МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1986

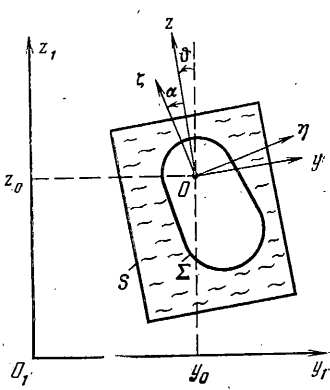
УДК 531.383

К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, РАЗМЕЩЕННОГО В ПОДВИЖНОЙ ПОЛОСТИ С ЖИДКОСТЬЮ

ЗОЛОТЕНКО Г. Ф.

Твердое тело, размещенное в полости с жидкостью, моделирует разнообразные объекты природы и техники. В [1–5] исследовались случаи геометрически подобных тел и полостей, разделенных слоем вязкой жидкости. Более общий случай, когда тело и полость имеют осесимметричную форму, но не обязательно геометрически подобны, рассмотрен в [6]. Динамика относительного движения твердого тела и жидкости, находящихся в полости произвольной формы на некотором подвижном объекте, рассматривается в [7].

В публикуемой работе исследуется движение физического маятника, имеющего произвольную форму и установленного в полости, совершающей плоскопараллельное движение. Проанализирована структура основных динамических величин, характеризующих движение маятника и жидкости. Выведено уравнение движения маятника относительно полости. Классифицированы силы инерции гидродинамической природы, обусловленные движением полости. Получены условия, при выполнении которых маятник становится невозмущаемым [8].



1. Рассмотрим физический маятник, размещенный в подвижной полости, целиком заполненной жидкостью и совершающей плоскопараллельное движение (фигура). С полостью жестко связана система кооординат $Oxyz$, с маятником — $O\xi\eta\zeta$. Начало обеих систем координат совпадает с точкой подвеса маятника O. Движение полости рассматривается относительно инерциальной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, а ее положение определяется координатами x_0, y_0, z_0 точки O и угловой координатой ϑ. Движение маятника рассматривается в подвижной системе координат $Oxyz$ и определяется угловой координатой α.

Жидкость считается идеальной и несжимаемой, а ее движение — потенциальным. Потенциал абсолютной скорости жидкости представляется в виде [7]:

$$\Phi(x, y, z, t)=v_y y+v_z z+\vartheta^{\cdot}\Omega(x, y, z)+\alpha^{\cdot}\Psi(x, y, z) \quad (1.1)$$

Здесь x, y, z — координаты произвольной точки объема, занятого жидкостью, в системе координат $Oxyz$, t — время, v_y, v_z — проекции абсолютной скорости точки O на оси y, z, $\vartheta^{\cdot}$ — абсолютная угловая скорость полости, $\alpha^{\cdot}$ — относительная угловая скорость маятника, $\Omega(x, y, z)$, $\Psi(x, y, z)$ — единичные потенциалы, определяемые из условий непротекания, заданных на поверхности полости S и поверхности маятника Σ. Эти условия имеют вид (ν_y, ν_z — проекции орта $\boldsymbol{\nu}$ внешней нормали к граничным поверхностям)

$$\partial\Omega/\partial\nu|_{S+\Sigma}=y\nu_z-z\nu_y,\ \partial\Psi/\partial\nu|_S=0,\ \partial\Psi/\partial\nu|_\Sigma=y\nu_z-z\nu_y \quad (1.2)$$

В системе координат $Oxyz$, жестко связанной с полостью, поверхность S неподвижна, а положение поверхности Σ зависит от угла α. Следовательно, функции Ω, Ψ также зависят от α, т. е. $\Omega=\Omega(x, y, z, \alpha)$, $\Psi=\Psi(x, y, z, \alpha)$.

Кинетическая энергия маятника определяется выражением [9]:

$$T_1={}^1/_2[mv_0^2+2m(\mathbf{v}_0\times\boldsymbol{\omega})\cdot\mathbf{l}+\boldsymbol{\omega}\cdot\Theta\cdot\boldsymbol{\omega}]+m\mathbf{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{l})+\boldsymbol{\omega}\cdot\Theta\cdot\boldsymbol{\omega}'+{}^1/_2\boldsymbol{\omega}'\cdot\Theta\cdot\boldsymbol{\omega}' \quad (1.3)$$

Здесь T_1 — кинетическая энергия абсолютного движения маятника, m — масса маятника, $\mathbf{v}_0$ — абсолютная скорость точки O, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость полости, $\mathbf{l}$ — радиус-вектор центра масс маятника относительно точки O, Θ — тензор инерции маятника в точке O с компонентами в системе координат $Oxyz$, $\boldsymbol{\omega}'$ — угловая скорость маятника относительно полости. Заметим, что $\boldsymbol{\omega}=(\vartheta^{\cdot}, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega}'=(\alpha^{\cdot}, 0, 0)$ в системе координат $Oxyz$.

Согласно определению, кинетическая энергия жидкости имеет вид

$$T_2={}^1/_2\rho\int_\tau \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,d\tau \quad (1.4)$$

Здесь ρ — массовая плотность жидкости, $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость частиц жидкости, τ — объем, занятый жидкостью. Полагая $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\Phi$, где потенциал Φ определяется по формуле (1.1), с помощью теорем Грина и Гаусса-Остроградского можно показать, что кинетическая энергия жидкости представима в виде [7]:

$$T_2={}^1/_2[m_1v_0^2+2m_1(\mathbf{v}_0\times\boldsymbol{\omega})\cdot\mathbf{r}_1+\boldsymbol{\omega}\cdot J_0\boldsymbol{\omega}]-$$
$$-m^0\mathbf{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r}_0)+\boldsymbol{\omega}\cdot J_1\boldsymbol{\omega}'+{}^1/_2\boldsymbol{\omega}'\cdot J_2\boldsymbol{\omega}' \quad (1.5)$$

где m_1 — масса жидкости в полости, r_1 — радиус-вектор центра масс жидкости относительно точки O, m^0 — масса жидкости, вытесненной маятником, r_0 — радиус-вектор центра масс жидкости, вытесненной маятником, J_0, J_1, J_2 — матричные величины, характеризующие динамику жидкости и выражающиеся через единичные потенциалы скорости жидкости. В случае потенциала вида (1.1) матрицы J_0, J_1, J_2 имеют вид

$$J_0=\begin{Vmatrix}\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\quad J_1=\begin{Vmatrix}\mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\quad J_2=\begin{Vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix} \quad (1.6)$$

$$\gamma=\rho\int_{S+\Sigma}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dS,\qquad \mu=\rho\int_{S+\Sigma}\Omega\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}dS,\qquad \lambda=\rho\int_{S+\Sigma}\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}dS \quad (1.7)$$

Поскольку функции Ω, Ψ и положение поверхности Σ зависят от α, величины γ, μ, λ также зависят от α.

Считая маятник и жидкость носимыми телами, а полость несущим телом, основные динамические величины, характеризующие относительное движение носимых тел, можно представить в виде

$$K=[(\theta_{11}+\mu)\alpha^{\cdot};\ \theta_{21}\alpha^{\cdot};\ \theta_{31}\alpha^{\cdot}],\ T={}^1/_2(\theta_{11}+\lambda)\alpha^{\cdot 2}$$
$$Q=[0;\ -(ml_z-m^0r_z)\alpha^{\cdot};\ (ml_y-m^0r_y)\alpha^{\cdot}] \quad (1.8)$$

Здесь $\mathbf{K}$ — кинетический момент относительного движения носимых тел, T — кинетическая энергия относительного движения носимых тел, $\mathbf{Q}$ — главный вектор относительных количеств движения носимых тел, θ_{11}, θ_{21}, θ_{31} — компоненты тензора инерции маятника Θ, l_y, l_z и r_y, r_z — проекции на оси y, z векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}_0$ соответственно.

Формулы (1.8) используются в дальнейшем при выводе уравнения Лагранжа второго рода, описывающего движение маятника и жидкости относительно полости.

2. В рамках модели идеальной жидкости уравнение относительных колебаний маятника и жидкости записывается в виде [9]:

$$E(T)=Q_\alpha-E[(\mathbf{v}_0\times\boldsymbol{\omega})\cdot M\mathbf{r}_c]-{}^1/_2E[\boldsymbol{\omega}\cdot(\Theta+J_0)\boldsymbol{\omega}]-E(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})-E(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{K})$$
$$E\equiv\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^{\cdot}}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right] \quad (2.1)$$

Здесь Q_α — обобщенные активные силы, действующие на маятник и жидкость, M — сумма масс маятника и жидкости, $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор относительно точки O общего центра масс маятника и жидкости. Имеет место равенство [9]:

$$E[(\mathbf{v}_0\times\boldsymbol{\omega})\cdot M\mathbf{r}_c]+{}^1/_2E[\boldsymbol{\omega}\cdot(\Theta+J_0)\boldsymbol{\omega}]+E(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})=$$
$$=M\mathbf{w}_0\cdot\partial\mathbf{r}_c/\partial\alpha-{}^1/_2\boldsymbol{\omega}\cdot(\Theta+J_0)\boldsymbol{\omega} \qquad (2.2)$$

где $\mathbf{w}_0$ — абсолютное ускорение точки O. Кроме того, между радиусами-векторами центров масс жидкости, окружающей маятник, и жидкости, вытесненной маятником, имеется связь, определяемая соотношением

$$m^0\mathbf{r}_0+m_1\mathbf{r}_1=(m^0+m_1)\mathbf{r}_2=\mathrm{const} \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{r}_2$ — радиус-вектор центра масс жидкости, целиком заполняющей полость в случае, когда маятник отсутствует. Формула (2.3) позволяет перейти в уравнении движения к силам Архимеда. В дальнейшем считается, что центры масс маятника и вытесненной им жидкости лежат на оси $O\zeta$, т. е. $\mathbf{l}=(0, 0, l_z)$, $\mathbf{r}_0=(0, 0, r_z)$. Пользуясь равенством $\mathbf{r}_c=[m\mathbf{l}+(m^0+m_1)\mathbf{r}_2-m^0\mathbf{r}_0]/M$ и проектируя все векторы на оси системы координат $Oxyz$, приходим к выражению

$$M\mathbf{w}_0\cdot\partial\mathbf{r}_c/\partial\alpha=(w_y\cos\alpha+w_z\sin\alpha)(m^0r_z-ml_z) \qquad (2.4)$$

где w_y, w_z — проекции абсолютного ускорения точки O на оси y, z.

Из активных сил, действующих на маятник и жидкость, учитываются силы тяготения. Считается, что эти силы, действующие на массы m, m^0, m_1, сводятся к равнодействующим, приложенным в соответствующих центрах масс. Определяя работу сил тяготения на виртуальных перемещениях носимых тел и переходя к обобщенным силам, находим

$$Q_\alpha=-(ml_z-m^0r_z)(j_z\sin\alpha+j_y\cos\alpha) \qquad (2.5)$$

В (2.5) j_y, j_z — проекции на оси y, z вектора $\mathbf{j}$ ускорения силы тяготения. С помощью формул (1.8), (2.2), (2.4) и (2.5) уравнение относительных колебаний маятника и жидкости (2.1) представляется в виде

$$(\theta_{11}+\lambda)\alpha^{\cdot\cdot}=-{}^1/_2\alpha^{\cdot 2}\partial\lambda/\partial\alpha-(ml_z-m^0r_z) \qquad (2.6)$$
$$[(j_y-w_y)\cos\alpha+(j_z-w_z)\sin\alpha]+{}^1/_2\vartheta^{\cdot 2}\partial\gamma/\partial\alpha-(\theta_{11}+\mu)\vartheta^{\cdot\cdot}$$

При вычислении эйлеровых операторов учитывалось, что величины λ, γ, μ зависят от времени, поскольку $\lambda=\lambda(\alpha)$, $\gamma=\gamma(\alpha)$, $\mu=\mu(\alpha)$.

Уравнение (2.6) может рассматриваться как уравнение относительных колебаний маятника, если гидродинамические параметры известны.

3. Твердое тело, движущееся в безграничном объеме идеальной жидкости, подвержено действию так называемых инерционных гидродинамических сил. Рассмотрим гидродинамические силы, действующие на маятник в случае, когда он находится в ограниченном подвижном объеме жидкости.

Предположим, что полость находится вблизи поверхности Земли и силу тяготения можно приближенно считать равной силе тяжести. Если ось O_1z_1 направлена вертикально вверх, то (g — ускорение силы тяжести):

$$j_y=-g\sin\vartheta,\quad j_z=-g\cos\vartheta \qquad (3.1)$$

Рассмотрим неподвижную полость. В этом случае $\vartheta=\vartheta^\cdot=\vartheta^{\cdot\cdot}\equiv 0$ и $w_y=w_z\equiv 0$. Уравнение колебаний маятника принимает вид

$$(\theta_{11}+\lambda)\alpha^{\cdot\cdot}=-{}^1/_2\alpha^{\cdot 2}\partial\lambda/\partial\alpha+(ml_z-m^0r_z)g\sin\alpha \qquad (3.2)$$

и отличается от известного [10] уравнения колебаний маятника в безграничном объеме жидкости слагаемым

$$I_0=-{}^1/_2\alpha^{\cdot 2}\partial\lambda/\partial\alpha \qquad (3.3)$$

Появление этого слагаемого обусловлено наличием поверхности S и, как следствие, зависимостью величины λ от α. Из физических соображений следует, что при удалении поверхности S от маятника ее влияние на движение маятника и жидкости уменьшается. В пределе, когда поверхность S удалена в бесконечность, ее форма не влияет на движение жидкости, следовательно, параметр λ не зависит от α и $I_0=0$. В этом случае уравнение (3.2) совпадает с известным уравнением. Таким образом, в случае безграничной жидкости параметр λ является присоединенным моментом инерции жидкости. В ограниченном объеме жидкости параметр λ, который и в этом случае естественно назвать присоединенным моментом инерции, становится функцией положения тела.

Пусть теперь полость совершает поступательное движение, при котором $\vartheta=\dot\vartheta=\ddot\vartheta=0$, $w_y\neq0$, $w_z\neq0$. В этом случае уравнение колебаний маятника имеет вид $(\theta_{11}+\lambda)\ddot\alpha=-{}^1/_2\dot\alpha^2\partial\lambda/\partial\alpha+(ml_z-m^0r_z)\,[(g+w_z)\sin\alpha+w_y\cos\alpha]$.

Отсюда видно, что при поступательном движении полости к моментам гидродинамических сил, действующих на маятник в неподвижной полости, добавляется момент

$$I_1=-m^0r_z(w_z\sin\alpha+w_y\cos\alpha) \tag{3.4}$$

который, как и момент гидростатической силы Архимеда, выражается через массу вытесненной маятником жидкости m^0. Его можно классифицировать как обобщенную гидродинамическую силу инерции поступательного движения. Силы такой же природы рассматривались в [11] при горизонтальных ускорениях сосуда, содержащего жидкость и погруженное в нее тело.

Рассмотрим вращение полости в горизонтальной плоскости. В этом случае плоскость Oyz совпадает с горизонтальной плоскостью и, следовательно, $j_y=j_z=0$. Пусть вращение полости происходит вокруг оси, проходящей через точку O_1. Тогда проекции ускорения точки подвеса O на оси y, z будут определяться соотношениями

$$w_y=R\ddot\vartheta,\quad w_z=R\dot\vartheta^2 \tag{3.5}$$

в которых R — расстояние от точки O_1 до точки подвеса O. При равномерном вращении полости $\dot\vartheta=\mathrm{const}$ и уравнение колебаний маятника (2.6) принимает вид

$$(\theta_{11}+\lambda)\ddot\alpha=-{}^1/_2\dot\alpha^2\partial\lambda/\partial\alpha+[(ml_z-m^0r_z)R\sin\alpha+{}^1/_2\partial\gamma/\partial\alpha]\dot\vartheta^2 \tag{3.6}$$

В этом случае кроме уже отмеченных сил проявляется сила (обобщенная) гидродинамического происхождения

$$I_2={}^1/_2\dot\vartheta^2\partial\gamma/\partial\alpha \tag{3.7}$$

которая, с одной стороны, обусловлена зависимостью $\gamma=\gamma(\alpha)$, а с другой — угловым движением полости. Обобщенную силу I_2, следуя [9], естественно назвать центробежной силой инерции.

Если полость вращается неравномерно, т. е. $\dot\vartheta\neq\mathrm{const}$, уравнение движения маятника в горизонтальной плоскости при вращении полости в этой же плоскости имеет, очевидно, вид

$$\begin{gathered}(\theta_{11}+\lambda)\ddot\alpha=-{}^1/_2\dot\alpha^2\partial\lambda/\partial\alpha+(ml_z-m^0r_z)R(\ddot\vartheta\cos\alpha+\\+\dot\vartheta^2\sin\alpha)+{}^1/_2\dot\vartheta^2\partial\gamma/\partial\alpha-(\theta_{11}+\mu)\ddot\vartheta\end{gathered} \tag{3.8}$$

Сила гидродинамического происхождения, которая добавляется к ранее рассмотренным силам и определяется по формуле

$$I_3=-\mu\ddot\vartheta \tag{3.9}$$

обусловлена угловым ускорением полости и может быть названа обобщенной вращательной силой инерции.

Таким образом, на физический маятник, размещенный в подвижной полости, со стороны жидкости действуют кроме обычных гидростатической и инерционной сил силы инерции поступательного движения, центробежные и вращательные силы инерции.

4. Пусть точка O_1 находится в центре Земли, а ось O_1z_1 совпадает с осью Земли. Кроме того, точка подвеса маятника движется в плоскости $O_1y_1z_1$ по окружности радиуса R с центром в точке O_1. В этом случае имеют место соотношения (ось Oz все время проходит через центр Земли):

$$x_0=0,\ y_0=R\sin\vartheta,\ z_0=-R\cos\vartheta,\ \vartheta\neq0$$
$$w_y=R\vartheta^{\cdot\cdot},\ w_z=R\vartheta^{\cdot 2},\ j_y=0,\ j_z=j. \tag{4.1}$$

Уравнение движения маятника (2.6) с учетом соотношений (4.1) представимо в виде

$$(\theta_{11}+\lambda)\alpha^{\cdot\cdot}=-{}^1/_2\alpha^{\cdot 2}\partial\lambda/\partial\alpha+(ml_z-m^0r_z)[R\vartheta^{\cdot\cdot}\cos\alpha+$$
$$+(R\vartheta^{\cdot 2}-j)\sin\alpha]+{}^1/_2\vartheta^{\cdot 2}\partial\gamma/\partial\alpha-(\theta_{11}+\mu)\vartheta^{\cdot\cdot} \tag{4.2}$$

Рассмотрим условия, которые должны быть удовлетворены, чтобы при произвольном движении полости по закону (4.1) ось $O\zeta$ маятника все время проходила через центр Земли O_1. Такое движение маятника соответствует решению уравнения (4.2) вида

$$\alpha=\pi n\quad(n=0,\ \pm1,\ldots) \tag{4.3}$$

которое возможно, если

$$\pm R(ml_z-m^0r_z)=\theta_{11}+\mu,\ \partial\gamma/\partial\alpha=0 \tag{4.4}$$

Первое из условий (4.4) обобщает известное соотношение для маятника М. Шулера [8] на случай физического маятника, погруженного в жидкость. Оно может быть удовлетворено при соответствующем подборе величин m^0, m, l_z, r_z. Второе из условий (4.4) можно удовлетворить, если подолжным образом выбрать форму полости. Например, в случае, когда полость имеет форму сферы, а точка подвеса маятника совпадает с центром сферы, условие $\partial\gamma/\partial\alpha=0$ выполняется. Покажем это.

Если S — сфера и точка подвеса O совпадает с центром сферы, то на поверхности S имеем $y\nu_z-z\nu_y=0$. Следовательно, граничные условия (1.2) для функций Ω и Ψ совпадут. В этом случае $\Omega=\Psi$ и из (1.7) следует, что параметр γ определяется соотношением

$$\gamma=\rho\int_\Sigma\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}dS \tag{4.5}$$

В интеграле (4.5) подынтегральные функции определены в точках поверхности S, координаты которых задаются в неподвижной относительно полости системе координат $Oxyz$. Перейдем в (4.5) к координатам ξ, η, ζ по формуле

$$\mathbf{x}=A\boldsymbol{\xi},\ \mathbf{x}=\|x,\ y,\ z\|^T,\ \boldsymbol{\xi}=\|\xi,\ \eta,\ \zeta\|^T \tag{4.6}$$

в которой A — матрица направляющих косинусов между осями x, y, z и ξ, η, ζ. Относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$ поверхность Σ не движется, т. е. в этой системе координат поверхность интегрирования не будет зависеть от α. Обозначим через $\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ функцию $\Psi(x,\ y,\ z)$ после замены (4.6). Тогда из линейности замены переменных (4.6) и ортогональности матрицы A следует, что функция $\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию

$$\partial\varphi/\partial\nu|_\Sigma=\eta\nu_\zeta-\zeta\nu_\eta=\partial\Psi/\partial\nu|_\Sigma \tag{4.7}$$

в котором ν_η, ν_ζ — проекции орта нормали $\boldsymbol{\nu}$ на оси η, ζ. Поскольку граничное условие (4.7) от α не зависит, функция $\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ также не зависит от α. Учитывая выражение (4.7) в формуле (4.5), получаем соотношение

$$\gamma=\rho\int_\Sigma\varphi(\xi,\eta,\zeta)(\eta\nu_\zeta-\zeta\nu_\eta)dS \tag{4.8}$$

в котором ни поверхность интегрирования Σ, ни подынтегральные функции не зависят от α. Следовательно, $\partial\gamma/\partial\alpha=0$.

Таким образом, маятник, размещенный в сферической полости с жидкостью, будет невозмущаемым, если для него выполняется первое из условий (4.4) и его точка подвеса совпадает с центром сферы. Расчет гидродинамического параметра μ, входящего в условие невозмущаемости, связан с решением соответствующей гидродинамической задачи. Для случая цилиндра в сфере такая задача решалась вариационным методом в работе [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
2. *Городецкий О. М.* Исследование возмущающих моментов вязкого трения в подвесе сферического поплавкового гироскопа.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4, с. 20–26.
3. *Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А., Баймухаметов А. А.* Вращение динамически симметричного тела и шара, разделенных сферическим слоем вязкой жидкости.– Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1978, № 5, с. 45–51.
4. *Андрейченко К. П.* О возмущающих моментах в поплавковом гироскопе на вибрирующем основании.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 11–17.
5. *Валько А. Д., Озерская З. И.* К определению величины поддерживающей силы в поплавковых приборах при колебательном движении поплавка.– Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 19–28.
6. *Микишев Г. Н., Столбецов В. И.* О колебаниях тела в ограниченном объеме вязкой жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 1, с. 22–30.
7. *Луковский И. А., Золотенко Г. Ф.* К теории движения твердого тела с полостями, содержащими жидкость и колеблющиеся в ней массы маятникового типа.– В кн.: Динамика и устойчивость механических систем. Киев: Изд-е Ин-та математики АН УССР, 1980, с. 30–49.
8. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
9. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
10. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости.– В кн.: Собр. соч. Т. I. М.– Л.: Гостехиздат, 1948, с. 312–336.
11. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М.: Изд-во Иностр. лит., 1949. 520 с.
12. *Луковский И. А., Золотенко Г. Ф.* К расчету гидродинамических сил, действующих на цилиндр при его колебаниях в сфере, целиком заполненной жидкостью.– В кн.: Прикладные методы исследования физико-механических процессов. Киев: Изд-е Ин-та математики АН УССР, 1979, с. 76–87.

Киев

Поступила в редакцию
21.XII.1984