МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1986

УДК 531.381

О ПОГРЕШНОСТЯХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА — ГАМИЛЬТОНА

АВРАМЕНКО Л. Г., ЛАРИН В. Б.

В случае конического движения твердого тела приводятся выражения для погрешностей интегрирования кинематических уравнений (средней скорости дрейфа) для различных алгоритмов. Аналогичные формулы получены, когда для повышения точности определения ориентации процесс интегрирования сопровождается коррекцией результатов интегрирования данными о проекциях на связанные с телом оси вектора, положение которого фиксировано в неподвижной системе координат. Показано, что, используя алгоритмы, аналогичные по структуре модифицированному методу Эйлера, можно получить точность интегрирования, соответствующую алгоритмам, учитывающим некоммутативность поворотов. Приводятся результаты численных экспериментов.

1. В [1] рассматривалась задача интегрирования кинематических уравнений движения твердого тела в параметрах Родрига — Гамильтона [2]:

$$d/dt\lambda={}^1/_2\Omega\lambda \tag{1.1}$$

$$\lambda=\|\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\|',\quad \lambda'\lambda=\|\lambda\|^2=1,\quad \omega=\|\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\|'$$

$$\Omega=\begin{Vmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Здесь λ — вектор (кватернион) параметров Родрига — Гамильтона, ω_1, ω_2, ω_3 — проекции вектора угловой скорости твердого тела на оси, связанные с телом (штрих означает операцию транспонирования). Процедура численного интегрирования уравнения (1.1) состоит в следующем. Полагая известными на малом промежутке времени δt квазикоординаты (компоненты вектора $\nabla\theta_i{}^*=\int\limits_{t_i}^{t_i+\delta t}\omega\,dt$) и выразив через эти квазикоординаты $\delta\lambda(t_i)$-решение уравнения (1.1) на промежутке времени δt при начальном условии $\|1,\ 0,\ 0,\ 0\|'$ (т. е. вычислив кватернион, соответствующий малому повороту твердого тела за время δt), ориентацию тела определяют последовательным перемножением $\delta\lambda(t_i)$-«элементарных» кватернионов

$$\lambda(t_i)=\lambda(t_{i-1})\circ\delta\lambda(t_i) \tag{1.2}$$

В матричном виде эта процедура выглядит так:

$$\lambda(t_i)=\begin{Vmatrix} \delta\lambda_0(t_i) & -\delta\lambda_1(t_i) & -\delta\lambda_2(t_i) & -\delta\lambda_3(t_i) \\ \delta\lambda_1(t_i) & \delta\lambda_0(t_i) & \delta\lambda_3(t_i) & -\delta\lambda_2(t_i) \\ \delta\lambda_2(t_i) & -\delta\lambda_3(t_i) & \delta\lambda_0(t_i) & \delta\lambda_1(t_i) \\ \delta\lambda_3(t_i) & \delta\lambda_2(t_i) & -\delta\lambda_1(t_i) & \delta\lambda_0(t_i) \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \lambda_0(t_{i-1}) \\ \lambda_1(t_{i-1}) \\ \lambda_2(t_{i-1}) \\ \lambda_3(t_{i-1}) \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

$$\delta\lambda(t_i)=\|\delta\lambda_0(t_i),\ \delta\lambda_1(t_i),\ \delta\lambda_2(t_i),\ \delta\lambda_3(t_i)\|'$$

В [1] приводятся выражения кватернионов $\delta\lambda(t_i)$ через вектор квазикоординат $\nabla\theta_i^*$, которые в зависимости от сложности обеспечивают то или иное качество аппроксимации

$$\delta\lambda^1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ {}^1/_2\nabla\theta_i^* \end{matrix} \right\|, \qquad \delta\lambda^2 = \left\| \begin{matrix} 1-{}^1/_8\|\nabla\theta_i^*\|^2 \\ {}^1/_2\nabla\theta_i^* \end{matrix} \right\|$$

$$\delta\lambda^3 = \left\| \begin{matrix} 1-{}^1/_8\|\nabla\theta_i^*\|^2 \\ {}^1/_2(1-{}^1/_{24}\|\nabla\theta_i^*\|^2)\nabla\theta_i^* - {}^1/_{24}(\nabla\theta_i^*\times\nabla\theta_{i-1}^*) \end{matrix} \right\|$$

Первые два кватерниона $\delta\lambda^1$ и $\delta\lambda^2$ (соответствующие методу Эйлера и модифицированному методу Эйлера) аппроксимируют перемещение твердого тела на интервале времени δt как поворот относительно оси, коллинеарной вектору $\nabla\theta_i^*$. В приближении третьего порядка ($\delta\lambda^3$) учитывается некоммутативность поворотов.

Несмотря на то что существуют общие соотношения, позволяющие оценить точность интегрирования [3], целесообразно, сузив класс движений, получить простые формулы для оценки средней скорости дрейфа при использовании того или иного алгоритма. Так как коническое движение обычно используется при апробации алгоритмов численного интегрирования [4], то далее будет подробно исследован этот случай движения твердого тела.

Если отказаться от требования постоянства $\|\lambda(t_i)\|$ на каждом шаге интегрирования (например, производить нормировку только в конце процесса интегрирования), то можно повысить точность аппроксимации или упростить выражение $\delta\lambda$. В этой связи в [5] была предложена модификация кватерниона $\delta\lambda^2$:

$$\delta\lambda_m^2 = \left\| \begin{matrix} 1-{}^1/_{12}\|\nabla\theta_i^*\|^2 \\ {}^1/_2\nabla\theta_i^* \end{matrix} \right\|$$

а в [6] — $\delta\lambda^3$:

$$\delta\lambda_m^3 = \left\| \begin{matrix} 1-{}^1/_{12}\|\nabla\theta_i^*\|^2 \\ {}^1/_2\nabla\theta_i^* - {}^1/_{24}(\nabla\theta_i^*\times\nabla\theta_{i-1}^*) \end{matrix} \right\|$$

Некоторое представление о точности интегрирования уравнения (1.1) по схеме (1.2) при использовании рассмотренных алгоритмов построения $\delta\lambda$ дает следующий пример [6]. Тело совершает прецессионное движение с параметрами $\varphi=\pi/2-1{,}25t$, $\psi=3{,}75t$, $\operatorname{tg}\theta={}^4/_3$,[1] т. е. $\omega=\|3\cos 1{,}25t;\ 3\sin 1{,}25t;\ 1\|'$. Время интегрирования $T=1{,}6\pi$, т. е. $\lambda(T)=\lambda(0)$.

В качестве системы координат, которую следует поворачивать в соответствии с кватернионом $\lambda(t)$, выберем систему, совпадающую с подвижной системой в начальный момент времени, т. е. $\lambda(0)=\|1,\ 0,\ 0,\ 0\|'$.

Результаты интегрирования (нормированное значение кватерниона $\lambda(T)$) при использовании элементарных кватернионов $\delta\lambda^1$, $\delta\lambda^2$, $\delta\lambda_m^2$ и $\delta\lambda^3$ ($\delta t=T/50$) приведены в табл. 1 [6].

Из табл. 1 видно, что векторы погрешностей определения ориентации (в качестве координат этих векторов в подвижной системе координат[2] можно принять $2\lambda_1(T)$, $2\lambda_2(T)$, $2\lambda_3(T)$) практически коллинеарны оси Z неподвижной системы координат XYZ и, кроме того, направлены в разные стороны. Таким образом, если рассматривать процедуру интегрирования уравнения (1.1) с «элементарным» кватернионом

$$\delta\lambda_q^2 = \left\| \begin{matrix} 1-q\|\nabla\theta_i^*\|^2 \\ {}^1/_2\nabla\theta_i^* \end{matrix} \right\| \tag{1.4}$$

который при $q=1/8$ совпадает с $\delta\lambda^2$, а при $q=1/12$ — с $\delta\lambda_m^2$, то можно

---

[1] Обозначения углов Эйлера соответствуют [2].

[2] Поворот в момент $t=T$ этой системы координат определяется углами Эйлера $\varphi={}^\pi/_2$, $\psi=0$, $\operatorname{tg}\theta={}^4/_3$.

$\lambda(T)$	$\delta\lambda^1$	$\delta\lambda^2$	$\delta\lambda_m^2$	$\delta\lambda^3$
$\lambda_0(T)$	0,997	1,00	1,00	1,00
$\lambda_1(T)$	$-5{,}64\cdot10^{-2}$	$1{,}89\cdot10^{-2}$	$-6{,}47\cdot10^{-3}$	$2{,}87\cdot10^{-4}$
$\lambda_2(T)$	$1{,}93\cdot10^{-6}$	$3{,}43\cdot10^{-6}$	$2{,}79\cdot10^{-6}$	$8{,}08\cdot10^{-5}$
$\lambda_3(T)$	$-4{,}22\cdot10^{-2}$	$1{,}41\cdot10^{-2}$	$-4{,}84\cdot10^{-3}$	$-3{,}59\cdot10^{-4}$

ожидать, что при соответствующем значении параметра q, лежащем между 1/8 и 1/12, произойдет существенное уменьшение ошибки интегрирования. Процедура численной оптимизации ($\min(\lambda_1^2(T)+\lambda_2^2(T)+\lambda_3^2(T))$) дает оптимальное значение $q=0{,}0939$ и, соответственно, $\lambda(T)=\|1;$ $-6{,}2\cdot10^{-5};\ 9\cdot10^{-13};\ -4{,}6\cdot10^{-5}\|'$. Сравнивая этот результат с последним столбцом табл. 1, приходим к выводу, что при таком значении q погрешности рассматриваемого алгоритма соизмеримы при $t=T$ с погрешностями алгоритма, учитывающего некоммутативность поворотов ($\delta\lambda^3$). Посмотрим, чем объясняется этот эффект. Разница перемещений твердого тела за время δt, определяемых кватернионами $\delta\lambda_m^2$ и $\delta\lambda_m^3$ (погрешность аппроксимации), характеризуется вектором малого поворота $\varepsilon_i=$ $=-{}^1/_{12}(\nabla\theta_i^*\times\nabla\overset{*}{\theta}_{i-1})$, так как

$$\delta\lambda_m^3\circ(\delta\lambda_m^2)'=\left\|\begin{matrix}1\\ -{}^1/_{24}(\nabla\theta_i^*\times\nabla\theta_{i-1}^*)\end{matrix}\right\|^3$$

Задача заключается в анализе процесса суммирования этих векторов. Для этой цели можно принять следующую аппроксимацию $\nabla\theta_i^*=\omega(t_i)dt$. Следовательно, вектор ε_i (как и вектор $\omega(t_i)$) при изменении индекса i будет вращаться относительно оси Z неподвижной системы координат с угловой скоростью, равной $\dot\psi$ (термин «вращаться» имеет тот смысл, что при увеличении индекса i на единицу вектор ε_i поворачивается вокруг оси Z на угол $\dot\psi\delta t$). Таким образом, процесс суммирования векторов ε_i (процесс накопления погрешностей интегрирования) удобно исследовать разложив вектор ε_i на две ортогональные компоненты, одна из которых лежит в плоскости XY неподвижной системы координат, а вторая направлена вдоль оси Z. Суммы по i каждой из отмеченных компонент ведут себя различно. Так, модуль векторной суммы составляющих погрешностей ε_i, лежащих в плоскости XY, будет периодической функцией i, среднее значение которой за период будет равно нулю. Проекции вектора ε_i на ось Z будут суммироваться, т. е. являться основной причиной систематического ухода [4]. В этой связи продемонстрированная выше возможность «настройки» параметра q в кватернионе $\delta\lambda_q^2$ может быть объяснена эффектом компенсации проекции погрешности (вектора малого поворота) на ось Z. Действительно, с точностью до малых третьего порядка

$$\delta\lambda_q^2=\left(1-\frac{\mu}{12}\|\nabla\theta_i^*\|^2\right)\left\|\begin{matrix}1-\frac{1}{12}\|\nabla\theta_i^*\|^2\\ \frac{1}{2}\nabla\theta_i^*\left(1+\frac{\mu}{12}\|\nabla\theta_i^*\|^2\right)\end{matrix}\right\|,\quad \mu=12q-1 \tag{1.5}$$

Сравнивая это выражение $\delta\lambda_q^2$ с $\delta\lambda_m^3$ (множитель $(1-\mu\|\nabla\theta_i^*\|^2/12)$ в последнем выражении для $\delta\lambda_q^2$ можно не принимать во внимание, его эффект ликвидируется последующей нормировкой [6]), приходим к выводу, что при использовании кватерниона $\delta\lambda_q^2$ можно получить средний уход, соответствующий процедуре интегрирования с кватернионом $\delta\lambda^3$ [5], если соответствующим выбором коэффициента μ обеспечить равенство

[3] В данном произведении кватернионов штрих обозначает изменение знака у векторной части кватерниона (транспонирование матрицы в (1.3)).

[4] Этот вывод хорошо согласуется с замечанием, сделанным при анализе результатов примера численного интегрирования о том, что векторы погрешности при использовании кватернионов $\delta\lambda^2$ и $\delta\lambda_m^2$ направлены вдоль оси Z.

[5] Как показано в [6] кватернионы $\delta\lambda_m^3$ и $\delta\lambda^3$ обеспечивают одинаковую точность интегрирования.

Таблица 2

Вид движения	$\delta\lambda^1$	$\delta\lambda^2$	$\delta\lambda_m^2$
I	5329 5130	2665 2626	 26
II	5863 5797	1954 1938	651 660

Таблица 3

γ, град	$\delta\lambda^1$	$\delta\lambda^2$	$\delta\lambda_m^2$
0	5863 5766	1954 1927	651 660
30	5077 4998	1692 1673	564 573
45	4145 4084	1381 1368	460 468
60	2931 2890	979 970	326 331
90	0 10	0 2	0 0,8

последних компонент этих кватернионов. Аналогичное соотношение для определения коэффициентов μ или q можно получить из условия, что последняя компонента кватерниона $\delta\lambda_m^3\circ(\delta\lambda_q^2)'$ (проекция погрешности на ось Z) равна нулю. Это условие после преобразований имеет вид

$$\mu\|\omega\|^2\omega_z=(\|\omega\|^2-\omega_z^2)\dot\psi$$

или

$$\mu(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi)(\dot\varphi^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta)=\dot\psi\dot\varphi^2\sin^2\theta \tag{1.6}$$

где $\omega_z=\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta$ — проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на ось Z.

Если заданы не углы Эйлера, а проекции вектора угловой скорости на оси подвижной системы координат (например, $\omega_1=a\cos ct$, $\omega_2=a\sin ct$, $\omega_3=b$), то, приняв во внимание, что и в этом случае $\dot\varphi=-c$, $b=\dot\psi\cos\theta-c$, $\dot\psi^2=a^2+(b+c)^2$, $\dot\psi=a/\sin\theta$, соотношение (1.6) можно переписать так: $a^2c^2=\mu(a^2+b^2)(a^2+b^2+bc)$, т. е. оптимальное значение q следующим образом выражается через параметры движения:

$$q_*=\frac{1}{12}\left[1+\frac{\dot\psi\dot\varphi^2\sin^2\theta}{(\dot\varphi\cos\theta+\dot\varphi)(\dot\varphi^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta}\right]$$

$$q_*=\frac{1}{12}\left[1+\frac{a^2c^2}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+bc)}\right] \tag{1.7}$$

При исходных данных рассмотренного числового примера ($a=3$, $b=1$, $c=1{,}25$) значение q_*, вычисленное по формуле (1.7), оказывается равным $9{,}375\cdot10^{-2}$, что хорошо совпадает с приведенным выше значением q, полученным при помощи численной оптимизации.

Аналогичные соображения позволяют получить приближенную формулу скорости дрейфа (скорости накопления погрешности интегрирования) при использовании элементарного кватерниона $\delta\lambda_q^2$ для значений q, достаточно отличных от q_* (формула (1.7)). Так как при $q=q_*$ алгоритм (1.4) обеспечивает существенно более высокую точность, чем при других значениях q, то при выводе приближенного соотношения будем считать погрешность при $q=q_*$ равной нулю. Кроме того, как и ранее, предполагаем, что средняя величина дрейфа определяется проекцией на ось Z малого поворота, который характеризует погрешность интегрирования. Последняя, в соответствии с (1.5), определяется проекцией на эту же ось вектора малого поворота

$$\nabla\theta_i^* \left(1 + \frac{12q-1}{12} \|\nabla\theta_i^*\|^2\right) - \nabla\theta_i^* \left(1 + \frac{12q_*-1}{12} \|\nabla\theta_i^*\|^2\right)$$

Таким образом, в первом приближении относительную погрешность интегрирования можно принять равной $(q-q_*)\|\nabla\theta_i^*\|^2$. Окончательно, с учетом сделанных предположений, среднюю скорость дрейфа U для алгоритма (1.4) можно определить так:

$$U = |(q-q_*)\,\omega_z| \frac{\|\omega\|^2}{f^2} \tag{1.8}$$

где f — частота дискретизации ($\delta t = 1/f$).

Некоторое представление о точности этой формулы дает табл. 2, в которой приведены величины скорости дрейфа (размерность здесь и в табл. 3 — угловая секунда за секунду) двух видов движения: верхнее число вычислено по формуле (1.8), нижнее — в результате моделирования процесса интегрирования на ЭВМ [5, 6]. Результаты получены для двух видов движения. В первом случае (I): $\omega' = \|\pi,\ 0,\ 0\|$, $f = 10$ Hz, т. е. $\delta t = 0{,}1$ с. Во втором случае (II) параметры движения были такими же, как и в рассмотренном выше примере, т. е. $\omega' = \|3\cos 1{,}25t;\ 3\sin 1{,}25t;\ 1\|$, $f = 50/1{,}6\pi$ Hz.

2. Отметим, что предположения, сделанные при выводе формулы (1.8), делают возможным получение аналогичной оценки средней скорости дрейфа в случае, когда процесс интегрирования кинематических уравнений сопровождается на каждом шаге коррекцией результатов интегрирования данными измерений проекций на оси, связанные с телом какого-либо вектора m, положение которого известно в неподвижной системе координат [5]. Считая точными результаты измерений проекций этого вектора, можно положить в функционале (3.3) из [5] $\alpha = 0$, $\beta_2 = 1$. В этом случае эффект коррекции погрешности результатов интегрирования (вектора малого поворота $\varepsilon_i = -\frac{1}{12}(\nabla\theta_i^* \times \nabla\theta_{i-1}^*)$) будет состоять в ликвидации компоненты вектора ε_i, ортогональной вектору m (согласно (3.13) из работы [5] при $\alpha = 0$, $I_k = 0$), т. е. проектировании вектора ε_i на направление вектора m. Таким образом, результирующая средняя скорость дрейфа будет определяться суммой проекций вектора ε_i на направление вектора m. Разложим вектор ε_i на две компоненты: одна направлена вдоль оси Z, вторая — ортогональна этой оси. Так как вторая компонента равномерно вращается в плоскости XY с угловой скоростью $\dot\psi$, то в случае, когда вектор фиксирован в неподвижной системе координат, сумма ее проекций на направление вектора m будет периодической функцией времени и ее вклад в среднюю скорость дрейфа будет равен нулю. Что же касается первой компоненты, то, как уже отмечалось при выводе формулы (1.8), сумма проекций вектора ε_i на ось Z будет возрастающей функцией времени и определять среднюю скорость дрейфа. Следовательно, если положение вектора m фиксировано в неподвижной системе координат и γ — угол между осью Z и вектором m, то средняя скорость дрейфа при интегрировании кинематических уравнений в соответствии с алгоритмом (1.4) и коррекцией результатов интегрирования в соответствии с [5] равна

$$U_m = U \cos\gamma \tag{2.1}$$

Входящая в (2.1), величина U определяется формулой (1.8). Отметим, что такую же среднюю скорость дрейфа можно обеспечить производя коррекцию не на каждом шаге интегрирования, а один раз за время изменения угла ψ на 2π.

Эффективность формулы (2.1) характеризуют данные, приведенные в табл. 3, для движения твердого тела с параметрами $\varphi = \pi/2 - 1{,}25t$, $\psi = 3{,}75t$, $\operatorname{tg}\theta = 4/3$ т. е. $\omega' = \|3\cos 1{,}25t,\ 3\sin 1{,}25t;\ 1\|$. При каждом значении γ верхнее число рассчитано по формуле (2.1), нижнее — получено моделированием процесса интегрирования. Время интегрирования $T=1{,}6\pi$, частота дискретизации $f=50/1{,}6\pi$ Hz. Коррекция проводилась в конце интервала интегрирования. Величина средней скорости дрейфа для интегрирования без коррекции дана в табл. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. *Боданский Е. Д., Фурман В. Д.* О погрешностях численного интегрирования кинематических уравнений Пуассона.— Космич. исследования. 1970, т. 8, вып. 6, с. 944–948.
4. *Челноков Ю. Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига — Гамильтона по его угловой скорости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3, с. 11–20.
5. *Ларин В. Б., Науменко К. И.* Об определении ориентации твердого тела.— Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 3, с. 24–32.
6. *Ларин В. Б., Науменко К. И.* Об интегрировании кинематических уравнений в параметрах Родрига — Гамильтона.— В кн.: Навигация и управление. Киев: Изд-е Ин-та математики АН УССР, 1982, с. 62–71.

Киев

Поступила в редакцию
23.VI.1983