

О ЗОНЕ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПРИ РАССЛОЕНИИ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

ЗАХАРОВ В. В., НИКИТИН Л. В.

В задачах теории упругости о вдавлении жесткого сцепленного со средой штампа и расслоении разнородных тел в точках смены типа граничных условий возникают осциллирующие особенности. При вдавлении жесткого штампа с горизонтальным основанием в полуплоскость вблизи угла штампа граничные условия при $y=0$ запишутся следующим образом

$$u=0, v=v_0, x>0; \sigma_y=\tau_{xy}=0, x<0 \quad (1)$$

Здесь ось x направлена по границе полуплоскости, ось y — по нормали к ней, начало координат совмещено с углом штампа, u и v — перемещения по осям x и y соответственно. Из анализа решения этой задачи [1, 2] следует, что нормальное напряжение под штампом вблизи его угла таково

$$\sigma_y \cong Ax^{-1/2} \cos(\beta \ln x) + Bx^{-1/2} \sin(\beta \ln x) \quad (2)$$

где $\beta = \ln \kappa / 2\pi$, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ — для плоского напряженного состояния, $3-4\nu$ — для плоской деформации. Из (2) следует, что напряжение под штампом бесконечное число раз меняет знак. Это имеет место лишь в непосредственной близости от углов штампа, где «полученное решение вообще не может выражать действительное состояние тела из-за отступлений от закона Гука» [3, с. 417]. Независимо от этого факт существования растягивающих напряжений под штампом указывает на то, что граничные условия (1) не вполне адекватно отражают реальную картину взаимодействия штампа с упругой средой. Они были бы оправданными, если бы штамп был приклеен к среде. В [4, 5] для описания вдавления штампа, не сцепленного со средой, была введена зона проскальзывания, причем в [4] в зоне проскальзывания ($0 < x < x_1$) учитывалось наличие сухого трения (f — коэффициент трения). В этом случае граничные условия будут следующими

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, x < 0 \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = -f\sigma_y, v = v_0, 0 < x < x_1$$

$$u = u_0, v = v_0, x > x_1$$

Контактное напряжение вблизи угла штампа запишется так:

$$\sigma_y \sim x^{-1/2-\alpha}, \quad \alpha = 1/\pi \operatorname{arctg}[f(\kappa-1)/(\kappa+1)] \quad (4)$$

Вблизи точки $x=x_1$ напряжение на контакте будет

$$\sigma_y \sim |x-x_1|^{-1/2+\alpha} \quad (5)$$

Как видно из (4) и (5), введение зоны проскальзывания устранило осциллирующую особенность.

При расслоении разнородных тел по границе раздела, совпадающей с осью x , граничные условия вблизи точки расслоения $x=0$ обычно принимают в виде [6-8]:

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = 0, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad x < 0$$

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \quad x > 0 \quad (6)$$

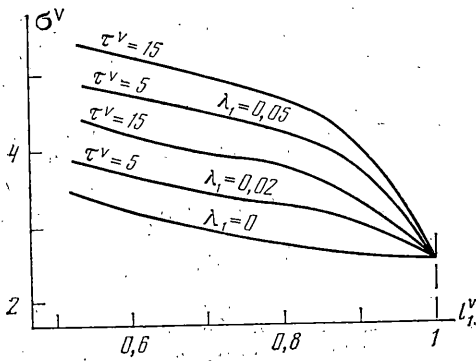
где индексами плюс и минус отмечены величины, относящиеся к материалам, находящимся по разные стороны границы раздела. Эти граничные условия приводят к осциллирующей особенности. Анализ показывает, что недостаток решения, отвечающего граничным условиям (6), в том, что противоположные берега трещины взаимно перекрываются [7, 8]. В трещине отрыва зона перехлеста оказывается малой по сравнению с длиной трещины, и, ссылаясь на это обстоятельство, этому дефекту решения не придается большого значения. Однако для трещин сдвигового типа зона перехлеста становится сопоставимой с длиной трещины [9]. Трудности в этом случае вследствие неправильного выбора схемы решения. Оказывается, что вблизи точки расслоения разнородных материалов раскрытия трещины, вообще говоря, не происходит, а возникает зона контактного проскальзывания [10]. Граничные условия в случае отсутствия трения в зоне проскальзывания запишутся в виде

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad -\infty < x < \infty; \quad \sigma_y^+ = 0, \quad x < x^*$$

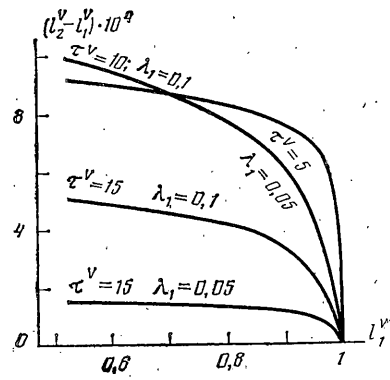
$$\tau_{xy}^+ = 0, \quad x < 0; \quad v^+ = v^-, \quad x > x^*; \quad u^+ = u^-, \quad x > 0 \quad (7)$$

где $x=x^*$ — точка, в которой начинается раскрытие трещины. При таком выборе схемы решения осциллирующая особенность устраняется. Очевидно, что идея введения контактного проскальзывания при расслоении разнородных тел по существу та же, что и в [4, 5].

В зоне контактного проскальзывания возникают большие сжимающие напряжения [10], что указывает на необходимость учета контактного трения. В [11] учиты-



Фиг. 1



Фиг. 2

валось сухое трение в зоне проскальзывания. В этом случае напряжения на продолжении трещины $x > 0$ таковы (μ — модуль сдвига):

$$\sigma_y = K_{II} x^{-\lambda}, \quad \tau_{xy} = K_{III} x^{-\lambda} \quad (8)$$

$$\lambda = 1/\pi \operatorname{arctg} \{ [\mu^-(x^+ + 1) + \mu^+(x^- + 1)] / f [\mu^-(x^+ - 1) - \mu^+(x^- - 1)] \} \quad (9)$$

Величины K_{II} и K_{III} представляют собой, пользуясь терминологией механики разрушения, коэффициенты интенсивности напряжений на отрыв и сдвиг. Как видно из (8), порядок особенности λ зависит от свойств материала и коэффициента сухого трения f . При $f=0$ получим $\lambda=1/2$. Оказывается, что учет сухого трения затрудняет применение традиционных критериев разрушения. Энергетический критерий Гриффитса при $\lambda \neq 1/2$ неприменим. Аналогично критерию Ирвина [12] можно принять, что разрушение происходит, когда коэффициент интенсивности K_I достигает характерного для материала критического значения K_{Ic} . Однако такой критерий мало пригоден для сравнительного анализа при различных коэффициентах сухого трения, поскольку его размерность зависит от f . Этого можно избежать, если учесть, что закон сухого трения неприменим для чрезмерно больших напряжений и ввести в зоне проскальзывания участок, где касательные напряжения равны предельному значению силы трения τ^* , определяемому пластическими свойствами материала, что приводит к граничным условиям

$$\begin{aligned} \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad -\infty < x < \infty; \quad \sigma_y^+ = \tau_{xy}^+ = 0, \quad x < x^* \\ \nu^+ = \nu^-, \quad x > x^*; \quad \tau_{xy}^+ = -f \sigma_y^+, \quad x^* < x < x^{**} \\ \tau_{xy}^+ = \tau^*, \quad x^{**} < x < 0; \quad u^+ = u^-, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

где $x=x^*$ — точка раздела участков с различными законами трения. Можно показать, что напряжения на продолжении трещины $x > 0$ запишутся следующим образом

$$\sigma_y = K_I x^{-1/2}, \quad \tau_{xy} = K_{II} x^{-1/2} \quad (11)$$

где K_I , K_{II} — обычные коэффициенты интенсивности напряжений. Выбор граничных условий (10) представляется более физически обоснованным и, как следует из (11), позволяет восстановить особенность в $1/2$, необходимую для применения традиционных критериев разрушения.

При этом следует различать отрывное разрушение, имеющее место в точке $x=x^*$; и сдвиговое при $x=0$. Вообще материал может быть разрушен на сдвиг так, что появляется зона проскальзывания, и продолжать оказывать сопротивление отрыву. Формально материал может быть разрушен на отрыв, но испытывать сопротивление разрушению сдвигом. Но в отличие от первого случая представить реальную модель такого «полуразрушения» сложно. Как отрывное, так и сдвиговое разрушение можно описывать при помощи концепции критического коэффициента интенсивности напряжений Ирвина. В точке $x=0$ нужно ставить условие $K_{II} = K_{IIc}$, а в точке $x=x^*$ — условие $K_I = K_{Ic}$. В большинстве случаев моделирования реального разрушения следует считать, что если материал претерпел разрушение одного вида, то он не будет оказывать сопротивление другому виду разрушения.

Предложенная схема учета контактного трения может быть использована при изучении в рамках плоской задачи процесса отслоения упругой матрицы от короткого тонкого включения при растяжении на бесконечности вдоль оси включения [13]. При таком приложении нагрузки на границе между включением и матрицей не возникает открытой трещины. Так как материал армирующего включения обычно значительно более жесткий, чем материал матрицы, включение примем абсолютно жестким. Пусть интенсивность приложенной нагрузки σ_∞ , длина включения $2a$, длина его неотслоенной части $2l_1$, величина зоны предельного трения $(l_2 - l_1)$. Запишем граничные условия

$$\nu = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad u = 0, \quad |x| < l_1; \quad \tau_{xy} = \tau^*, \quad l_1 < x < l_2$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\tau^*, \quad -l_2 < x < -l_1; \quad \tau_{xy} = -f\sigma_y, \quad l_2 < x < a \\ \tau_{xy} &= f\sigma_y, \quad -a < x < -l_2; \quad \tau_{xy} = 0, \quad |x| > a \\ \sigma_x &= \sigma_\infty, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь и дальше индекс плюс, характеризующий принадлежность величин материалу матрицы, опущен. Решение плоской задачи теории упругости дается формулами Колосова-Мусхелишвили, которые в данном случае удобно записать так:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_y + i\tau_{xy} = 2 \operatorname{Re} \Phi(z) + (\bar{z} - z) \Phi'(z) + \Omega(z) \\ 2\mu(\partial u / \partial x + i\partial v / \partial x) &= \kappa \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + (\bar{z} - z) \overline{\Phi'(z)} - \overline{\Omega(z)} \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ — аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$. Подстановкой (13) в (12) задача сводится к задаче Гильберта-Римана [3] для верхней полуплоскости относительно функции $\Phi(z)$, решение которой будет

$$\Phi(z) = (z^2 - l_1^2)^{-1/2} \left(\frac{z^2 - l_2^2}{z^2 - a^2} \right)^\alpha \{ \sigma_\infty [I_1(z) + I_3(z) + i/4z] + \tau^* I_2(z) \} \quad (14)$$

где α определено и совпадает с $1/2 - \lambda$ при $\mu^- = \infty$:

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \frac{\kappa - 1}{8\kappa\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \left(\frac{a^2 - t^2}{l_2^2 - t^2} \right)^\alpha \frac{(l_1^2 - t^2)^{1/2} dt}{t - z} \\ I_2(z) &= \frac{1}{\pi(\kappa + 1)} \int_{l_1}^{l_2} \left(\frac{a^2 - t^2}{l_2^2 - t^2} \right)^\alpha \frac{(t^2 - l_1^2)^{1/2} z dt}{t^2 - z^2} \\ I_3(z) &= \frac{\sin \alpha\pi}{4\pi} \int_{l_2}^a \left(\frac{a^2 - t^2}{t^2 - l_2^2} \right)^\alpha \frac{(t^2 - l_1^2)^{1/2} z dt}{t^2 - z^2} \end{aligned}$$

Потенциалы $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ линейно связаны

$$\Omega(z) + (\kappa + 1)\Phi(z) = 1/4(\kappa - 1)\sigma_\infty \quad (15)$$

Подстановкой (14) и (15) в (13) можно определить коэффициенты интенсивности K_I и K_{II} как функции параметров задачи l_1, l_2, σ_∞ . Можно показать, что $K_I < 0$ и разрушение происходит вследствие сдвига. Примем критерий разрушения типа Ирвина [12]:

$$K_{II}(l_1, l_2, \sigma_\infty) = K_{IIc} \quad (16)$$

где K_{IIc} — константа, характеризующая адгезионную прочность на сдвиг. Заметим, что условию (16) можно дать энергетическое обоснование и связать K_{IIc} с удельной поверхностной энергией отслаивания γ [14]:

$$K_{IIc}^2 = \mu\gamma(\kappa + 1) / (\pi\kappa) \quad (17)$$

Учитывая, что касательные напряжения, вычисленные при помощи закона сухого трения, должны быть больше величины τ^* в зоне предельного трения, получим условие

$$|\sigma_y(l_1, l_2 - 0, \sigma_\infty)| \geq \tau^*/f, \quad |\sigma_y(l_1, l_2 + 0, \sigma_\infty)| \leq \tau^*/f \quad (18)$$

На основании условий (16), (18) можно определить параметры l_1 и l_2 по заданной величине интенсивности нагрузки σ_∞ . На фиг. 1, 2 представлены графики зависимостей интенсивности нагрузки σ_∞ и величины зоны предельного трения ($l_2 - l_1$) от длины неотслоенной части включения l_1 в безразмерных переменных

$$\sigma_\infty^V = \sigma_\infty \sqrt{a}/K_{IIc}, \quad \tau^V = \tau^* \sqrt{a}/K_{IIc}, \quad l_1^V = l_1/a, \quad l_2^V = l_2/a$$

Из графиков видно, что распространение трещины расслоения является устойчивым, т. е. для увеличения длины дефекта ($a - l_1$) требуется дополнительное увеличение интенсивности нагрузки σ_∞ (фиг. 1); величина зоны предельного трения мала (фиг. 2). Можно также показать [13], что введение такой зоны не оказывает заметного влияния на величины напряжений вдали от точки разрушения. Однако именно учет этой зоны позволяет исследовать влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов в рамках механики разрушения. Заметим, что вблизи края

волокна $x=a$ также имеется особенность напряжений. Однако разрушения в этой точке не происходит, поэтому введение здесь зоны предельного трения лишь осложнит решение задачи и не приведет к существенному изменению результата.

Таким образом, принятая схема решения с граничными условиями (10) позволяет изучить процесс расслоения разнородных материалов в рамках механики разрушения и учесть при этом близкое к реальности взаимодействие трущихся поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мухелишвили Н. И.* Решение основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости.— Докл. АН СССР, 1935, т. 3, № 2, с. 51–54.
2. *Абрамов В. М.* Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения.— Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 4, с. 173–178.
3. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
4. *Галин Л. А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления.— ПММ, 1945, т. 9, вып. 5, с. 413–424.
5. *Фалькович С. В.* О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения.— ПММ, 1945, т. 9, вып. 5, с. 425–432.
6. *Williams M. L.* The stresses around a fault or crack in dissimilar media.— Bull. Seismol. Soc. America, 1959, v. 49, N 2, p. 199–204.
7. *Matyshev B. M., Salganik R. L.* The strength of adhesive joints using the theory of fracture.— Intern: J. Fract. Mech., 1965, v. 1, N 2, p. 114–128.
8. *England A. H.* A crack between dissimilar media.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1965, v. 32, N 2, p. 400–402.
9. *Comninou M.* The interface crack in a shear field.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1978, v. 45, N 2, p. 287–290.
10. *Comninou M.* The interface crack.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, v. 44, N 4, p. 631–636.
11. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, v. 44, N 4, p. 780–781.
12. *Irwin G. R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.— J. Appl. Mech., 1957, v. 24, N 3, p. 361–364.
13. *Захаров В. В., Никитин Л. В.* Влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов.— Механика композит. материалов, 1983, № 1, с. 20–25.
14. *Никитин Л. В., Туманов А. Н.* Анализ локального разрушения в композите.— Механика композит. материалов, 1981, № 4, с. 595–601.

Москва

Поступила в редакцию
25.II.1985