = \mu$, $w = -\sqrt{1 - \mu^2}$. Первая из них представляет собой устойчивый узел, вторая — неустойчивый.

Если $\mu > 1$ (вибрация большой интенсивности), то интеграл (2.14) является аналитическим на единичной сфере и все траектории оказываются замкнутыми (фиг. 3). Две неподвижные точки в этом случае имеют



Фиг. 2



Фиг. 3

координаты $u = \pm \sqrt{1 - \mu^{-2}}$, $v = \mu^{-1}$, $w = 0$ и представляют собой особые точки типа «центр поля» на сфере. При этом одну из интегральных кривых представляет собой дуга большого круга в плоскости (v, w) . Уравнения (2.12) для этой траектории примут вид

$$u' = 0, \quad v' = (\mu - v)w, \quad w' = -(\mu - v)v$$

и для определения периода движения по этой траектории имеем

$$T_\tau = \oint \frac{dv}{(\mu - v)w} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\mu - \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 - 1}}$$

или в размерном времени

$$T = (H^2 / \xi P) T_\tau = 2\pi H^2 (a^2 H^2 - \xi^2 P^2)^{-1/2} \quad (2.15)$$

Рассмотрим теперь общий случай $\Delta \neq 0$. Приравнивая правые части уравнений (2.12) нулю, найдем стационарные точки системы в этом случае:

$$u_0 = \Delta(1 - w_0^2) / (\mu w_0), \quad v_0 = (1 - w_0^2) / \mu \quad (2.16)$$

$$w_0 = \pm \sqrt{-\frac{\Delta^2 + \mu^2 - 1}{2}} + \sqrt{\frac{(\Delta^2 + \mu^2 - 1)^2}{4} + \Delta^2}$$

При положительных μ обе стационарные точки лежат на полусфере $v > 0$. Их положение как функции $\mu \in [0, \infty)$ при различных Δ изображено на фиг. 4. Стрелками обозначено направление изменения положения этих точек при возрастании μ . Если $\Delta = 0$ (рассмотренный случай), то положения равновесия перемещаются при возрастании μ по дугам большого круга ($u = 0$ для $\mu < 1$ и $w = 0$ для $\mu > 1$). Значение $\mu = 1$ в резонансном случае является бифуркационным.

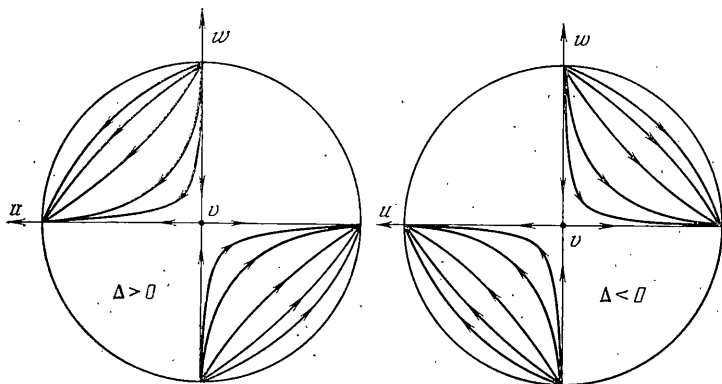
Для выяснения характера особых точек в общем случае ($\Delta \neq 0$) запишем уравнения в вариациях для системы (2.12): $u' = -w_0 u + \Delta v - u_0 w$, $v' = -\Delta u - w_0 v + (\mu - v_0)w$, $w' = 2u_0 u + (2v_0 - \mu)v$.

Здесь за вариациями переменных в окрестности (u_0, v_0, w_0) сохранены обозначения самих переменных.

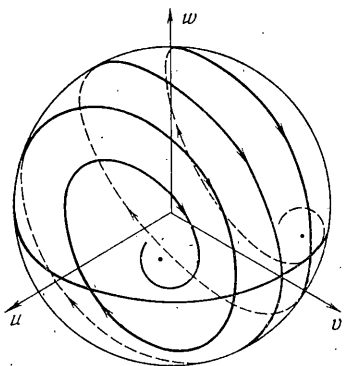
Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\lambda(\lambda^2 + 2w_0\lambda + \sqrt{(\Delta^2 + \mu^2 - 1)^2 + 4\Delta^2}) = 0$$

Один нулевой корень является следствием того, что уравнения (2.12) есть уравнения на сфере. Устойчивость определяется корнями стоящего в скобках квадратного трехчлена: если $w_0 > 0$ (стационарная точка в верхней полусфере), то режим устойчив, если $w_0 < 0$ (стационарная точка в



Фиг. 4



Фиг. 5

нижней полусфере), то режим неустойчив. Поскольку $w_0^2 < \sqrt{(\Delta^2 + \mu^2 - 1)^2 + 4\Delta^2}$, как это следует из (2.16), то эти особые точки являются фокусами и траектории на сфере имеют вид, изображенный на фиг. 5.

Дополнительного исследования требует только в случае резонанса $\Delta = 0$ подслучай $\mu > 1$, изображенный на фиг. 3, поскольку устойчивость особых точек оказалась здесь нейтральной. Дополнительное исследование проводится по уравнениям второго приближения (2.13), для которых уточняются условие резонанса $\Delta = \alpha/\mu - \gamma w_0 = 0$ и стационарные точки $u_0 = \pm \sqrt{1 - \mu^2} + O(\alpha, \beta)$, $v_0 = \mu^{-1} + O(\alpha, \beta)$, $w_0 = O(\alpha, \beta)$.

Составляются уравнения в вариациях около этих стационарных точек и проводится анализ характеристического уравнения. При этом оказывается, что изображенные на фиг. 3 центры на самом деле представляют собой фокусы и фазовый портрет этого случая эквивалентен изображенному на фиг. 5. Разница заключается лишь в том, что декремент затухания в случае резонанса определяется членами более высокого порядка малости, чем в нерезонансном случае.

Изученная механическая модель может иметь следующие приложения.

Гироскоп с неконтактным подвесом. В случаях, когда такой гироскоп выполнен по схеме, близкой к описанной выше (наличие динамической симметрии, смещение центра масс и большой кинетический момент), низкочастотные колебания основания с частотами порядка частоты прецессии могут вызвать очень большие эволюции прибора, вплоть до полного опрокидывания.

Гироскоп в кардановом подвесе со смещенным центром масс. Уравнения (2.12) не содержат момента инерции A , поэтому могут использоваться и для описания поведения гироскопа в кардановом подвесе для случаев, исключаящих складывание рамок.

Ядерный магнитный резонанс. Уравнения (2.6) и (2.7), или эквивалентные им (2.12) и (2.13), можно рассматривать как уточнение классических уравнений ядерного магнитного резонанса, известных как феноменологические уравнения Блоха [1].

Различия предложенных уравнений (2.6), (2.7) от известных состоят в следующем. В уравнениях Блоха диссипативные члены вводятся искусственно и пропорциональны компонентам вектора e , что нехарактерно для диссипативных сил. В уравнениях (2.6), (2.7) соответствующие члены получаются в результате преобразования сил вязкого трения, пропорциональных e . Уравнения Блоха линейны и имеют только одну особую точку. Уравнения (2.6), (2.7) нелинейны и особых точек две. Уравнения Блоха не сохраняют нормы вектора e , что определяет их внутреннюю противоречивость. Уравнения (2.6), (2.7), а также и уравнения любого приближения, полученные на основе рекуррентной процедуры (2.5), являются уравнениями на сфере, т.е. норма сохраняется автоматически. Именно из условия сохранения этой нормы и вытекает, что уравнения ядерного магнитного резонанса в принципе не могут быть линейными (уравнения Блоха несостоятельны), если только эти уравнения претендуют на глобальное описание явления, а не на изучение окрестности особой точки.

Таким образом, если описание ядерного магнитного резонанса классическими уравнениями возможно, то из них вытекает следующее.

При облучении переменным поперечным полем вектор намагниченности (в нашем случае e) начинает из вертикального положения равновесия прецессировать вокруг вертикальной оси по раскручивающейся спирали к предельному углу прецессии (если $\mu < 1$), определяемому во вращающейся системе координат точкой $u_0 = 0$, $v_0 = \mu$, $w_0 = \sqrt{1 - \mu^2}$. После снятия поперечного поля вектор намагниченности по спирали возвращается в исходное положение равновесия; частота прецессии при этом есть P/H .

Если $\mu > 1$ (большая интенсивность поперечного поля или меньшая диссипация), то, прецессируя по раскручивающейся спирали, вектор e доходит практически до состояния полного перемagnetничивания ($e \cdot e_0 \approx -1$), после чего по спирали возвращается почти в исходное состояние, и процесс вновь повторяется с периодом близким к (2.15), при этом последовательные размахи указанного движения медленно уменьшаются и предельное движение есть прецессия вокруг вертикали в почти горизонтальной плоскости ($z = 0$). Точка $\mu = 1$ является бифуркационной, при этом вектор e по спирали приходит к состоянию предельной прецессии в горизонтальной плоскости ($z = 0$) сразу, не совершая колебаний относительно этой плоскости.

В заключение дадим связь используемых в статье параметров с принятыми в теории ядерного магнитного резонанса [1]:

$$H = 1/\gamma, \quad P = H_z, \quad a = H_x, \quad \xi = 1/(T_2 \gamma^2 H_z)$$

где γ — константа, связывающая магнитный момент с моментом количества движения, H_z — статическое магнитное поле, H_x — амплитуда переменного поля, T_2 — время релаксации поперечных компонент. В этих параметрах характеристическая константа μ , определяемая формулой (2.11), имеет вид $\mu = H_x T_2 \gamma$, и если $\mu > 1$, то период (2.15) есть

$$T = 2\pi \gamma T_2 (H_x^2 T_2^2 \gamma^2 - 1)^{-1/2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И. В. Теория ядерного магнитного резонанса. М.: Наука, 1964. 208 с.
2. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
3. Жбанов Ю. К., Журавлев В. Ф. О некоторых свойствах конечных поворотов твердого тела при наличии неголономной связи. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4, с. 9–14.
4. Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1974. 635 с.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1985