

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ

КИТ Г. С., ЛАУШНИК И. П., ХАЙ М. В.

Определению напряжений в полупространстве с трещинами посвящены работы [1-9], где рассматривались случаи определенной ориентации трещины по отношению к границе полупространства. Публикуемая работа посвящена рассмотрению произвольного расположения трещин. Исходные задачи сведены к соответствующей системе интегральных уравнений для определения функций, характеризующих смещение противоположных точек поверхностей трещин.

1. Рассмотрим упругое изотропное полупространство с N плоскими не выходящими на его границу трещинами, поверхности S_n ($n=1, N$) которых находятся под действием нормальных N_{3n} и касательных N_{1n}, N_{2n} внешних усилий. На границе полупространства заданы усилия T_s , $s=1, 2, 3$ (T_3 — нормальные, T_1, T_2 — касательные).

Выберем базисную декартову систему координат $Ox_{10}x_{20}x_{30}$ так, что полупространству соответствуют значения $x_{30} \leq 0$, а также N локальных систем координат $O_n x_{1n} x_{2n} x_{3n}$ с началами в областях S_n ($n=1, N$) таким образом, чтобы противоположным поверхностям S_n^{\pm} трещин соответствовали значения $x_{3n} = \pm 0$. Обозначим через d_{kn} расстояние между точками O_n и O_k , через d_{k0} — расстояние между точками O_k и O . Направляющие косинусы векторов $O_k O_n$ и $O_k O$ в k -й системе координат обозначим e_{jkn} и e_{jko} , а направляющие косинусы вектора OO_k в базисной системе координат — e_{jok} ($j=1, 2, 3$). Зададим также направляющие косинусы координатных осей табл. 1 и 2.

Таблица 1

	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}
x_{10}	l_{10n}	l_{20n}	l_{30n}
x_{20}	m_{10n}	m_{20n}	m_{30n}
x_{30}	n_{10n}	n_{20n}	n_{30n}

Таблица 2

	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}
x_{1k}	l_{1kn}	l_{2kn}	l_{3kn}
x_{2k}	m_{1kn}	m_{2kn}	m_{3kn}
x_{3k}	n_{1kn}	n_{2kn}	n_{3kn}

Решение задачи теории упругости, позволяющее удовлетворить условиям при $x_{30}=0$, представим через произвольные гармонические функции $\psi_{j0}(x_0^*)$:

$$u_{j0}(x_0^*) = 4(1-\nu) [\psi_{j0} - \delta_{j3}(1-2\nu)M_0] + \frac{\partial}{\partial x_{j0}} \left\{ x_{30}\Phi_0 + \int_{x_{30}}^{-\infty} [(1-2\nu)\psi_{j0} + 4\nu(1-\nu)M_0] dx_{30} \right\} \quad (j=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$\frac{\sigma_{j30}}{2G} = [2(1-\nu) - \delta_{j3}(1-2\nu)] \frac{\partial \psi_{j0}}{\partial x_{30}} + x_{30} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_{j0} \partial x_{30}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{120}}{2G} &= 2(1-\nu) \left(\frac{\partial \psi_{10}}{\partial x_{20}} + \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x_{10}} \right) + x_{30} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_{10} \partial x_{20}} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_{10} \partial x_{20}} \left[4\nu(1-\nu) \int_{x_{30}}^{-\infty} M_0 dx_{30} + (1-2\nu) \int_{x_{30}}^{-\infty} \psi_{30} dx_{30} \right] \\ \frac{\sigma_{i10}}{2G} &= 4(1-\nu) \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial x_{10}} + x_{30} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_{i0}^2} - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_{30}} [2(1-\nu)M_0 - \psi_{30}] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_{i0}^2} \left[4\nu(1-\nu) \int_{x_{30}}^{-\infty} M_0 dx_{30} + (1-2\nu) \int_{x_{30}}^{-\infty} \psi_{30} dx_{30} \right] \quad (i=1, 2) \\ M_0 &= \int_{x_{30}}^{-\infty} \left(\frac{\partial \psi_{10}}{\partial x_{10}} + \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x_{20}} \right) dx_{30}, \quad \Phi_0 = 2(1-\nu)M_0 - \psi_{30} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ν и G — упругие постоянные материала, δ_{ij} — символ Кронекера.

Из (1.2) следует, что решение задачи для полупространства при заданных на его границе усилиях можно свести к интегральным уравнениям, если функции ψ_{j0} выбрать в виде потенциалов

$$\psi_{j0}(x_0^*) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{j0}(\xi)}{|x_0^* - \xi|} d\xi_1, d\xi_2 \quad (1.3)$$

где неизвестные плотности $\alpha_{j0}(\xi)$ характеризуют напряжения на границе полупространства.

В силу (1.2), (1.3) нормальные N_{30n} и касательные N_{10n} , N_{20n} усилия на месте расположения n -й трещины, выраженные через функции α_{j0} , определяются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{N_{j0n}}{2G} &= \sum_{s=1}^3 \Psi_{js0n}[\psi_{s0}(x_{0n}^*)], \quad x_{0n}^* \in S_n \\ \Psi_{js0n} &= [2(1-\nu) - \delta_{s3}(1-2\nu)] \left[K_{js0n} + x_{30n} \frac{\partial}{\partial x_{s0n}} \int_{x_{30n}}^{-\infty} L_{j0n} dx_{30n} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x_{s0n}} \int_{x_{30n}}^{-\infty} \int_{x_{30n}}^{-\infty} P_{js0n} dx_{30n} dx_{30n} \right] \quad (s=1, 2, 3) \\ K_{js0n} &= \sum_{p=1}^3 L_{js0n}^{(p)} \frac{\partial}{\partial x_{p0n}}, \quad P_{js0n} = \sum_{p=1}^2 M_{js0n}^{(p)} D_{pp0n} + M_{js0n}^{(3)} D_{120n} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} L_{jmp} &= l_{j3mp} D_{11mp} + m_{j3mp} D_{22mp} + n_{j3mp} D_{33mp} + l_{j3mp}^* D_{12mp} + \\ &+ m_{j3mp}^* D_{23mp} + n_{j3mp}^* D_{31mp}, \quad D_{ijmp} = \partial^2 / (\partial x_{imp} \partial x_{jmp}) \end{aligned}$$

Здесь x_{0n}^* — точка n -й трещины с координатами x_{10n} , x_{20n} , x_{30n} в базисной системе координат, причем между x_{j0n} и координатами x_{jn} имеет место зависимость

$$\begin{aligned} x_{1mp} &= d_{pm} e_{1mp} + \sum_{j=1}^3 l_{jmp} x_{jp}, \quad x_{2mp} = d_{pm} e_{2mp} + \sum_{j=1}^3 m_{jmp} x_{jp} \\ x_{3mp} &= d_{pm} e_{3mp} + \sum_{j=1}^3 n_{jmp} x_{jp} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $L_{js0n}^{(p)}$, $M_{js0n}^{(p)}$, l_{j30n} , m_{j30n} , n_{j30n} , l_{j30n}^* , m_{j30n}^* ,

n_{j30n}^* — постоянные величины, зависящие от упругих постоянных материала и ориентации трещин в полупространстве

$$\begin{aligned}
 L_{j30n}^{(1)} &= 2\delta_{s1}[l_{j30n}(1+\nu) + \nu m_{j30n}] + \delta_{s2}l_{j30n}^* \\
 L_{j30n}^{(2)} &= \delta_{s1}l_{j30n}^* + 2\delta_{s2}[\nu l_{j30n} + m_{j30n}(1+\nu)] \\
 L_{j30n}^{(3)} &= \delta_{s1}n_{j30n}^* + \delta_{s2}m_{j30n}^* + \delta_{s3}[2\nu(l_{j30n} + m_{j30n}) + n_{j30n}] \\
 M_{j30n}^{(1)} &= [2\nu(\delta_{s1} + \delta_{s2}) - \delta_{s3}(1-2\nu)]l_{j30n} \\
 M_{j30n}^{(2)} &= [2\nu(\delta_{s1} + \delta_{s2}) - \delta_{s3}(1-2\nu)]m_{j30n} \\
 M_{j30n}^{(3)} &= [2\nu(\delta_{s1} + \delta_{s2}) - \delta_{s3}(1-2\nu)]l_{j30n}^*, \quad l_{j30n} = l_{j0n}l_{30n} \\
 m_{j30n} &= m_{j0n}m_{30n}, \quad n_{j30n} = n_{j0n}n_{30n}, \quad l_{j30n}^* = l_{j0n}m_{30n} + m_{j0n}l_{30n} \\
 m_{j30n}^* &= m_{j0n}n_{30n} + m_{30n}n_{j0n}, \quad n_{j30n}^* = l_{j0n}n_{30n} + n_{j0n}l_{30n}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

где l_{j0n} , m_{j0n} , n_{j0n} — направляющие косинусы (табл. 1).

Усилия в полупространстве, вызванные скачками α_{jk} смещений противоположных поверхностей k -й трещины, определим используя методику [10]. Для усилий T_{jko} (T_{3ko} — нормальные, T_{1ko} и T_{2ko} — касательные) на площадке, параллельной границе полупространства, имеем

$$T_{jko} = \sum_{s=1}^3 \chi_{jsko} \iint_{S_k} \frac{\alpha_{sk}(\xi)}{|x_{ko}^* - \xi|} d_k S \tag{1.7}$$

Усилия T_{jkn} на месте расположения n -й трещины, обусловленные смещениями α_{jk} на k -й трещине, также определяются через α_{jk} (χ_{jsho} и χ_{jshn} — операторы):

$$T_{jkn} = \sum_{s=1}^3 \chi_{jshn} \iint_{S_k} \frac{\alpha_{sk}(\xi)}{|x_{kn}^* - \xi|} d_k S \tag{1.8}$$

$$\chi_{jshp} \left(\frac{1}{|x_{hp}^* - \xi|} \right) = \left(K_{jshp} - x_{3hp} \frac{\partial}{\partial x_{shp}} L_{jhp} \right) \left(\frac{1}{|x_{hp}^* - \xi|} \right) \tag{1.9}$$

Здесь индекс p принимает значение 0 или n ; x_{hp}^* — точки с координатами $(x_{1hp}$, x_{2hp} , $x_{3hp})$ в k -й локальной системе координат. Координаты x_{jhp} определяются через x_{jp} по формулам (1.5), в которых следует положить

$$\begin{aligned}
 l_{1k0} &= l_{10k}, \quad l_{2k0} = m_{10k}, \quad l_{3k0} = n_{10k}, \quad m_{1k0} = l_{20k} \\
 m_{2k0} &= m_{20k}, \quad m_{3k0} = n_{20k}, \quad n_{1k0} = l_{30k}, \quad n_{2k0} = m_{30k}, \quad n_{3k0} = n_{30k}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Дифференциальные операторы K_{jshp} имеют вид

$$K_{jshp} = K_{1jshp} D_{11hp} + K_{2jshp} D_{22hp} + K_{3jshp} D_{33hp} + K_{1jshp}^* D_{12hp} + K_{2jshp}^* D_{23hp} + K_{3jshp}^* D_{31hp}$$

$$K_{1jshp} = \nu \delta_{2s} m_{j3kp}^* - (1-2\nu) \delta_{3s} l_{j3kp}, \quad K_{2jshp} = \nu \delta_{1s} n_{j3kp}^* - (1-2\nu) \delta_{3s} m_{j3kp}$$

$$K_{3jshp} = \delta_{1s} n_{j3kp}^* + \delta_{2s} m_{j3kp}^* + \delta_{3s} [2\nu(l_{j3kp} + m_{j3kp}) + n_{j3kp}]$$

$$K_{1jshp}^* = -\nu(\delta_{1s} m_{j3kp}^* + \delta_{2s} n_{j3kp}^*) - (1-2\nu) \delta_{3s} l_{j3kp}^*$$

$$K_{2jshp}^* = 2\delta_{2s} (\nu l_{j3kp} + m_{j3kp}) + (1-\nu) \delta_{1s} l_{j3kp}^*$$

$$K_{3jshp}^* = 2\delta_{1s} (l_{j3kp} + \nu m_{j3kp}) + (1-\nu) \delta_{2s} l_{j3kp}^* \quad (p=0, n) \tag{1.11}$$

Величины l_{j3kp} , m_{j3kp} , n_{j3kp} , l_{j3kp}^* , m_{j3kp}^* , n_{j3kp}^* выражаются через l_{jhp} , m_{jhp} , n_{jhp} формулами, аналогичными (1.6).

2. Напряжения в полупространстве, ослабленном N трещинами, равны сумме напряжений, обусловленных заданными на его границе усилиями и скачками смещений противоположных точек поверхностей каждой трещины. Эти напряжения выражаются соответственно через функции α_{j0} и α_{jh} , которые определим из условий на границе полупространства и на поверхностях трещин (требуя равенства указанных напряжений заданным усилиям).

Удовлетворяя условиям на границе полупространства, имеем

$$2\pi [2(1-\nu) - \delta_{33}(1-2\nu)] \alpha_{s0}(x_0) + \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{k=1}^N T_{sk0}(x_0) = 1/2 T_s(x_0)/G$$

$$(s=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

где $T_s(x_0)$ — заданные внешние усилия на границе полупространства, x_0 — точка с координатами x_{10}, x_{20} , O в базисной системе координат.

Удовлетворяя условиям на месте расположения n -й трещины, получаем

$$\Delta_n \int \int_{S_n} \frac{\alpha_{jn}(\xi)}{|x_n - \xi|} d_\xi S + (-1)^{j\nu} (1 - \delta_{j3}) \frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}} \int \int_{S_n} \left[\alpha_{1n}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_{2n}} - \right. \\ \left. - \alpha_{2n}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \right] \frac{d_\xi S}{|x_n - \xi|} - \sum_{k=1}^N \int \int_{S_k} \sum_{s=1}^3 \alpha_{sk}(\xi) \chi_{jskn} d_\xi S - \\ - 2(1-\nu) \sum_{s=1}^3 \Psi_{js0n} [\Psi_{s0}(x_{0n}^*)] = \frac{1-\nu}{G} N_{jn}(x_n) \quad (j=1, 2, 3), \quad x_n \in S_n, \quad n=1, \overline{N} \quad (2.2)$$

где $\Delta_n = \partial^2 / \partial x_{1n}^2 + \partial^2 / \partial x_{2n}^2$, а штрих возле знака суммы означает, что в ней опущен член с номером $k=n$; x_{0n}^* — точка n -й трещины с координатами $x_{10n}, x_{20n}, x_{30n}$ в базисной системе координат.

Таким образом, задача об определении функций α_{j0} и α_{jh} сведена к решению системы $(3N+3)$ интегральных уравнений. Если определить из (2.1) α_{j0} , подставить их в (2.2), то получим систему $3N$ интегродифференциальных уравнений для определения α_{jn} :

$$\Delta_n \int \int_{S_n} \frac{\alpha_{jn}(\xi)}{|x_n - \xi|} d_\xi S + (-1)^{j\nu} (1 - \delta_{j3}) \frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}} \int \int_{S_n} \left[\alpha_{1n}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_{2n}} - \right. \\ \left. - \alpha_{2n}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \right] \frac{d_\xi S}{|x_n - \xi|} + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^3 \int \int_{S_k} \alpha_{mk}(\xi) K_{jm}^{kn}(\xi, x_n) \quad (2.3)$$

$$d_\xi S = \frac{1-\nu}{G} [N_{jn}(x_n) + F_{j0n}(x_n)], \quad x_{3n} = 0, \quad x_n \in S_n$$

$$K_{jm}^{kn}(\xi, x_n) = (\delta_{kn} - 1) \chi_{jmk n} \left(\frac{1}{|x_{kn}^* - \xi|} \right) + \Omega_{jm}^{kn}(\xi, x_n)$$

$$F_{j0n}(x_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^3 \frac{\Psi_{js0n}}{2(1-\nu) - (1-2\nu)\delta_{33}} \left[\int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T_s(\xi)}{|x_{0n}^* - \xi|} d\xi_1 d\xi_2 \right] \quad (2.4)$$

$$\Omega_{jm}^{kn}(\xi, x_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^3 \frac{\Psi_{js0n}}{2(1-\nu) - (1-2\nu)\delta_{33}} \left[\int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x_{0n}^* - \eta|} \right.$$

$$\left. \chi_{smk0} \left(\frac{1}{|x_{k0}^*(\eta) - \xi|} \right) d\eta_1 d\eta_2 \right]$$

Здесь $x_{k_0}^*(\eta)$ — точка с координатами $(x_{1k_0}, x_{2k_0}, x_{3k_0})$, зависимость которой от η определяется формулами (1.5), если в них заменить x_{jn} на η_j .

Регулярные ядра в (2.4) содержат интегрирование по границе полупространства от известных функций. Это приводит к определенным математическим трудностям при решении интегральных уравнений (2.3), в частности при использовании метода малого параметра.

Для вычисления в (2.4) интегралов по бесконечной области интегрирования воспользуемся методикой [11]. Можно доказать соотношения

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{1}{|x_{0n}^* - \eta|} \chi_{smk_0} \left(\frac{1}{|x_{k_0}(\eta) - \xi|} \right) d\eta_1 d\eta_2 = \\ & = -2\pi \int_{x_{30n}}^{-\infty} \left[K_{smkn}^* - y_{3kn} \frac{\partial L_{skn}^*}{\partial y_{mkn}} - x_{30n} \frac{\partial^2}{\partial y_{3kn} \partial y_{mkn}} \times \right. \\ & \left. \times \left(\delta_{s1} \frac{\partial}{\partial x_{10n}} + \delta_{s2} \frac{\partial}{\partial x_{20n}} - \delta_{s3} \frac{\partial}{\partial x_{30n}} \right) \right] \left(\frac{1}{|y_{kn}^* - \xi|} \right) dx_{30n} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где K_{smkn}^* и L_{skn}^* — дифференциальные операторы, которые аналогичны K_{smkn} и L_{skn} , если в них заменить переменные x_{jkn} на y_{jkn} ; y_{kn}^* — точка с координатами $(y_{1kn}, y_{2kn}, y_{3kn})$, причем y_{jkn} определяются через координаты x_{j_0n} соотношениями

$$y_{jkn} = e_{jko} d_{k_0} + l_{j_0k} x_{1_0n} + m_{j_0k} x_{2_0n} - n_{j_0k} x_{3_0n} \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.6)$$

а x_{j_0n} определяются через x_{jn} формулами (1.5).

С использованием (2.5) уравнения (2.3) можно решать методом малого параметра. Введем в рассмотрение величину $d = \min(d_{kn}, d_{k_0})$, $k = \overline{1, N}$ и предположим, что $d > a_0$, где $a_0 = \max a_k$, a_k — диаметр области S_k . Тогда регулярные ядра $K_{jmn}^{kn}(\xi, x_n)$ уравнений (2.3) разлагаются в сходящиеся ряды

$$K_{jmn}^{kn}(\xi, x_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{K_{jmp}^{kn}(\xi, x_n)}{d^{p+3}} \quad (2.7)$$

Если представить неизвестные функции $\alpha_{jn}(\xi)$ также в виде ряда

$$\alpha_{jn}(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_{jnp}(\xi)}{d^p} \quad (2.8)$$

подставить в уравнение (2.3) и приравнять выражения при одинаковых степенях d , то получим рекуррентные системы интегральных уравнений для определения $\alpha_{jnp}(\xi)$:

$$\begin{aligned} & \Delta_n \int_{S_n} \int \frac{\alpha_{jnp}(\xi)}{|x_n - \xi|} d_\xi S + (-1)^{j\nu} (1 - \delta_{j3}) \frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}} \int_{S_n} \int \left[\alpha_{1np}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_{2n}} - \right. \\ & \left. - \alpha_{2np}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \right] \frac{d_\xi S}{|x_n - \xi|} - \sum_{h=1}^N \sum_{m=1}^3 \sum_{r=0}^{p-3} \int_{S_h} \int \alpha_{mkr}(\xi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$K_{jm(p-3-r)}^{kn}(\xi, x_n) d_\xi S = \frac{1-\nu}{G} [N_{jn}(x_n) - F_{j_0n}(x_n)] \delta_{p0}, \quad x_n \in S_n \quad (j=1, 2, 3)$$

Учитывая формулы (1.9), (2.4) и (2.5), можно показать, что $K_{jmp}^{kn}(\xi, x_n)$ — полиномиальные функции переменных ξ_1, ξ_2, x_{1n} и x_{2n} степени p .

Решая уравнения (2.9), определим $\alpha_{jn}(\xi)$, а по соответствующим формулам — напряжения в теле и коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности трещин.

3. Рассмотрим полупространство с N дискообразными трещинами, плоскости которых параллельны его границе, а центры лежат в плоскости, перпендикулярной границе. Давление в трещинах постоянно и равно N_{3n} ($N_{1n}=N_{2n}=0$), на границе нет нагрузок ($T_{j0}=0$). Коэффициенты интенсивности напряжений можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned}
 k_{1n}(\varphi_n) &= k_n \left\{ 1 - \frac{2}{3\pi} \sum_{k=1}^N \frac{N_{3k}}{N_{3n}} [S_{30}^{kn} + \frac{2}{3}(S_{31}^{kn} \cos \varphi_n + S_{32}^{kn} \sin \varphi_n)] \right\} + O(\varepsilon^5) \\
 k_{2n}(\varphi_n) &= -\frac{4k_n}{3\pi(2-\nu)} \sum_{k=1}^N \frac{N_{3k}}{N_{3n}} [S_{10}^{kn} \cos \varphi_n + S_{20}^{kn} \sin \varphi_n + \\
 &+ \frac{1}{3}(I_{11}^{kn} \cos^2 \varphi_n + I_{22}^{kn} \sin^2 \varphi_n + \frac{1}{2}(I_{21}^{kn} + I_{12}^{kn}) \sin 2\varphi_n)] + O(\varepsilon^5) \\
 k_{3n}(\varphi_n) &= \frac{4(1-\nu)k_n}{3\pi(2-\nu)} \sum_{k=1}^N \frac{N_{3k}}{N_{3n}} [S_{10}^{kn} \sin \varphi_n - S_{20}^{kn} \cos \varphi_n + \\
 &+ \frac{1}{3}(I_{12}^{kn} \sin^2 \varphi_n - I_{21}^{kn} \cos^2 \varphi_n + \frac{1}{2}(I_{11}^{kn} - I_{22}^{kn}) \sin 2\varphi_n)] + O(\varepsilon^5)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где φ_n — угловая координата точек контура n -й трещины радиуса a_n , $\varepsilon = \max a_n / \min(d_{n0}, d_{kn})$:

$$\begin{aligned}
 S_{i0}^{kn} &= \varepsilon_n^3 \nu_{kn}^3 (1 - \delta_{nk}) L_{i0}^{kn} + \varepsilon_{k0}^3 \nu_k^3 V_{i0}^{kn} \quad (i=1, 2, 3) \\
 S_{ij}^{kn} &= \varepsilon_n^4 \nu_{kn}^3 (1 - \delta_{nk}) L_{ij}^{kn} d_n / d_{kn} + \varepsilon_{k0}^3 \nu_k^3 \varepsilon_{n0} \nu_n V_{ij}^{kn} \quad (j=1, 2) \\
 k_n &= 2N_{3n} \sqrt{a_n / \pi}, \quad \varepsilon_n = a_n / d_n, \quad \varepsilon_{n0} = a_n / d_{n0}, \quad \nu_n = d_0 / d_{n0} \\
 \nu_{kn} &= a_k d_n / a_n d_{kn}, \quad d_n = \min_{k \neq n} d_{kn}, \quad d_0 = \min_{n=1}^N d_{n0} \\
 I_{11}^{kn} &= \frac{1}{2}[(4-\nu)S_{11}^{kn} - \nu S_{22}^{kn}], \quad I_{12}^{kn} = \frac{1}{2}(1-\nu)^{-1}[(4-3\nu)S_{12}^{kn} - \nu S_{21}^{kn}] \\
 I_{21}^{kn} &= \frac{1}{2}(1-\nu)^{-1}[(4-3\nu)S_{21}^{kn} - \nu S_{12}^{kn}], \quad I_{22}^{kn} = \frac{1}{2}[(4-\nu)S_{22}^{kn} - \nu S_{11}^{kn}] \\
 L_{i0}^{kn} &= -\delta_{i3} - 3e_{3kn}(e_{1kn}\delta_{i1} + 2e_{3kn}\delta_{i3}) + 15e_{3kn}e_{ikn} \\
 e_{2kn} &= 0, \quad L_{im}^{kn} = 3[\delta_{i3} + 5e_{3kn}(e_{1kn}\delta_{i1} + 2e_{3kn}\delta_{i3}) - 35e_{3kn}e_{ikn}]e_{mkn} + \\
 &+ 3[(-4\delta_{i3}\delta_{m3} - \delta_{i2}\delta_{m2})e_{3kn} - \delta_{i1}(e_{1kn}\delta_{m3} + e_{3kn}\delta_{m1})] + \\
 &+ 15\{2e_{3kn}e_{ikn}\delta_{m3} + e_{3kn}[e_{3kn}\delta_{m2}\delta_{i2} + (e_{1kn}\delta_{m3} + e_{3kn}\delta_{m1})\delta_{i1}]\} \quad (m=1, 2) \\
 V_{ij}^{kn} &= z_{10n}(\Gamma_{5j}W_{1i}^{kn} + \Gamma_{7j}W_{2i}^{kn}) - \Gamma_{3j}\delta_{i3} + 3\Gamma_{5j}\delta_{i3}(z_{10n} - z_{2k0})^2 + \\
 &+ z_{10n}z_{2k0}(-3\delta_{i3}\Gamma_{5j} + \Gamma_{7j}\Psi_{1i}^{kn} + \Gamma_{9j}\Psi_{2i}^{kn}) - z_{2k0}(\Gamma_{5j}R_{1i}^{kn} + \Gamma_{7j}R_{2i}^{kn}) + \\
 &+ (1 - \delta_{j0})[z_{10n}(-3\delta_{ij}\Gamma_{50} + \Gamma_{70}U_{1ij}^{kn}) + \\
 &+ z_{10n}z_{2k0}(\Gamma_{70}H_{1ij}^{kn} + \Gamma_{90}H_{2ij}^{kn}) - z_{2k0}(3\delta_{ij}\Gamma_{50} + \Gamma_{70}U_{2ij}^{kn})] \quad (j=0, 1, 2) \\
 W_{1i}^{kn} &= -3[\delta_{i1}\Gamma_{1kn} + 3\delta_{i3}(z_{10n} - z_{2k0})], \quad z_{10n} = \nu_n e_{3n0}, \quad z_{2k0} = \nu_k e_{3k0} \\
 W_{2i}^{kn} &= 15(z_{10n} - z_{2k0})^2[\delta_{i1}\Gamma_{1kn} + \delta_{i3}(z_{10n} - z_{2k0})] \\
 \Psi_{1i}^{kn} &= 15[-2\delta_{i1}\Gamma_{1kn}z_{2k0} + \delta_{i3}(5z_{10n}^2 - 8z_{10n}z_{2k0} + 6z_{2k0}^2 - \Gamma_{1kn}^2)] \\
 \Psi_{2i}^{kn} &= 105(-2z_{10n}^3 + 2z_{10n}^2z_{2k0} - z_{10n}z_{2k0}^2 + z_{2k0}^3 - \Gamma_{1kn}^2z_{2k0})[\delta_{i1}\Gamma_{1kn} + \delta_{i3}(z_{10n} - z_{2k0})] \\
 R_{1i}^{kn} &= 3[\delta_{i1}\Gamma_{1kn} - 3\delta_{i3}(z_{10n} - z_{2k0})], \quad R_{2i}^{kn} = 15(z_{10n} - z_{2k0})[\delta_{i1}\Gamma_{1kn}z_{2k0} + \\
 &+ \delta_{i3}(2z_{10n}^2 - 4z_{10n}z_{2k0} + z_{2k0}^2)], \quad U_{1im}^{kn} = 15(z_{10n} - z_{2k0})^2\delta_{im}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$U_{2im}^{kn} = 15z_{2k0}(z_{10n} - z_{2k0})\delta_{im}, \quad H_{1im}^{kn} = 15(3z_{10n} - z_{2k0})\delta_{im} - 30r_{1kn}\delta_{i3}\delta_{m1}$$

$$H_{2im}^{kn} = 105(-2z_{10n}^3 + 2z_{10n}^2z_{2k0} - z_{10n}z_{2k0}^2 + z_{2k0}^3)\delta_{im} - 105z_{2k0}r_{1kn}^2(3\delta_{i1}\delta_{m1} + \delta_{i2}\delta_{m2}) -$$

$$- 210r_{1kn}z_{2k0}(z_{10n} - z_{2k0})\delta_{i3}\delta_{m1}$$

$$\Gamma_{p0} = 1/w_{kn}^{p/2}, \quad \Gamma_{pm} = -pr_{mkn}/w_{kn}^{p/2+1} \quad (p=3, 5, 7, 9; m=1, 2)$$

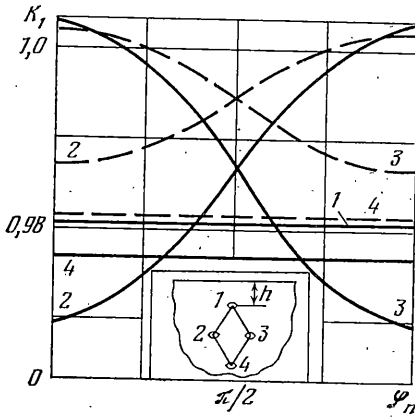
$$\omega_{kn} = v_n^2 + v_k^2 + 2v_nv_k(e_{10n}e_{1k0} - e_{30n}e_{3k0})$$

$$r_{1kn} = v_n e_{10n} + v_k e_{1k0}, \quad r_{2kn} = 0.$$

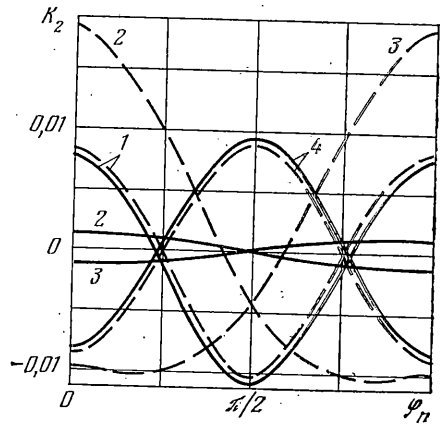
Если центры трещин не размещены в одной плоскости, то коэффициенты интенсивности напряжений определяются также по формулам (3.1), но выражения L_{ij}^{kn} и V_{ij}^{kn} имеют более громоздкий вид.

На фиг. 1-3 построены графики зависимостей от угловой координаты φ_n коэффициентов интенсивности напряжений $K_i = k_i/k_n$, вычисленных по формулам (3.1) при $\nu=0,3$, $N=4$, $h=4a$, $d=4a$ (h - расстояние ближайшей трещины от границы полупространства). Радиусы трещин полагаются одинаковыми, а их центры расположены в углах ромба с острым углом 30° и стороной d . Сплошные линии на всех фигурах соответствуют наличию одинакового внутреннего давления N_0 на всех трещинах, а штриховые линии соответствуют тому, что трещина с номером 1 свободна от нагрузки (нумерация трещин показана на фиг. 1). Цифрами 1-4 обозначены графики, относящиеся к трещинам соответственно с номерами 1-4. Так как K_1 и K_2 симметричны, а K_3 антисимметричны относительно координаты $\varphi_n = \pi$, то все графики приведены лишь для $0 \leq \varphi_n \leq \pi$.

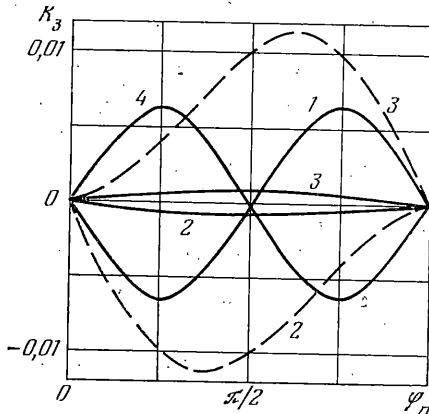
Из графиков видно, что при рассматриваемом расположении трещин разгрузка поверхностью первой трещины приводит к увеличению коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности других трещин, т. е. понижение давления на одной из трещин может привести к самораспространению других взаимодействующих с ней трещин.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. К теории равновесных трещин в упругом слое.— Концентрация напряжений: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1965, вып. 1, с. 39—45.
2. Андрейкив А. Е. Трехмерные задачи теории трещин для квазихрупких тел.— Физ.-хим. механ. материалов, 1976, № 3, с. 54—60.
3. Гольдштейн Р. В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 111—126.
4. Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Плоская трещина произвольного разрыва в ограниченном упругом теле.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 3, с. 472—481.
5. Кит Г. С., Хай М. В. Осесимметричная задача термоупругости для бесконечного тела, ослабленного двумя параллельными круглыми щелями.— Тепловые напряжения в элементах конструкций: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1972, вып. 12, с. 101—108.
6. Кузьмин Ю. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная задача теории упругости для полупространства, ослабленного плоской круглой щелью.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 6, с. 1132—1137.
7. Nisitani H., Mukarami Y. Stress intensity factors of an elliptical crack or a semi-elliptical crack subjected to tension.— Internat. J. Fract., 1974, v. 10, No. 3, p. 353—368.
8. Shah R. C., Kobayashi A. S. Stress intensity factors for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite solid.— Internat. J. Fract., 1973, v. 9, No. 2, p. 133—146.
9. Srivastava K. N., Kripal Singh. The effect of penny-shaped crack on the distribution of stress in a semi-infinite solid.— Internat. J. Engng Sci., 1969, v. 7, No. 5, p. 469—490.
10. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1105—1109.
11. Кит Г. С., Хай М. В., Лаушник И. П. Интегральные уравнения трехмерных задач теплопроводности для полупространства с плоскими трещинами.— Математические методы и физико-механические поля: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1984, вып. 19, с. 40—45.

Львов

Поступила в редакцию
22.X.1984