МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1986

УДК 531.8

К ДИНАМИКЕ ВИБРОХОДА

НАГАЕВ Р. Ф., ТАММ Е. А.

Под виброходом [1] понимается самоходный колесный аппарат, привод которого расположен целиком внутри герметичного корпуса и возбуждает асимметричную вибрационную силу. Равномерное в среднем перемещение виброхода обусловлено существенной нелинейностью сил типа сухого трения в осях колесных пар [2].

В публикуемой работе составлены общие уравнения прямолинейного движения виброхода, получены формулы для определения пути и времени свободного торможения по горизонтальной плоскости, доказано существование двух пороговых значений радиуса трения в осях колес. Одно из этих значений характеризует заклинивание, а другое – перераспределение давлений на переднее и заднее колеса.

1. Рассмотрим задачу о прямолинейном движении виброхода. Предположим, что геометрические размеры колес (или пар колес, установленных жестко на общих осях) одинаковы, а центр масс C корпуса вместе с заторможенным приводом в общем случае смещен относительно точки O, делящей расстояние l между центрами вращения колес пополам. Оси колес и прилегающие поверхности корпуса образуют пары сухого трения (фиг. 1). Трением качения колес о поверхность пренебрегаем.

На корпус массы M аппарата действует плоская система активных сил, в число которых входит вес корпуса Mg, направленный вертикально вниз, а также может быть включено вибрационное воздействие от привода. Это оказывается возможным, если мощность привода не ограничена, а масса корпуса значительно превосходит общую массу движущихся элементов привода. Тогда приближенно можно считать, что вибрационная сила изменяется по известному периодическому закону с нулевым средним значением.

Приводя эту систему активных сил методами геометрической статики к центру O, получим, что к точке O будут приложены следующие известные периодические усилия: X и Y — проекции главного вектора активных сил на продольное x и поперечное y направления, L — главный момент активных сил, тогда силовые (в проекциях на направлениях x и y) и моментное уравнения кинетостатики корпуса имеют вид:

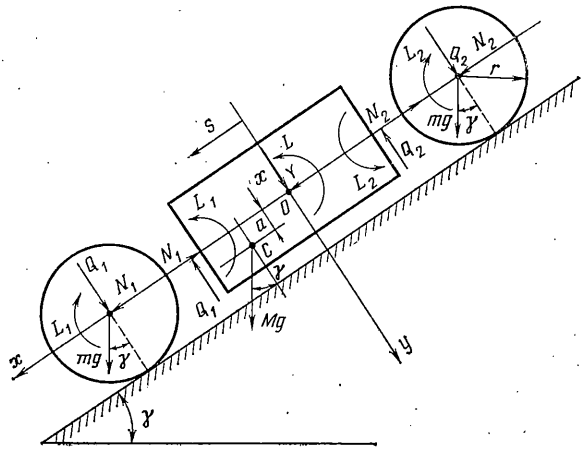
$$Ms^{\cdot\cdot}=X-N_1-N_2, \quad Y=Q_1+Q_2 \tag{1.1}$$

$$L+L_1+L_2-{}^1/_2 l(Q_1-Q_2)+aMs^{\cdot\cdot}=0$$

Здесь s — продольная координата корпуса, a — отклонение центра масс корпуса от продольной оси Ox; N_1, Q_1, N_2, Q_2 компоненты реакций на корпус со стороны осей переднего и заднего колес соответственно (фиг. 1). Моменты сухого трения на осях колесных пар при $s^{\cdot}\neq 0$ представляются в виде линейных функций суммарных реактивных усилий в осях колесных пар

$$L_i=(L_{i0}+f_i r\sqrt{Q_i^2+N_i^2})\ \mathrm{sign}\ s^{\cdot} \quad (i=1,\ 2) \tag{1.2}$$

Здесь L_{10} и L_{20} — постоянный «статический» тормозной момент, а f_1 и f_2 — эффективные коэффициенты «динамического» трения, приведенные к радиусу колес r. В задачах о торможении автомобиля уровень ускорений относительно невелик, поэтому основную роль играет статическая составляющая момента трения, обусловленная действием тормозных ко-



Фиг. 1

лодок $L_i=L_{i0}\operatorname{sign} s^{\cdot}$ [3]. Для виброхода коэффициенты f_1 и f_2 зачастую невелики, однако уровень ускорений весьма значителен, поэтому здесь, наоборот, статической составляющей можно пренебречь

$$L_i^2=f_i^2r^2(Q_i^2+N_i^2) \qquad (i=1,\ 2) \tag{1.3}$$

Соотношения (1.1) и (1.3) следует дополнить уравнениями качения колесных пар без проскальзывания

$$(m+I/r^2)s^{\cdot\cdot}=N_i-L_ir^{-1}+mg\sin\gamma \qquad (i=1,\ 2) \tag{1.4}$$

здесь m и I — масса и центральный момент инерции колесных пар, а γ — угол наклона продольной оси аппарата к горизонту.

Итак, имеется система семи уравнений (1.1), (1.3) и (1.4) с семью неизвестными s, N_1, N_2, Q_1, Q_2, L_1, L_2. После исключения неизвестных реактивных усилий задача сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения второго порядка относительно s. Однако в силу нелинейности соотношений (1.3) такое исключение в замкнутом виде невозможно.

Отметим, что при построении закона движения виброхода следует учитывать необходимость выполнения неравенств, обеспечивающих тормозящий характер моментов трения, отсутствие подбрасывания колес, отсутствие проскальзывания колес относительно поверхности (буксование) соответственно:

$$L_is^{\cdot}>0, \qquad Q_i+mg\cos\gamma>0 \tag{1.5}$$

$$N_i-ms^{\cdot\cdot}+mg\sin\gamma<f_i'(Q_i+mg\cos\gamma)$$

Здесь f_1' и f_2' — коэффициенты трения скольжения колес о поверхность.

Для дальнейшего удобнее исключить неизвестные реактивные силы N_1, N_2, Q_1, Q_2. С этой целью, прежде всего, сложим первое уравнение (1.1) с уравнениями (1.4):

$$(M+2m+2I/r^2)s^{\cdot\cdot}=X+2mg\sin\gamma-(L_1+L_2)/r \tag{1.6}$$

Далее из (1.4) с учетом (1.6) получим

$$N_1=\rho(X-L_2/r)+(1-\rho)L_1/r-(1-2\rho)mg\sin\gamma \tag{1.7}$$

$$N_2=\rho(X-L_1/r)+(1-\rho)L_2/r-(1-2\rho)mg\sin\gamma$$

$$\rho=\frac{I+mr^2}{2I+(M+2m)r^2} \qquad (0<\rho<{}^1/_2)$$

Выражения для поперечных реактивных сил Q_1 и Q_2 получаются аналогично из второго и третьего уравнения (1.1) с учетом (1.6) и имеют вид

$$Q_{1,2}={}^1/_2Y\pm{}^1/_2[\alpha(L_1+L_2)/r+2L/l+(\beta-\alpha)(X+2mg\sin\gamma)]$$

$$\alpha=\frac{2r}{l}\left[1-\frac{Mar}{2I+(M+2m)r^2}\right]\qquad \beta=\frac{2r}{l} \tag{1.8}$$

Введем безразмерные переменные

$$x=(X+2mg\sin\gamma)/F,\quad y=Y/F,\quad \tau=t/T$$

$$n_{1,2}=N_{1,2}/F,\quad q_{1,2}=Q_{1,2}/F,\quad \mu_{1,2}=L_{1,2}/(rF) \tag{1.9}$$

$$\xi=(M+2m+2I/r^2)s/(FT^2),\quad \mu=2L/lF$$

в которых масштабные значения силы F и времени T будут выбраны в дальнейшем.

Выражения для безразмерных продольных и поперечных реактивных усилий согласно (1.7) и (1.8) будут

$$n_i=\rho(x-w)+\mu_i-\varkappa\sin\gamma\qquad (i=1,\ 2) \tag{1.10}$$

$$q_{1,2}={}^1/_2y\pm{}^1/_2[\alpha w+\mu+(\beta-\alpha)x]$$

$$w=\mu_1+\mu_2,\qquad \varkappa=mg/F$$

Безразмерный аналог дифференциального уравнения (1.6) запишется в виде (штрих означает дифференцирование по безразмерному времени τ):

$$\xi''=x-w \tag{1.11}$$

Уравнения для определения μ_1 и μ_2 согласно (1.3), (1.9) и (1.10) принимают форму

$$\begin{aligned}\mu_1^2/f_1^2&=[\rho(x-w)+\mu_1-\varkappa\sin\gamma]^2+{}^1/_4\{y+[\alpha w+\mu+(\beta-\alpha)x]\}^2\\ \mu_2^2/f_2^2&=[\rho(x-w)+\mu_2-\varkappa\sin\gamma]^2+{}^1/_4\{y-[\alpha w+\mu+(\beta-\alpha)x]\}^2\end{aligned} \tag{1.12}$$

Неравенства (1.5) в безразмерной форме можно записать так

$$\mu_i\xi'>0,\qquad y\pm[\alpha w+\mu+(\beta-\alpha)x]+2\varkappa\cos\gamma>0 \tag{1.13}$$

$$2\rho(x-w)+2\mu_i<f_i'\{y-(-1)^i[\alpha w+\mu+(\beta-\alpha)x]+2\varkappa\cos\gamma\}$$

2. Уравнения (1.12) могут быть решены в замкнутом виде в задаче о свободном торможении на горизонтальной поверхности ($\gamma=0$) аппарата, если центр масс корпуса C лежит на оси Oy, а коэффициенты трения в осях переднего и заднего колес одинаковы ($f_1=f_2=f$). В этом случае, очевидно

$$x=\mu=0,\qquad y=Mg/F \tag{2.1}$$

и уравнения (1.12) принимают вид

$$\mu_1^2/f^2=(\rho w-\mu_1)^2+{}^1/_4[y+\alpha w]^2,\qquad \mu_2^2/f^2=(\rho w-\mu_2)^2+{}^1/_4[y-\alpha w]^2 \tag{2.2}$$

Вычтем из первого уравнения (2.2) второе. Полученное соотношение после сокращения на $w=\mu_1+\mu_2$ можно разрешить относительно разности $\varepsilon=\mu_1-\mu_2$ моментов трения

$$\varepsilon=\frac{f_*^2f^2}{f_*^2-f^2}\alpha y,\qquad f_*=\frac{1}{\sqrt{1-2\rho}}=\sqrt{1+2\frac{I+mr^2}{Mr^2}}>1 \tag{2.3}$$

Если теперь сложить уравнения (2.2), то результат при учете (2.3) легко разрешить относительно w^2:

$$w^2=\frac{(f^{-2}-f_*^{-2})+(1-f^{-2})(f^{*-2}-f_*^{-2})}{(f^{-2}-f_*^{-2})^2(f^{-2}-f^{*-2})}y^2$$

$$f^*=1/\sqrt{(1-2\rho)^2+\alpha^2}=f_*^2/\sqrt{1+\alpha^2 f_*^4} \tag{2.4}$$

Предположим, что торможение началось в момент $t=0$, когда $s=0$, с положительной начальной скоростью $\dot{s}=v$. Выберем масштабное значение силы F, чтобы безразмерные начальные условия были

$$\xi=0, \quad \xi'=1 \text{ при } \tau=0 \tag{2.5}$$

Из (2.5) в силу (1.9) следует

$$F=(M+2m+2I/r^2)\,v/T \tag{2.6}$$

Непосредственно интегрируя дифференциальное уравнение торможения $\xi''=-w$ (см. (1.11)), с учетом (2.5) получим

$$\xi'=1-w\tau, \quad \xi=\tau-{}^1/_2 w\tau^2 \tag{2.7}$$

Масштабное значение времени T здесь удобно отождествлять с продолжительностью торможения. Следовательно

$$\xi'|_{\tau=1}=0 \tag{2.8}$$

и согласно первому уравнению (2.7) $w=1$. Подставляя это значение в (2.4), получим

$$y=|f^{-2}-f_*^{-2}|\sqrt{\frac{f^{-2}-f^{*-2}}{(f^{-2}-f_*^{-2})^2+(1-f^{-2})(f^{*-2}-f_*^{-4})}} \tag{2.9}$$

3. Разрешим (2.6) относительно T. Так как согласно (2.1), $F=Mg/y$ в результате получим

$$T=(M+2m+2I/r^2)\,vy/Mg \tag{3.1}$$

С другой стороны, общий путь торможения равен

$$S={}^1/_2 vT=(M+2m+2I/r^2)\,{}^1/_2 v^2 y/Mg \tag{3.2}$$

Таким образом, определяемая по формуле (2.9) безразмерная величина y пропорциональна как времени, так и пути торможения аппарата в его равномерно замедленном движении.

Существенно, что $y\to 0$ при $f\to f^*$, а при $f>f^*$ формула (2.9) теряет физический смысл. Это означает, что при $f\geqslant f^*$ первоначальный толчок приводит к мгновенному заклиниванию аппарата. Поэтому величину f^* естественно назвать порогом заклинивания. С другой стороны, если $\alpha>0$, то при $f<f_*$ ($f>f_*$) в силу (2.3) $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<0$) и, следовательно, $\mu_1>\mu_2$ ($\mu_1<\mu_2$). Моменты сил трения μ_1 и μ_2 как уже говорилось, пропорциональны динамическому давлению на оси переднего (первого) и заднего (второго) колес. Поэтому при $0<f<f_*$ более нагруженной является передняя колесная пара, а при $f>f_*$ задняя. Если $\alpha<0$, то картина меняется на противоположную. При $\alpha=0$ всегда $\varepsilon=0$ и обе колесные пары нагружены одинаково ($\mu_1=\mu_2$). Поэтому величину f_* будем называть порогом перераспределения давлений на колеса аппарата.

Следует различать два качественно различных случая. В первом $f_*>f^*$ и, следовательно

$$|\alpha|>\alpha_*, \quad \alpha_*=\sqrt{f_*^2-1}/f_*^2=\sqrt{2\rho(1-2\rho)} \tag{3.3}$$

При этом в соответствии с (2.9) увеличение коэффициента трения от 0 до f^* вызывает монотонное убывание пути и времени торможения от ∞ до нуля.

Наоборот, если $|\alpha|<\alpha_*$ и поэтому $f_*<f^*$, то в диапазоне $0<f<f_*$ величина y монотонно убывает до нуля. Далее в диапазоне $f_*<f<f^*$ путь (и время) торможения сначала увеличивается от нуля, а затем, достигнув максимального значения, начинает убывать обращаясь при $f=f^*$ в нуль. Отсюда следует, на первый взгляд, парадоксальное утверждение: увеличение коэффициента трения в осях колесных пар непосредственно за порогом перераспределения давлений на них влечет за собой увеличение

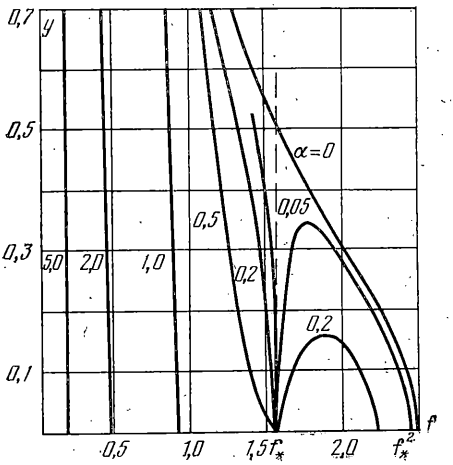
общего пути (и времени) торможения. Это связано с тем, что изменение f в данном диапазоне вызывает чрезвычайно резкое увеличение давления на ось заднего колеса (при $\alpha>0$) и, соответственно, уменьшение давления на ось переднего колеса.

Здесь следует отметить, что построенное движение может оказаться неустойчивым по отношению к малым сингулярным возмущениям, связанным с увеличением общего числа степеней свободы системы[1]. Такие возмущения могут, например, появляться при уточнении общей динамической модели аппарата путем учета конечной, хотя и весьма большой, жесткости подшипниковых узлов в осях колес. Указанная неустойчивость отсутствует при малых значениях коэффициента трения и особенно опасна в диапазоне $f_*<f<f^*$.

Существенно, что изменение знака коэффициента α не меняет величины пути (и времени) торможения. При этом, однако, передняя и задняя колесные пары меняются местами в смысле динамической нагруженности. Уменьшение модуля α приводит к монотонному увеличению y. Если $\alpha=0$ и поэтому

$$a=[2I+(M+2m)r^2]/Mr \qquad (3.4)$$

то эффективность торможения в осях колес минимальна, а время и путь торможения максимальны. В этом смысле значение расстояния a согласно (3.4) является оптимальным.



Фиг. 2

Отметим также, что согласно (2.5) $f^*=f_*^2$ при $\alpha=0$, поэтому величина y в этом случае в силу (2.9) равна

$$y_{\max}=\sqrt{f^{-2}-f_*^{-4}} \qquad (3.5)$$

Итак, при $\alpha=0$ путь и время торможения монотонно убывают с ростом f в интервале $(0, f^*)$, несмотря на то, что неравенство (3.3) в этом случае заведомо не выполняется.

На фиг. 2 представлены графики зависимости величины y от коэффициента трения f при фиксированных значениях параметров ρ ($\rho=0{,}3$) и f_* ($f_*=0{,}64$) и различных значениях α.

Приведем теперь неравенства (1.13), выполнение которых обеспечивает существование безотрывного качения без проскальзывания. Поскольку в данном случае $\xi'>0$, $\mu=0$, $x=0$, $\gamma=0$, $w=1$, а величина $\varkappa=mg/F$ в силу (2.1) равна $\varkappa=My/m$, окончательно получим

$$\mu_i>0, \quad y\geqslant M|\alpha|/(M+2m), \quad f_i'>\frac{2(\mu_i-\rho)}{y(M+2m)/M-(-1)^i\alpha} \qquad (3.6)$$

При $f\to 0$ моменты трения μ_i представимы в виде рядов по степеням f:

$$\mu_i={}^1/_2yf\pm\alpha yf^2+{}^1/_4(1-2\rho)^2yf^3+\ldots>0 \qquad (3.7)$$

С другой стороны, согласно (2.2) всегда $\mu_i\neq 0$. Поэтому первое неравенство (3.6), обеспечивающее тормозящий характер моментов трения всегда выполняется. Согласно второму неравенству (3.6), при $\alpha>0$ ($\alpha<0$) существует опасность подбрасывания заднего (переднего) колеса. Это оказывается возможным даже тогда, когда $|\alpha|>\alpha_*$, $f_*<f<f^*$ (см. (3.3)) и поэтому заднее (переднее) колесо является более нагруженным. Начало подбрасывания при $|\alpha|>\alpha_*$ наступает с увеличением коэффициента трения f в некоторой окрестности порога заклинивания f^*. При $|\alpha|<\alpha_*$ зона подбрасывания по f включает в себя также окрестность порога

[1] *Новожилов И. В.* О корректности ряда предельных моделей в механике. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1985, № 253. 19 с.

перераспределения давлений на колеса. При односторонней связи между колесами и поверхностью оба критических значения коэффициента трения в безотрывном торможении по существу недостижимы. Последнее неравенство (3.6) позволяет определить критическое значение коэффициента трения f' скольжения колес о поверхность. Это значение ограничивает по f' снизу область режимов торможения аппарата без пробуксовки. Отметим, что $\mu_i \to 0$ при $f \to 0$ (см. (3.7)) и поэтому третье неравенство (3.6) выполняется. По мере приближения к границе зоны подбрасывания выражение в правой части этого неравенства увеличивается до бесконечности, поэтому появление пробуксовки (при конечных значениях f') всегда предшествует началу подбрасывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гулиа Н. В.* Инерция. М.: Наука, 1982. 152 с.
2. *Нагаев Р. Ф.* Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978. 160 с.
3. *Чудаков Е. А.* Теория автомобиля. М., Машгиз, 1950. 344 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 27.XII.1984