МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1986

УДК 531.381

О НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕВОЗМУЩАЕМОГО МАЯТНИКА

ПУРИЧАМИАШВИЛИ Г. Ш.

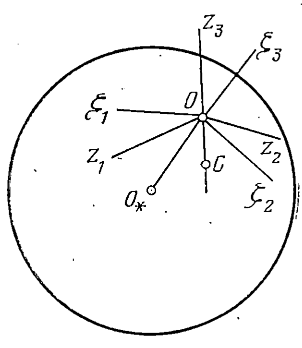
При помощи параметров Родрига-Гамильтона дается некоторый класс точных решений уравнений движения невозмущаемого маятника при определенных предположениях относительно угловой скорости движения точки подвеса. При помощи кинематических уравнений указывается набор возможных движений точки подвеса по поверхности земной сферы, удовлетворяющих наложенным ограничениям.

1. Рассмотрим движение невозмущаемого маятника, подвешенного в точке O на корабле, совершающем движение по поверхности неподвижной сферы, окружающей Землю (фиг. 1). С кораблем свяжем систему координат $\xi_1\xi_2\xi_3$, ось ξ_3 которой направлена по внешней нормали поверхности Земли. Проекции угловой скорости Ω_1 и Ω_2 осей ξ_i определяются скоростью корабля из соотношения $\mathbf{V}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}$, $\mathbf{R}=\mathbf{O_*O}$.

Пусть движение осей ξ_1 и ξ_2 таково, что проекция угловой скорости Ω_3 на ось ξ_3 равна нулю.

Введем систему координат $z_1z_2z_3$ связанную с маятником, ось z_3 которой направим вдоль оси маятника $\mathbf{CO}$ (C — центр масс маятника). Как и в [1], будем считать, что проекция угловой скорости вращения ω осей z_i на ось z_3 равна нулю

$$\omega_3=0 \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Тогда проекции кинетического момента рассматриваемого маятника в возмущенном движении запишутся в виде:

$$K_1=mlR\omega_1,\ K_2=mlR\omega_2,\ K_3=0 \tag{1.2}$$

где m — масса маятника, l — расстояние центра маятника C до точки подвеса O.

Теорема об изменении кинетического момента системы $\mathbf{K}^{\cdot}+\omega\times\mathbf{K}=\mathbf{l}\times m(\mathbf{g}-\mathbf{W}_0)$ в проекциях на оси z_i с учетом (1.2) переписывается в форме

$$R\dot{\omega}_1=A_2,\ R\dot{\omega}_2=-A_1,\ \omega_3=0 \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, A_1 и A_2 — проекции кажущегося ускорения $(\mathbf{g}-\mathbf{W}_0)$ на оси z_1 и z_2 соответственно, а проекция $\mathbf{l}$ на ось z_3 считается отрицательной. Проекции A_1 и A_2 имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}A_1&=-R\dot{\Omega}_2a_{11}+R\dot{\Omega}_1a_{12}-[g-R(\Omega_1^2+\Omega_2^2)]a_{13}\\ A_2&=-R\dot{\Omega}_2a_{21}+R\dot{\Omega}_1a_{22}-[g-R(\Omega_1^2+\Omega_2^2)]a_{23}\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь a_{ij} — элементы таблицы направляющих косинусов между осями z_i и ξ_j, построенной по известным правилам [2]. В результате, уравнения (1.3) с учетом (1.4) приводятся к форме (ν — частота Шулера):

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1&=-\dot{\Omega}_2a_{21}+\dot{\Omega}_1a_{22}-[\nu^2-(\Omega_1^2+\Omega_2^2)]a_{23}\\ \dot{\omega}_2&=\dot{\Omega}_2a_{11}-\dot{\Omega}_1a_{12}+[\nu^2-(\Omega_1^2+\Omega_2^2)]a_{13}\\ \omega_3&=0,\ \nu=\sqrt{g/R}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Переход к кватернионным обозначениям выполняется подстановкой в систему (1.5) выражений для угловых скоростей, определяемых из матричного соотношения

$$\begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix} = 2 \begin{Vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot\lambda_0 \\ \dot\lambda_1 \\ \dot\lambda_2 \\ \dot\lambda_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

В результате подстановки ω_1 и ω_2 из соотношений (1.6) в первые два уравнения системы (1.5) получаем

$$2 \begin{Vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \ddot\lambda_0 \\ \ddot\lambda_1 \\ \ddot\lambda_2 \\ \ddot\lambda_3 \end{Vmatrix} + 2 \begin{Vmatrix} a_{11}-a_{22} & a_{12}+a_{21} \\ a_{21}+a_{12} & a_{22}-a_{11} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot\Omega_1 \\ \dot\Omega_2 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} \dot a_{11} & \dot a_{12} \\ \dot a_{21} & \dot a_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_{23} \\ -a_{13} \end{Vmatrix} [\nu^2 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)] = 0 \tag{1.7}$$

Система дифференциальных уравнений (1.7) с неизвестными λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 замыкается добавлением дифференциального соотношения

$$2(-\lambda_3\dot\lambda_0 + \lambda_0\dot\lambda_3 + \dot\lambda_1\lambda_2 - \dot\lambda_2\lambda_1) + a_{31}\Omega_1 + a_{32}\Omega_2 = 0 \tag{1.8}$$

являющегося следствием последнего уравнения системы (1.5), и уравнения связи

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \tag{1.9}$$

которому должны удовлетворять коэффициенты введенного кватерниона.

Таким образом, задача определения движения системы z_i относительно системы ξ_j свелась к интегрированию уравнений (1.7), (1.8), (1.9). При этом элементы направляющих косинусов выражаются формулами

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2-\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_3^2 \end{Vmatrix} \tag{1.10}$$

Подставляя их в систему (1.7) находим

$$\begin{gathered} -\lambda_1 S_0 + \lambda_0 S_1 + \lambda_3 S_2 - \lambda_2 S_3 = 0 \\ -\lambda_2 S_0 - \lambda_3 S_1 + \lambda_0 S_2 + \lambda_1 S_3 = 0 \end{gathered} \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered} S_0 = \ddot\lambda_0 - (\lambda_1\Omega_1)^{\cdot} - (\lambda_2\Omega_2)^{\cdot} \\ S_1 = \ddot\lambda_1 + \dot\lambda_0\Omega_1 + \dot\lambda_3\Omega_2 + \lambda_1[\nu^2 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)] \\ S_2 = \ddot\lambda_2 - \dot\lambda_3\Omega_1 + \dot\lambda_0\Omega_2 + \lambda_2[\nu^2 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)] \\ S_3 = \ddot\lambda_3 + (\lambda_2\Omega_1)^{\cdot} - (\lambda_1\Omega_2)^{\cdot} \end{gathered} \tag{1.12}$$

Следуя [3, 4], предположим, что параметры введенного кватерниона удовлетворяют системе

$$S_i = 0 \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{1.13}$$

Очевидно, что тогда λ_i будут решениями предыдущей системы (1.11). Если при этом некоторые из этих решений удовлетворяют условиям (1.8) и (1.9), то они являются решениями исходной задачи и описывают некоторое движение осей z_i и ξ_j.

Первое и последнее уравнения системы (1.13) допускают однократное интегрирование, после которого система преобразуется в виду:

$$\begin{gathered} \dot\lambda_0 = \lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2 + C_0, \quad \dot\lambda_3 = \lambda_1\Omega_1 - \lambda_2\Omega_2 + C_3 \\ \ddot\lambda_1 + \nu^2\lambda_1 + C_0\Omega_1 + C_3\Omega_2 = 0 \\ \ddot\lambda_2 + \nu^2\lambda_2 + C_0\Omega_2 - C_3\Omega_1 = 0 \end{gathered} \tag{1.14}$$

Воспользовавшись уравнениями (1.4) и соотношениями (1.10), из условия (1.8) получим:

$$\lambda_1^{\cdot}\lambda_2-\lambda_2^{\cdot}\lambda_1=C_0\lambda_3-C_3\lambda_0 \tag{1.15}$$

Можно убедиться, что продифференцированное уравнение (1.15) является следствием системы (1.14). Это означает, что уравнение (1.15), а следовательно и условие (1.8), накладывает лишь некоторые ограничения на начальные значения параметров $\lambda_i(0)$ и $\lambda_i^{\cdot}(0)$.

Таким образом, задача свелась к решению системы пяти уравнений (1.9) и (1.14). Система (1.14) позволяет выразить λ_i ($i=0, 1, 2, 3$) через Ω_1 и Ω_2, если они известны. Затем из уравнения (1.9) определяется связь между Ω_1 и Ω_2. Этого и следовало ожидать, так как три уравнения (1.5) были заменены четырьмя уравнениями (1.13) и поэтому в задаче остался всего один свободный параметр (например, угловая скорость Ω_1).

2. Перейдем теперь к решению конкретной системы. Рассмотрим вначале более простой случай, когда

$$C_0=C_3=0 \tag{2.1}$$

Последние два уравнения системы (1.14) легко решаются:

$$\lambda_1=\sqrt{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_1^{\cdot\circ}/\nu)^2}\cos[\nu t-\operatorname{arctg}(\lambda_1^{\cdot\circ}/\lambda_1^\circ\nu)]$$

$$\lambda_2=\sqrt{(\lambda_2^\circ)^2+(\lambda_2^{\cdot\circ}/\nu)^2}\cos[\nu t+\operatorname{arctg}(\lambda_2^{\cdot\circ}/\lambda_2^\circ\nu)] \tag{2.2}$$

При этом из условия (1.15) получаем:

$$\lambda_1/\lambda_2=\lambda_1^\circ/\lambda_2^\circ=\lambda_1^{\cdot\circ}/\lambda_2^{\cdot\circ} \tag{2.3}$$

Это означает, что λ_1 и λ_2 будут колебаться синфазно.

Таким образом, система

$$\lambda_0^{\cdot}=\lambda_1\Omega_1+\lambda_2\Omega_2 \tag{2.4}$$

$$\lambda_3^{\cdot}=\lambda_1\Omega_2-\lambda_2\Omega_1,\qquad \lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1$$

позволяет определить связь между Ω_1 и Ω_2 и найти λ_0 и λ_3. Из второго уравнения системы (2.4) находим

$$\Omega_2=\lambda_3^{\cdot}/\lambda_1+\Omega_1\lambda_2^\circ/\lambda_1^\circ \tag{2.5}$$

и, подставляя в первое, получаем

$$\lambda_0^{\cdot}=\lambda_3^{\cdot}\lambda_2^\circ/\lambda_1^\circ+[1+(\lambda_2^\circ/\lambda_1^\circ)^2]\lambda_1\Omega_1 \tag{2.6}$$

Интегрируя уравнение (2.6), находим связь между λ_0 и λ_3:

$$\lambda_0=\lambda_3\frac{\lambda_2^\circ}{\lambda_1^\circ}+\left[1+\left(\frac{\lambda_2^\circ}{\lambda_1^\circ}\right)^2\right]\int_0^t\lambda_1(\tau)\Omega_1(\tau)\,d\tau+\frac{\lambda_1^\circ\lambda_0^\circ-\lambda_2^\circ\lambda_3^\circ}{\lambda_1^\circ} \tag{2.7}$$

Из условия нормировки (1.9) с учетом (2.7) можно выразить λ_0 и λ_3 через $\Omega_1(t)$, которое считается известным, и через λ_1, которое определяется из (2.2):

$$\lambda_3=-\frac{\lambda_2^\circ}{\lambda_1^\circ}\left(\int_0^t\lambda_1(\tau)\Omega_1(\tau)\,d\tau+\lambda_1^\circ\frac{\lambda_1^\circ\lambda_0^\circ-\lambda_2^\circ\lambda_3^\circ}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}\right)+L \tag{2.8}$$

$$\lambda_0=\int_0^t\lambda_1(\tau)\Omega_1(\tau)\,d\tau+\lambda_1^\circ\frac{\lambda_1^\circ\lambda_0^\circ-\lambda_2^\circ\lambda_3^\circ}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}+\frac{\lambda_2^\circ}{\lambda_1^\circ}L \tag{2.9}$$

$$L=\sqrt{\frac{(\lambda_1^\circ)^2}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}-\left(\int_0^t\lambda_1(\tau)\Omega_1(\tau)\,d\tau+\lambda_1^\circ\frac{\lambda_1^\circ\lambda_0^\circ-\lambda_2^\circ\lambda_3^\circ}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}\right)^2-\lambda_1^2}$$

Из уравнения (2.5) легко определить

$$\Omega_2=-\left[\lambda_1^{\cdot}+\Omega_1\left(\int\limits_0^t \lambda_1(\tau)\Omega_1(\tau)d\tau+\lambda_1^\circ\frac{\lambda_1^\circ\lambda_0^\circ-\lambda_2^\circ\lambda_3^\circ}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}\right)\right]L^{-1} \tag{2.10}$$

Таким образом, из системы (1.4) и уравнения нормировки (1.9) при условии (2.1) удалось определить параметры λ_i ($i=0, 1, 2, 3$) и определить связь (2.10) между Ω_1 и Ω_2, которую можно переписать в более удобном виде

$$\left(\int\limits_0^t \lambda_1(\tau)\Omega_2(\tau)d\tau+\lambda_1^\circ\frac{\lambda_2^\circ\lambda_0^\circ+\lambda_1^\circ\lambda_3^\circ}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}\right)^2+\left(\int\limits_0^t \lambda_1(\tau)\Omega_1(\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\lambda_1^\circ\frac{\lambda_1^\circ\lambda_2^\circ-\lambda_0^\circ\lambda_3^\circ}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}\right)^2=\frac{(\lambda_1^\circ)^2}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}-\lambda_1^2 \tag{2.11}$$

В самом общем случае этому уравнению удовлетворяют такие Ω_1 и Ω_2, которые можно представить в виде

$$\Omega_1=\frac{\left(\sqrt{1-\lambda_1^2[(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2]/(\lambda_1^\circ)^2}\cos\psi\right)^{\cdot}}{\lambda_1\sqrt{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}/\lambda_1^\circ} \tag{2.12}$$

$$\Omega_2=\frac{\left(\sqrt{1-\lambda_1^2[(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2]/(\lambda_1^\circ)^2}\sin\psi\right)^{\cdot}}{\lambda_1\sqrt{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}/\lambda_1^\circ}$$

Здесь $\psi(t)$ — произвольная функция времени, начальное значение которой определяется соотношением

$$\sin\psi(0)=\frac{\lambda_0^\circ\lambda_2^\circ+\lambda_1^\circ\lambda_3^\circ}{\sqrt{[(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2][(\lambda_0^\circ)^2+(\lambda_3^\circ)^2]}} \tag{2.13}$$

Итак, при любых λ_i° и $\lambda_i^{\cdot\circ}$, удовлетворяющих соотношениям (2.3), можно получить точное решение исходной задачи, которое согласно (2.2), (2.8), (2.9) с учетом (2.12) запишется в форме

$$\lambda_0=\sqrt{\frac{(\lambda_1^\circ)^2}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}-\left[(\lambda_1^\circ)^2+\left(\frac{\lambda_1^{\cdot\circ}}{\nu}\right)^2\right]\cos^2\left[\nu t-\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_1^{\cdot\circ}}{\lambda_1^\circ\nu}\right)\right]}\times$$

$$\times\left(\frac{\lambda_2^\circ}{\lambda_1^\circ}\sin\psi+\cos\psi\right)$$

$$\lambda_1=\sqrt{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_1^{\cdot\circ}/\nu)^2}\cos\left[\nu t-\operatorname{arctg}(\lambda_1^{\cdot\circ}/\nu\lambda_1^\circ)\right] \tag{2.14}$$

$$\lambda_2=\sqrt{(\lambda_2^\circ)^2+(\lambda_2^{\cdot\circ}/\nu)^2}\cos\left[\nu t-\operatorname{arctg}(\lambda_2^{\cdot\circ}/\nu\lambda_2^\circ)\right]$$

$$\lambda_3=\sqrt{\frac{(\lambda_1^\circ)^2}{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}-\left[(\lambda_1^\circ)^2+\left(\frac{\lambda_1^{\cdot\circ}}{\nu}\right)^2\right]\cos^2\left[\nu t-\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_1^{\cdot\circ}}{\lambda_1^\circ\nu}\right)\right]}\times$$

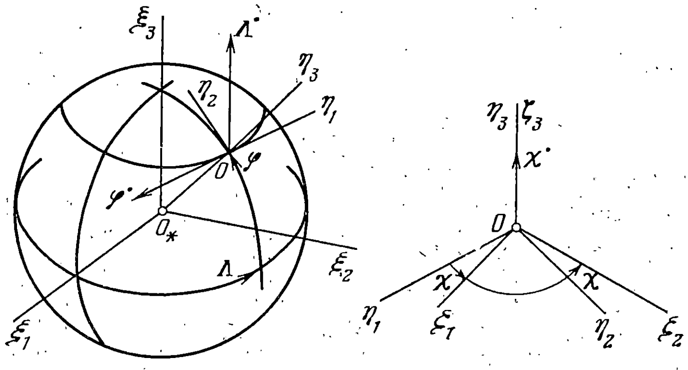
$$\times\left(\sin\psi-\frac{\lambda_2^\circ}{\lambda_1^\circ}\cos\psi\right)$$

Функция $\psi(t)$ в (2.14) удовлетворяет условию (2.13). Однако полученное решение верно лишь при выполнении условия (2.1) и наложении ограничений (2.12) на угловые скобки Ω_1 и Ω_2

3. Определим теперь тип движения корабля, при котором выполнено условие (2.12). Будем задавать движение трехгранника по земной сфере при помощи трех углов Λ, φ, χ (фиг. 2). Кинематические уравнения в этих координатах принимают вид

$$\Lambda^{\cdot}\cos\varphi=\Omega_1\sin\chi+\Omega_2\cos\chi,\qquad \varphi^{\cdot}=-\Omega_1\cos\chi+\Omega_2\sin\chi$$

$$\chi^{\cdot}=-(\Omega_1\sin\chi+\Omega_2\cos\chi)\operatorname{tg}\varphi \tag{3.1}$$



Фиг. 2

Из последних двух уравнений можно выразить Ω_1 и Ω_2

$$\Omega_1=(\cos\varphi\cos\chi)^{\cdot}/\sin\varphi, \qquad \Omega_2=-(\cos\varphi\sin\chi)^{\cdot}/\sin\varphi \tag{3.2}$$

Сравнивая (3.2) и (2.12), получаем систему для определения углов φ и χ:

$$\begin{aligned}\frac{(\cos\varphi\cos\chi)^{\cdot}}{\sin\varphi}&=\frac{\left(\sqrt{1-\lambda_1^2[(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2]/(\lambda_1^\circ)^2}\cos\psi\right)^{\cdot}}{\lambda_1\sqrt{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}/\lambda_1^\circ}\\ \frac{(\cos\varphi\cos\chi)^{\cdot}}{\sin\varphi}&=-\frac{\left(\sqrt{1-\lambda_1^2[(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2]/(\lambda_1^\circ)^2}\sin\varphi\right)^{\cdot}}{\lambda_1\sqrt{(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2}/\lambda_1^\circ}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Отсюда видно, что этой системе удовлетворяет такое движение корабля, когда

$$\begin{gathered}\sin\varphi=\sqrt{[(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2][1+(\lambda_1^{\cdot\circ}/\nu\lambda_1^\circ)^2]}\cos[\nu t-\operatorname{arctg}(\lambda_1^{\cdot\circ}/\nu\lambda_1^\circ)]\\ \chi=-\psi\end{gathered} \tag{3.4}$$

и соответственно для Λ из (3.1) имеем

$$\Lambda^{\cdot}=\frac{\chi^{\cdot}}{\sqrt{[(\lambda_1^\circ)^2+(\lambda_2^\circ)^2][1+(\lambda_1^\circ/\nu\lambda_1^\circ)^2]\cos[\nu t-\operatorname{arctg}(\lambda_1^{\cdot\circ}/\nu\lambda_1^\circ)]}} \tag{3.5}$$

Таким образом, полученному в случае (2.1) решению задачи (2.14) удовлетворяет такое движение корабля, при котором $\varphi(t)$ меняется по закону, определяемому из (3.4), т. е. по гармоническому закону с частотой Шуллера, а $\Lambda(t)$ в соответствии с (2.13), (3.4) и (3.5) может быть произвольной. Этот результат был ранее получен в [4] при помощи механической интерпретации исследуемого класса точных решений.

4. Перейдем к решению системы уравнений (1.14) в предположении, что

$$C_0\neq 0, \qquad C_3\neq 0 \tag{4.1}$$

Из уравнения (1.15), являющегося следствием системы (1.14), можно выразить

$$\lambda_3=\lambda_0 C_3/C_0+(\lambda_1^{\cdot}\lambda_2-\lambda_2^{\cdot}\lambda_1)/C_0 \tag{4.2}$$

Воспользовавшись уравнением нормировки (1.9), можно выразить при помощи (4.2) λ_0 и λ_3 через $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$:

$$\begin{aligned}\lambda_0&=-\frac{C_3}{C_0^2+C_3^2}(\lambda_1^{\cdot}\lambda_2-\lambda_2^{\cdot}\lambda_1)+\frac{C_0}{C_0^2+C_3^2}z\\ \lambda_3&=\frac{C_0}{C_0^2+C_3^2}(\lambda_1^{\cdot}\lambda_2-\lambda_2^{\cdot}\lambda_1)+\frac{C_3}{C_0^2+C_3^2}z\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$z=\sqrt{(C_0^2+C_3^2)(1-\lambda_1^2-\lambda_2^2)-(\lambda_1^{\cdot}\lambda_2-\lambda_2^{\cdot}\lambda_1)^2}$$

В итоге остается система трех уравнений, из которой надо определить λ_1, λ_2 и Ω_2, считая $\Omega_1(t)$ заданной функцией времени

$$\lambda_0^{\cdot}=\lambda_1\Omega_1+\lambda_2\Omega_2+C_0, \quad \lambda_1^{\cdot\cdot}+\nu^2\lambda_1+C_0\Omega_1+C_3\Omega_2=0$$
$$\lambda_2^{\cdot\cdot}+\nu^2\lambda_2+C_0\Omega_2-C_3\Omega_1=0 \tag{4.4}$$

причем λ_0 определяется из (4.3).

Однако для удобства решения предположим, что в системе (4.4) заданным параметром является не $\Omega_1(t)$, как считалось ранее, а $\lambda_1(t)$. Тогда, выразив из последних двух уравнений Ω_1 и Ω_2 через λ_1 и λ_2

$$\Omega_1=-\frac{C_0}{C_0^2+C_3^2}(\lambda_1^{\cdot\cdot}+\nu^2\lambda_1)+\frac{C_3}{C_0^2+C_3^2}(\lambda_2^{\cdot\cdot}+\nu^2\lambda_2)$$
$$\Omega_2=-\frac{C_3}{C_0^2+C_3^2}(\lambda_1^{\cdot\cdot}+\nu^2\lambda_1)-\frac{C_0}{C_0^2+C_3^2}(\lambda_2^{\cdot\cdot}+\nu^2\lambda_2) \tag{4.5}$$

и подставив (4.5) в первое уравнение системы (4.4), получаем

$$z^{\cdot}=-\lambda_1(\lambda_1^{\cdot\cdot}+\nu^2\lambda_1)-\lambda_2(\lambda_2^{\cdot\cdot}+\nu^2\lambda_2)+C_0^2+C_3^2 \tag{4.6}$$

Перейдем теперь к решению уравнения (4.6). Сделаем замену переменных

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=x^2, \quad \lambda_1^{\cdot}\lambda_2-\lambda_2^{\cdot}\lambda_1=y \tag{4.7}$$

Эти уравнения легко разрешаются относительно x и y:

$$\lambda_1=x\sin\left(\int_0^t\frac{y}{x^2}d\tau+\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1^{\circ}}{\lambda_2^{\circ}}\right), \quad \lambda_2=x\cos\left(\int_0^t\frac{y}{x^2}d\tau+\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1^{\circ}}{\lambda_2^{\circ}}\right) \tag{4.8}$$

Преобразуя (4.6), с учетом (4.7) и (4.8) получаем

$$z^{\cdot}=-x(x^{\cdot\cdot}+\nu^2x)+y^2/x^2+C_0^2+C_3^2 \tag{4.9}$$

Уравнение (4.9) с учетом соотношения

$$z^2=(C_0^2+C_3^2)(1+x^2)-y^2 \tag{4.10}$$

перепишется в виде:

$$z^{\cdot}=-x^{-2}z^2-[x(x^{\cdot\cdot}+\nu^2x)-(C_0^2+C_3^2)x^{-2}] \tag{4.11}$$

Если удастся подобрать какие-либо x и z, удовлетворяющие (4.11), то при помощи (4.10) и (4.8) можно будет определить параметры λ_1 и λ_2.

Уравнение (4.11) представляет собой уравнение Риккати, в котором $x(t)$ является независимой переменной.

Предположим, что выполнено соотношение

$$x(x^{\cdot\cdot}+\nu^2x)-(C_0^2+C_3^2)x^{-2}=ax^{-2}, \quad a=\mathrm{const} \tag{4.12}$$

Решение уравнения Риккати в этом случае представляется в виде

$$z=-\sqrt{a}\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{a}\int_0^t\frac{d\tau}{x^2}+\mathrm{const}\right), \quad a>0 \tag{4.13}$$
$$z=\left(-\int_0^t\frac{d\tau}{x^2}+\mathrm{const}\right)^{-1} \text{ или } z=0, \quad a=0$$

При $a<0$ решение z определяется одним из выражений

$$\sqrt{|a|}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{|a|}\int_0^t\frac{d\tau}{x^2}+\mathrm{const}\right), \ \sqrt{|a|}\,\mathrm{cth}\left(\sqrt{|a|}\int_0^t\frac{d\tau}{x^2}+\mathrm{const}\right), \ \pm\sqrt{|a|}, \ a<0 \tag{4.14}$$

в зависимости от начального значения $z(0)$.

Для полного решения задачи необходимо найти x, удовлетворяющее уравнению (4.12). Для этого введем

$$p=x^{\cdot}(t(x))$$

после чего уравнение (4.12) запишется в виде

$$(p^2)'=2[(C_0^2+C_3^2-a)x^{-3}-\nu^2x] \tag{4.15}$$

где штрих означает дифференцирование по x. Из уравнения (4.15) определяется p, после чего вычисляется x. В результате получаем

$$x^2=k_1+\sqrt{k_1^2-(C_0^2+C_3^2+a)/\nu^2}\sin(2\nu t+k_2) \tag{4.16}$$

Здесь k_1 и k_2 — постоянные величины определяемые из начальных условий.

Исходя из условия $0\leqslant x^2\leqslant 1$, получаем ограничение на выбор коэффициента a:

$$0\leqslant a+C_0^2+C_3^2\leqslant \nu^2k_1^2, \quad 0{,}5\geqslant k_1\geqslant 0$$

$$(2k_1-1)\nu^2\leqslant a+C_0^2+C_3^2\leqslant \nu^2k_1^2, \quad 1\geqslant k_1>0{,}5 \tag{4.17}$$

Таким образом, при помощи (4.16), (4.13), (4.14), (4.10) с учетом соотношений (4.17) и (4.18) можно получить определенный набор решений исходной задачи.

Построенный класс не охватывает случай, когда в уравнении (4.9):

$$y=0 \tag{4.18}$$

Согласно (4.9), получим

$$x(x^{\cdot\cdot}+\nu^2x)=xx^{\cdot}\sqrt{(C_0^2+C_3^2)/(1-x^2)+C_0^2+C_3^2} \tag{4.19}$$

Очевидным является простое решение уравнения (4.9):

$$x^2=(C_0^2+C_3^2)/\nu^2$$

при выполнении соотношения $C_0^2+C_3^2\leqslant\nu^2$. Для нахождения других решений, упростим уравнение (4.19), производя замену переменных:

$$x^{\cdot}(t(x))=1/u(x) \tag{4.20}$$

Получаем уравнение Абеля I рода

$$u'=\left(\nu^2x-\frac{C_0^2+C_3^2}{x}\right)u^3-\frac{\sqrt{C_0^2+C_3^2}}{\sqrt{1-x^2}}u^2 \tag{4.21}$$

Решение уравнения (4.21) позволяет при помощи (4.20) выразить $x(t)$, которое после подстановки в (4.8) дает решение исходной задачи. Однако найти нетривиальное решение уравнения Абеля I рода в квадратурах является затруднительным.

В случае (4.18) легко находится решение кинематических уравнений (3.1). Действительно, из (4.5) и (4.8) видно, что Ω_1 и Ω_2 колеблются синфазно. Тогда из уравнений (3.2) находим:

$$\sin\varphi(t)=-\cos\gamma\sin\left[\int_0^t\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\,d\tau+\arcsin\left(\frac{\sin\varphi(0)}{\cos\gamma}\right)\right]$$

$$\sin\psi^*(t)=\sin\gamma/\cos\varphi(t), \quad \Lambda^{\cdot}(t)=\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\sin\gamma/\cos^2\varphi(t)$$

Здесь $\psi^*(t)=\chi(t)+\operatorname{arctg}(\Omega_2/\Omega_1)$, а $\sin\gamma=\sin\psi^*(0)\cos\varphi(0)$ — постоянная. Если при этом считать, что $\psi^*(0)=0$, то полученное решение соответствует движению корабля по меридиану с законом:

$$\varphi(t)=\int_0^t\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\,d\tau+\varphi(0)$$

Хотя в некоторых других случаях, когда выполнено условие (4.12), решение записывается в аналитическом виде, задача интегрирования кинематических уравнений представляется весьма сложной. В каждом конкретном случае здесь можно будет воспользоваться численным решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климов Д. М.* Механика невозмущаемых гироскопических систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 57—65.
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976, 670 с.
3. *Кошляков В. Н.* Об одном классе точных решений уравнений движения корректируемого гирогоризонткомпаса.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 6, с. 3—9.
4. *Жбанов Ю. К.* О точных решениях уравнений движения гирогоризонткомпаса.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 11—18.

Москва

Поступила в редакцию
20.II.1985