

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ВЕРШИНЕ ОСТРОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

МОВЧАН А. Б., НАЗАРОВ С. А.

Исследуется асимптотическое поведение решения плоской задачи теории упругости вблизи вершины O острого включения ω . Рассматриваются две ситуации: вблизи O область ω имеет форму пика (угла нулевого раствора) или форму угла малого раствора. Показано, что в первом случае тензор напряжений не имеет сингулярностей в особой точке. Распределение по угловой переменной напряжений в матрице такое же, как и при отсутствии включения вне зависимости от его упругих характеристик. Вместе с тем хорошо известна возможность предельного перехода до энергии при стремлении отношения E^0/E модулей Юнга включения и матрицы к нулю (или к бесконечности) к решению задачи со свободной (или жестко зашеченной) границей, которое имеет корневую особенность в напряжениях. Причины возникновения этого парадоксального обстоятельства выявляются при рассмотрении задачи об узком клиновидном включении.

1. Асимптотика напряженно-деформированного состояния вблизи пикообразного включения. Пусть Ω — двусвязная область на плоскости с границей $\partial\Omega$, гладкой всюду, кроме точки O , расположенной на внутреннем контуре Γ (фиг. 1). Обозначим область, охватываемую Γ , через ω и предположим, что в окрестности O множество ω задается неравенствами

$$-A(r) < \theta < A(r) \quad (1.1)$$

где (r, θ) — полярные координаты с центром O ; A — функция, допускающая представление, которое можно почленно дифференцировать

$$A(r) = ar^\gamma + O(r^{\gamma+\delta}) \quad (1.2)$$

Здесь a, γ и δ — положительные постоянные. Таким образом, область Ω имеет «входящий», а ω — «выходящий» пик (или угол нулевого раствора).

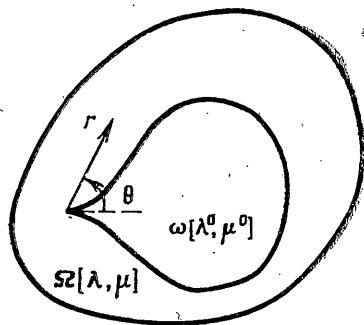
Область Ω заполнена материалом с постоянными Ламе λ и μ , а ω — материалом с постоянными λ^0 и μ^0 . Предположим, что массовые силы отсутствуют, деформация происходит за счет нагрузки, приложенной к внешнему обводу области Ω , а на Γ заданы условия неразрывности смещений и нормальных напряжений. Введем $u = (u_r, u_\theta)$ — вектор смещений и $\sigma^{(n)}$ — вектор нормальных напряжений; в окрестности O запишем систему уравнений равновесия и условия сопряжения в полярных координатах (при этом функции и операторы в области ω будем обозначать нуликом):

$$r^{-2}L(r\partial/\partial r, \partial/\partial\theta)u(r, \theta) = 0, \quad x(r, \theta) \in \Omega \quad (1.3)$$

$$r^{-2}L^0(r\partial/\partial r, \partial/\partial\theta)u^0(r, \theta) = 0, \quad x(r, \theta) \in \omega \quad (1.4)$$

$$u(r, \theta) = u^0(r, \theta), \quad \sigma^{(n)}(u; r, \theta) = \sigma^{(n)}(u^0; r, \theta), \quad x(r, \theta) \in \Gamma \quad (1.5)$$

$$L(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)(\xi_1^2 - 1) + \mu\xi_2^2 & \{(\lambda + 2\mu)(\xi_1 - 1) - \mu(\xi_1 + 1)\}\xi_2 \\ \{(\lambda + 2\mu)(\xi_1 + 1) - \mu(\xi_1 - 1)\}\xi_2 & (\lambda + 2\mu)\xi_2^2 + \mu(\xi_1^2 - 1) \end{vmatrix} \quad (1.6)$$



Фиг. 1

Здесь $L, L^\circ - (2 \times 2)$ -матричные дифференциальные операторы. Используемые в дальнейшем операторы с нуликом выражаются теми же формулами, что и операторы без индекса, но с заменой μ, λ на μ°, λ° . Запишем второе условие (1.5) также в матричной форме:

$$r^{-1} \{B(r \partial / \partial r, \partial / \partial \theta) + D^\pm(r, r \partial / \partial r, \partial / \partial \theta)\} u(r, \theta) = \\ = r^{-1} \{B^\circ(r \partial / \partial r, \partial / \partial \theta) + D^{\circ, \pm}(r, r \partial / \partial r, \partial / \partial \theta)\} u^\circ(r, \theta), \theta = A(r) \quad (1.7)$$

$$B(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \mu \xi_2 & \mu(\xi_1 - 1) \\ 2\mu + \lambda(\xi_1 + 1) & (2\mu + \lambda)\xi_2 \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

$$D^\pm(r, \xi_1, \xi_2) = \mu \left\{ \pm \sin 2\alpha(r) \begin{vmatrix} \xi_1 - 1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 - 1 \end{vmatrix} - 2 \sin^2 \alpha(r) \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_1 - 1 \\ 1 - \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (1.9)$$

$$\alpha(r) = [\sin A(r) + rA'(r) \cos A(r)] / [\cos A(r) - rA'(r) \sin A(r)] - A(r) \quad (1.10)$$

$$\alpha(r) = \gamma A(r) + O(r^{\gamma-1}) = O(r^\gamma), \quad r \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

Отметим, что (1.11) следует из (1.2) и (1.10).

Приведем формальную процедуру построения асимптотики решения задачи (1.3) - (1.5). Предположим, что в уравнениях (1.3), (1.5):

$$u(r, \theta) \sim r^\Lambda v(\theta) \quad (1.12)$$

где Λ - некоторое число, а v - гладкая вектор-функция на $[0, 2\pi]$. В «узкой» (при $r \rightarrow 0$) области ω переменная θ изменяется в пределах от $-A(r)$ до $A(r)$. Введем новую переменную $t = A^{-1}(r) \theta \in (-1, 1)$ и будем считать, что угловая часть вектора u° зависит от t . Тогда из первого условия (1.5) получим, что

$$u^\circ(r, \theta) \sim r^\Lambda v^\circ(A^{-1}(r)\theta), \quad v(0) = v^\circ(1), \quad v(2\pi) = v^\circ(-1) \quad (1.13)$$

Подставляя указанное представление u° в уравнение (1.4), получаем $L^\circ(r \partial / \partial r, \partial / \partial \theta) u^\circ(r, \theta) = r^\Lambda A^{-2}(r) Q d^2 v^\circ / dt^2(t) + O(r^{\Lambda+\gamma})$, $Q = \text{diag}(\mu^\circ, 2\mu^\circ + \lambda^\circ)$, поскольку

$$r \partial / \partial r (r^\Lambda v^\circ(\theta A^{-1}(r))) = -r^{\Lambda+1} A'(r) A^{-1}(r) t dv^\circ / dt(t) + \Lambda r^\Lambda v^\circ(t) = O(r^\Lambda) \\ \partial / \partial \theta (r^\Lambda v^\circ(\theta A^{-1}(r))) = r^\Lambda A^{-1}(r) dv^\circ / dt(t) = O(r^{\Lambda-\gamma}) \quad (1.14)$$

Следовательно, v° - линейная функция. Кроме того, в силу предположения о виде u и u° из (1.7) - (1.11) выводим, что при $\theta = \pm A(r)$:

$$r \sigma^{(n)}(u; r, \theta) = r^\Lambda B(\Lambda, \partial / \partial \theta) v(\pi \mp \pi) + O(r^{\Lambda+\gamma}) \quad (1.15)$$

$$r \sigma^{\circ(n)}(u; r, \theta) = r^\Lambda A^{-1}(r) Q dv^\circ / dt(\pm 1) + O(r^\Lambda) = O(r^{\Lambda-\gamma})$$

Значит, $dv^\circ / dt = 0$ и $v^\circ = \text{const}$. Учтем второй член асимптотики u° , положив

$$u^\circ(r, \theta) \sim r^\Lambda \{v^\circ + A(r) w^\circ(A^{-1}(r)\theta)\} \quad (1.16)$$

Как и ранее, находим, что w° - линейная функция и

$$r \sigma^{\circ(n)}(u^\circ; r, \pm A(r)) = r^\Lambda \left\{ B^\circ(\Lambda, 0) v^\circ + Q \frac{dw^\circ}{dt}(\pm 1) \right\} + O(r^{\Lambda+\gamma}) \quad (1.17)$$

Таким образом, из (1.5), (1.15), (1.17) и (1.13) получаем, что угловую часть v в (1.12) следует подчинить условиям согласования при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$:

$$B(\Lambda, \partial / \partial \theta) v(0) = B(\Lambda, \partial / \partial \theta) v(2\pi), \quad v(0) = v(2\pi) \quad (1.18)$$

Кроме того, вектор-функция (1.12) удовлетворяет системе (1.3), если

$$L(\Lambda, \partial / \partial \theta) v(\theta) = 0, \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad (1.19)$$

Итак, показатель Λ и угловая часть v в (1.12) являются собственным числом и собственным вектором спектральной задачи (1.18), (1.19). Соб-

своими для этой задачи являются целые числа; при $\Lambda = k \neq 0$ существуют четыре собственных вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(k,1)}(\theta) &= (\cos[(1+k)\theta], -\sin[(1+k)\theta]) \\ \mathbf{v}^{(k,2)}(\theta) &= (\sin[(1+k)\theta], \cos[(1+k)\theta]) \\ \mathbf{v}^{(k,3)}(\theta) &= ((k-\kappa)\cos[(1-k)\theta], (k+\kappa)\sin[(1-k)\theta]) \\ \mathbf{v}^{(k,4)}(\theta) &= ((\kappa-k)\sin[(1-k)\theta], (k+\kappa)\cos[(1-k)\theta]) \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $\kappa = (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)^{-1}$, а при $\Lambda = 0$ — два собственных и два присоединенных вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0,1)}(\theta) &= (\cos \theta, -\sin \theta), \quad \mathbf{v}^{(1)}(\theta) = (0, -\kappa^{-1} \sin \theta) \\ \mathbf{v}^{(0,2)}(\theta) &= (\sin \theta, \cos \theta), \quad \mathbf{v}^{(2)}(\theta) = (0, \kappa^{-1} \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Векторам (1.20), (1.21) отвечают, соответственно, однородные решения $\mathbf{U}^{(k,j)}$ и $\mathbf{U}^{(0,j)}$, $\mathbf{U}^{(j)}$ системы (1.3):

$$\mathbf{U}^{(k,j)}(r, \theta) = r^k \mathbf{v}^{(k,j)}(\theta) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (1.22)$$

$$\mathbf{U}^{(0,j)}(r, \theta) = \mathbf{v}^{(0,j)}(\theta), \quad \mathbf{U}^{(j)}(r, \theta) = \mathbf{v}^{(0,j)}(\theta) \log r + \mathbf{v}^{(j)}(\theta) \quad (j = 1, 2) \quad (1.23)$$

Отметим, что $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$ — столбцы, образующие тензор Сомильяны, а записанные в декартовых координатах векторы $\mathbf{U}^{(k,j)}$ при $k \geq 0$ являются однородными полиномами степени k , при $k < 0$ — линейными комбинациями производных порядка k столбцов тензора Сомильяны.

Представления (1.12), (1.16) согласно (1.13), (1.17) конкретизируются следующим образом:

$$\mathbf{u}(r, \theta) \sim r^k \mathbf{v}^{(k,j)}(\theta), \quad \mathbf{u}^0(r, \theta) \sim r^k [1 + \theta Q^{-1}(\mathbf{B}(k, \partial/\partial\theta) - \mathbf{B}^0(k, 0))] \mathbf{v}^{(k,j)}(0) \quad (1.24)$$

Формула (1.24) содержит лишь главные члены асимптотики, которые удовлетворяют уравнениям (1.4), (1.5) не полностью, а лишь с точностью до членов более высокого порядка малости. Поэтому возникает необходимость построения следующих приближений. Укажем процедуру их опрелеления. Для упрощения изложения будем считать, что функция (1.2) задается равенством $A(r) = ar$. Рассмотрим асимптотические ряды

$$\mathbf{u}(r, \theta) \sim \sum_{p=0}^{+\infty} r^{k+p} \mathbf{w}^{(p)}(\theta, \log r), \quad \mathbf{u}^0(r, \theta) \sim \sum_{p=0}^{+\infty} r^{k+p} \mathbf{Z}^{(p)}(\theta a^{-1} r^{-1}, \log r) \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(0)}(\theta) &= \mathbf{v}^{(k,j)}(\theta), \quad \mathbf{Z}^{(0)} = \mathbf{w}^{(0)}(0), \quad \mathbf{Z}^{(1)}(t) = at Q^{-1}(\mathbf{B}(k, \partial/\partial\theta) - \\ &\quad - \mathbf{B}^0(k, 0)) \mathbf{v}^{(k,j)}(0) + \mathbf{C}_z \end{aligned} \quad (1.26)$$

Соотношения (1.26) записаны согласно (1.24), $\mathbf{C}_z$ — некоторый постоянный вектор. (Причины появления в (1.25) полиномиальной зависимости коэффициентов от $\log r$ будут объяснены дальше.)

Подставим (1.25) в уравнения (1.3) — (1.5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях r . Из (1.3) получаем

$$\mathbf{L}(k+p+\partial/\partial s, \partial/\partial\theta) \mathbf{w}^{(p)}(\theta; s) = 0, \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad (1.27)$$

Согласно (1.14), в координатах $(\rho, t) = (r, \theta a^{-1} r^{-1})$ операторы $\mathbf{L}^0$ и $\mathbf{B}^0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^0(r\partial/\partial r, \partial/\partial\theta) &= \mathbf{L}^0(\rho\partial/\partial\rho - t\partial/\partial t, a^{-1}\rho^{-1}\partial/\partial t) = \\ &= Q a^{-2} \rho^{-2} \partial^2/\partial t^2 + a^{-1} \rho^{-1} \mathbf{P}(\rho\partial/\partial\rho - t\partial/\partial t) \partial/\partial t + \\ &+ \mathbf{L}^0(\rho\partial/\partial\rho - t\partial/\partial t, 0), \quad \mathbf{B}^0(r\partial/\partial r, \partial/\partial\theta) = a^{-1} \rho^{-1} Q \partial/\partial t + \mathbf{B}^0(\rho\partial/\partial\rho - t\partial/\partial t, 0). \end{aligned}$$

$$Q = \begin{vmatrix} \mu^0 & 0 \\ 0 & \lambda^0 + 2\mu^0 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{P}(\eta) = \begin{vmatrix} 0 & (\lambda^0 + 2\mu^0)(\eta - 1) - \mu^0(\eta + 1) \\ (\lambda^0 + 2\mu^0)(\eta + 1) - \mu^0(\eta - 1) & 0 \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

Поэтому из (1.4) выводим, что

$$Q\partial^2 Z^{(p+1)}/\partial t^2(t, s) = -aP(k+p-t\partial/\partial t + \partial/\partial s)\partial Z^{(p)}/\partial t(t, s) - a^2L^0(k+p-1-t\partial/\partial t + \partial/\partial s, 0)Z^{(p-1)}(t, s), \quad t \in (-1, 1) \quad (1.29)$$

Раскладывая векторы $w^{(p)}$ в ряды Маклорена в точках $\theta = +0$ и $\theta = -2\pi - 0$, в силу (1.5) находим, что

$$w^{(p)}(\pi \mp \pi, s) = Z^{(p)}(\pm 1, s) - S^\pm, \quad S^\pm = \sum_{q=1}^p \frac{(\pm a)^q}{q!} \frac{\partial^q w^{(p-q)}}{\partial \theta^q}(\pi \mp \pi, s) \quad (1.30)$$

Согласно (1.9)–(1.11), операторы $D^\pm$ и $D^{0,\pm}$ из (1.7) допускают разложения

$$D^\pm\left(r, r\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \sim \sum_{q=1}^{\infty} r^q D_{(q)}\left(r, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$D^{0,\pm}\left(r, r\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \sim \sum_{q=0}^{\infty} r^q D_{(q)}^{0,\pm}\left(t, \rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial t}\right), \quad D_{(0)}^{0,\pm}(\eta, 0) = 0$$

поэтому из второго соотношения (1.5) следует

$$Q\partial Z^{(p+1)}/\partial t(\pm 1, s) = -aB^0(t\partial/\partial t + k+p+\partial/\partial s, 0)Z^{(p)}(\pm 1, s) +$$

$$+ aB\left(k+p+\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)w^{(p)}(\pi \mp \pi) + a\left\{\sum_{q=1}^p \frac{(\pm a)^q}{q!} B\left(k+p-q+\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \frac{\partial^q w^{(p-q)}}{\partial \theta^q}(\pi \mp \pi) + \sum_{q=1}^p \sum_{h=0}^{p-q} \frac{(\pm a)^h}{h!} D_{(q)}^\pm\left(t, k+p-q-h+\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \times \right.$$

$$\times \frac{\partial^h w^{(p-q-h)}}{\partial \theta^h}(\pi \mp \pi) - \sum_{q=0}^p D_{(q)}^{0,\pm}\left(t, k+p-q+\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right)Z^{(p-q)}(\pm 1, s)\left.\right\} \quad (1.31)$$

Укажем последовательность определения коэффициентов рядов (1.26) из (1.27), (1.29)–(1.31). Предположим, что известны вектор-функции $w^{(0)}, Z^{(0)}, \dots, w^{(p-1)}, Z^{(p-1)}$, а $Z^{(p)}$ построена с точностью до постоянного столбца $C_z^{(p)}$ (при $p=1$ см. (1.26)). Найдём $w^{(p)}, C_z^{(p)}, Z^{(p+1)}$ (с точностью до $C^{(p+1)}$). Обозначив правую часть (1.29) F , а суммы из (1.32), выделенные в фигурные скобки, $T^\pm$, находим, что задача (1.29), (1.31) имеет решение, определенное с точностью до постоянного вектора, при условии, что

$$B(k+p+\partial/\partial s, \partial/\partial \theta)w^{(p)}(0, s) - B(k+p+\partial/\partial s, \partial/\partial \theta)w^{(p)}(2\pi, s) =$$

$$= T^-(s) - T^+(s) + B^0(k+p-t\partial/\partial t + \partial/\partial s, 0)Z^{(p)}(1, s) -$$

$$- B^0(k+p-t\partial/\partial t + \partial/\partial s, 0)Z^{(p)}(-1, s) + \frac{1}{a} \int_{-1}^1 F(t, s) dt \quad (1.32)$$

Отметим, что хотя правые части (1.29), (1.31) зависят от $C_z^{(p)}$, в (1.32) эта зависимость исчезает. Соотношение (1.32) вместе с вытекающим из (1.30) равенством

$$w^{(p)}(0, s) - w^{(p)}(2\pi, s) = Z^{(p)}(1, s) - Z^{(p)}(-1, s) - S^+(s) + S^-(s) \quad (1.33)$$

образуют граничные условия для системы (1.27). Как показано в [1], задача (1.27), (1.32), (1.33) разрешима. При этом, так как $k+p$ – собственное число спектральной задачи (1.19), (1.18), ее решение является полиномом от $s = \log r$ степени на единицу выше, чем правые части (если $p = -k$, то степень повышается на два); процедура вычисления $w^{(p)}$ приведена, например, в [1, 2] или [3]. После определения $w^{(p)}$ можно найти

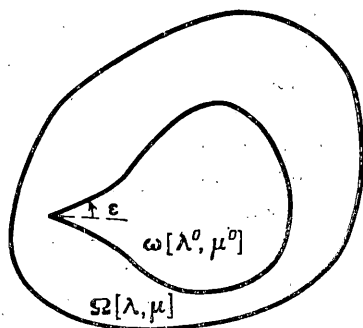
$C_z^{(p)}$ из (1.30), а, решив задачу (1.29), (1.31), — и $w^{(p+1)}$ (с точностью до $C_z^{(p+1)}$).

Итак, коэффициенты асимптотического ряда (1.25) построены. Обоснование представлений такого типа существенно использует так называемую процедуру расщепления, предложенную в иной ситуации в исследованиях [4, 5]; для скалярного оператора второго порядка подобные асимптотические формулы получены и обоснованы в [6].

Сформулируем один из результатов. Пусть функция A из (1.1) бесконечно дифференцируема в $[0, 1]$ и $A(0)=0$. Тогда для решения задачи о деформации составной области $\Omega \cup G$ нагрузками, приложенными к внешнему контуру Ω , справедливы представления

$$u(r, \theta) = K^{(0)} + \sum_{p=1}^n r^p W^{(p)}(\theta, \log r) + O(r^{n+1-\delta}) \quad (1.34)$$

$$u^o(r, \theta) = K^{(0)} + \sum_{p=1}^n r^p Z^{(p)}\left(\frac{\theta}{r}, \log r\right) + O(r^{n+1-\delta}) \quad (1.35)$$



Фиг. 2

Здесь δ — произвольное положительное число, $K^{(0)}$ — некоторый постоянный вектор, $W^{(1)}(\theta)$ — линейная комбинация вектор-функций $v^{(1,j)}$ с коэффициентами $K_j^{(1)}$ (см. (1.20)), а $(Z_r^{(1)}, Z_\theta^{(1)}) = (W_r^{(1)}(0), W_\theta^{(1)}(0))$.

Из (1.34), (1.35) вытекают разложения компонент тензора напряжений. Ограничиваясь старшим членом асимптотики, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(x) &= 2\mu \{K_1^{(1)} \cos 2\theta + K_2^{(1)} \sin 2\theta - 2K_3^{(1)}\} + O(r) \\ \sigma_{r\theta}(x) &= 2\mu \{-K_1^{(1)} \sin 2\theta + K_2^{(1)} \cos 2\theta\} + O(r) \\ \sigma_{\theta\theta}(x) &= 2\mu \{-K_1^{(1)} \cos 2\theta - K_2^{(1)} \sin 2\theta - 2K_3^{(1)}\} + O(r) \\ \sigma_{rr}^o(x) &= 2K_1^{(1)} (\mu^0 + \lambda^0 (\mu^0 - \mu) (2\mu^0 + \lambda^0)^{-1} - K_3^{(1)} 4\mu (\lambda^0 + 2\mu^0)^{-1} \times \\ &\quad \times (\lambda^0 + 2\mu^0 (\mu^0 + \lambda^0) (\mu + \lambda^{-1})) + O(r) \\ \sigma_{r\theta}^o(x) &= -2\mu K_2^{(1)} + O(r), \quad \sigma_{\theta\theta}^o(x) = -2\mu (K_1^{(1)} + 2K_3^{(1)}) + O(r) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Отсутствие в этих выражениях коэффициента $K_4^{(1)}$ связано с тем, что он является множителем при повороте $(\kappa+1)(x_2, -x_1)$ в точке O . В формулах (1.34), (1.36) возможно почленное дифференцирование, а в формулах (1.35), (1.37) — нет.

2. Асимптотика напряженно-деформированного состояния вблизи острого клиновидного включения. Сохраняя все обозначения, будем считать, что в окрестности O область ω вместо (1.1) задается неравенствами $-\varepsilon < \theta < \varepsilon$ (фиг. 2), где ε — положительное число. Асимптотическое представление решения задачи (1.3) — (1.5) содержит слагаемые вида $r^\Lambda v(\theta)$ в Ω и $r^\Lambda v^o(\theta)$ в ω . При этом Λ является собственным числом, а v, v^o — собственными векторами спектральной задачи

$$L(\Lambda, \partial/\partial\theta)v(\theta) = 0, \quad \theta \in (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon), \quad L^o(\Lambda, \partial/\partial\theta)v^o(\theta) = 0, \quad \theta \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad (2.1)$$

$$v(\varepsilon) = v^o(\varepsilon), \quad v(2\pi - \varepsilon) = v^o(-\varepsilon) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} B(\Lambda, \partial/\partial\theta)v(\varepsilon) &= B^o(\Lambda, \partial/\partial\theta)v^o(\varepsilon), \\ B(\Lambda, \partial/\partial\theta)v(2\pi - \varepsilon) &= B^o(\Lambda, \partial/\partial\theta)v^o(-\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Матрицы L и B заданы формулами (1.6) и (1.8), аналогичный смысл имеют L^0 и B^0 .

Трансцендентное уравнение для Λ приведено, например, в [7]. Аналогичные исследования для задачи об антиплоском сдвиге и для задачи о трехмерном коническом включении содержатся в [8–10]. Рассмотрим аналитическую зависимость величин v , v^0 и Λ от ε , точнее, их поведением при $\varepsilon \rightarrow 0$. Проведем соответствующие вычисления в случае угла ω малого растора.

Предположим, что константы сред λ , μ и λ^0 , μ^0 — числа одного порядка, а ε — малый параметр. Асимптотику (при $\varepsilon \rightarrow 0$) решения задачи (2.1)–(2.3) будем искать в виде

$$\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1 + \dots; \quad v(\theta) = w^{(0)}(\theta) + \varepsilon w^{(1)}(\theta) + \dots \quad (2.4)$$

$$v^0(\theta) = Z^{(0)} + \varepsilon Z^{(1)}(\varepsilon^{-1}\theta) + \varepsilon^2 Z^{(2)}(\varepsilon^{-1}\theta) + \dots$$

Подставим приведенные разложения Λ и v^0 во вторую систему (2.1). Переходя к координатам $t = \varepsilon^{-1}\theta$ и приравнявая нулю коэффициенты при ε^{-1} и ε^0 , получаем

$$Q \partial^2 Z^{(1)} / \partial t^2(t) = 0, \quad t \in (-1, 1), \quad (2.5)$$

$$Q \partial^2 Z^{(2)} / \partial t^2(t) = -P(\Lambda_0) \partial Z^{(1)} / \partial t(t) - L^0(\Lambda_0, 0) Z^{(0)}, \quad t \in (-1, 1) \quad (2.6)$$

Матрицы Q и P определены формулами (1.28).

Аналогично, подставляя разложения (2.4) для Λ и v в первую систему (2.1), находим

$$L(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) w^{(0)}(\theta) = 0, \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad (2.7)$$

$$L(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) w^{(1)}(\theta) + \Lambda_1 L_1(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) w^{(0)}(\theta) = 0, \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad (2.8)$$

$$L_1(\xi_1, \xi_2) = (\partial L / \partial \xi_1)(\xi_1, \xi_2)$$

Из условий сопряжения (2.2) выводим равенства

$$w^{(0)}(0) = w^{(0)}(2\pi) = Z^{(0)} \quad (2.9)$$

$$w^{(1)}(0) + \partial w^{(0)} / \partial \theta(0) = Z^{(1)}(1), \quad w^{(1)}(2\pi) - \partial w^{(0)} / \partial \theta(2\pi) = Z^{(1)}(-1) \quad (2.10)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε слева и справа в (2.3), получаем, что члены разложений (2.4) удовлетворяют соотношениям

$$Q \partial Z^{(1)} / \partial t(\pm 1) = B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) w^{(0)}(\pi \mp \pi) - B^0(\Lambda, 0) Z^{(0)} \quad (2.11)$$

$$Q \partial Z^{(2)} / \partial t(\pm 1) = B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) w^{(1)}(\pi \mp \pi) - B^0(\Lambda_0, 0) Z^{(1)}(\pm 1) + \\ + \Lambda_1 B_1(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) w^{(0)}(\pi \mp \pi) \pm B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) \partial w^{(0)} / \partial \theta(\pi \mp \pi) - \Lambda_1 B_1^0(\Lambda_0, 0) Z^{(0)} \quad (2.12)$$

Рассмотрим систему (2.5), (2.11). Она разрешима, если

$$B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) w^{(0)}(0) = B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) w^{(0)}(2\pi) \quad (2.13)$$

а ее решение является линейной функцией

$$Z^{(1)}(t) = Q^{-1}(B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta) w^{(0)}(0) - B^0(\Lambda_0, 0) Z^{(0)}) t + C_w \quad (2.14)$$

где C_w — произвольная постоянная (ее значение определяется из (2.10) при решении задачи для $w^{(1)}$).

Таким образом, число Λ_0 является собственным числом спектральной задачи (2.7), (2.9), (2.13) или, что то же, задачи (1.19), (1.18). Вектор-функция $w^{(0)}$ — линейная комбинация собственных векторов, которые отвечают числу $\Lambda_0 = k$ и задаются формулами (1.20) или (1.21).

Далее рассмотрим первое положительное собственное число, т. е. $\Lambda_0 = 1$. Считая, что $w^{(0)}$ — линейная комбинация

$$C_1 v^{(1,1)} + C_2 v^{(1,2)} + C_3 v^{(1,3)} + C_4 v^{(1,4)} \quad (2.15)$$

векторов (1.20), $k=1$, из (2.9), (2.10) и (2.13) выводим

$$\mathbf{w}^{(1)}(0) - \mathbf{w}^{(1)}(2\pi) = \mathbf{V}(\partial/\partial\theta) \mathbf{w}^{(0)}(0), \quad \mathbf{V}(\eta) = 2\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{B}(1, \eta) - \mathbf{B}^0(1, 0)) - 2\eta \quad (2.16)$$

Условия сопряжения типа (2.13) для $\mathbf{w}^{(1)}$ определяются при решении задачи (2.6), (2.12) для $\mathbf{Z}^{(2)}$. Эта задача разрешима в том и только том случае, если выполнены равенства

$$\mathbf{B}(1, \partial/\partial\theta) \mathbf{w}^{(1)}(0) - \mathbf{B}(1, \partial/\partial\theta) \mathbf{w}^{(1)}(2\pi) = 2\mathbf{T}(\partial/\partial\theta) \mathbf{w}^{(0)}(0) \\ \mathbf{T}(\eta) = (\mathbf{B}^0(1, 0) - \mathbf{P}(1)) \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{B}(1, \eta) - \mathbf{B}^0(1, 0)) - \mathbf{B}(1, \eta) \eta \quad (2.17)$$

Рассмотрим теперь задачу (2.8), (2.16), (2.17). Так как она находится на спектре, то ее решение существует лишь тогда, когда выполнены условия ортогональности правых частей собственным векторам сопряженной задачи. Поскольку сопряженным к оператору $\mathbf{L}(1, \partial/\partial\theta)$ является оператор $\mathbf{L}(-1, \partial/\partial\theta)$, умножим скалярно (2.8) на $\mathbf{v}^{(-1,j)}$ ($j=1, 2, 3, 4$) и проинтегрируем по частям на отрезке $[0, 2\pi]$. Полученные четыре равенства записываются в виде алгебраической системы для вектора $\mathbf{C}$ коэффициентов линейной комбинации (2.15):

$$\mathbf{N}\mathbf{C} + \mathbf{A}_1\mathbf{M}\mathbf{C} = 0 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{M} = \frac{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \left\| 2\mathbf{v}^{(-1,k)}(0) \cdot \mathbf{T}(\partial/\partial\theta) \mathbf{v}^{(1,j)}(0) - \mathbf{B}(-1, \partial/\partial\theta) \mathbf{v}^{(-1,k)}(0) \mathbf{V}(\partial/\partial\theta) \mathbf{v}^{(1,j)}(0) \right\|_{j,k=1}^4$$

Поскольку $\det \mathbf{M} \neq 0$, найдутся четыре (с учетом кратностей) собственных числа $\Lambda_1^{(q)}$ для системы (2.18). Эти числа являются вторыми приближениями в асимптотике собственных чисел задачи (2.1)–(2.3). В малой окрестности точки $\Lambda=1$ существуют четыре (с учетом кратностей) собственных числа $\Lambda^{(q)}$ спектральной задачи (2.1)–(2.3) и для них справедливы асимптотические представления

$$\Lambda^{(q)} = 1 + \varepsilon \Lambda_1^{(q)} + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (q=1, 2, 3, 4) \quad (2.19)$$

Обоснование соотношений (2.19) проводится по той же схеме, что и в [11, 12].

Рассмотрим ситуацию, когда материал включения много жестче или много мягче материала матрицы. Пусть

$$\lambda^0 = \varepsilon^l l, \quad \mu^0 = \varepsilon^l m \quad (2.20)$$

Здесь l, m — числа того же порядка, что и λ, μ , а $\gamma \in (-\infty, +\infty)$. При помощи той же процедуры построения асимптотики решения спектральной задачи (2.1)–(2.3) находим, что при $|\gamma| < 1$ справедливы соотношения $\Lambda = 1 + O(\varepsilon^l)$, $\mathbf{v}(\theta) = \mathbf{v}^{(1,j)}(\theta) + O(\varepsilon^l)$, $\mathbf{v}^0(\theta) = \mathbf{v}^{(1,j)}(0) + O(\varepsilon^l)$ ($\gamma_1 = \min\{1 - \gamma, 1 + \gamma\}$, $\gamma_2 = \min\{1 - \gamma, 1\}$), т. е. в достаточно широких пределах изменения отношения параметров сред показатель в асимптотике $\mathbf{u}(x) = \mathbf{C}r^\Lambda \mathbf{v}(\theta) + o(r^\Lambda)$, $\mathbf{u}^0(x) = \mathbf{C}r^\Lambda \mathbf{v}^0(\theta) + o(r^\Lambda)$ вектора смещений близок к единице. Для остальных значений γ построение асимптотики нуждается в некоторой модификации.

Если $|\gamma| > 1$, то для показателя Λ и угловой части $\mathbf{v}$ в (2.4) имеем

$$\Lambda = 1/2 + O(\varepsilon^l), \quad \mathbf{v}(\theta) = \mathbf{w}^{(0)}(\theta) + O(\varepsilon^l), \quad \gamma_3 = \min\{1, |\gamma| - 1\} \quad (2.21)$$

Вектор-функция $\mathbf{w}^{(0)}$ в (2.21) является линейной комбинацией двух собственных векторов, отвечающих собственному числу $\Lambda_0 = 1/2$ системы (2.7) с условиями Дирихле $\mathbf{w}^{(0)}(0) = \mathbf{w}^{(0)}(2\pi) = 0$ при $\gamma < -1$ и с условиями

Неймана $B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta)w^{(0)}(0) = B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta)w^{(0)}(2\pi) = 0$ при $\gamma > 1$. Точки $\gamma = \pm 1$ являются особыми. Граничные условия в предельной спектральной задаче при $\gamma = 1$ и $\gamma = -1$ имеют вид соответственно

$$B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta)w^{(0)}(\pi \pm \pi) - \frac{1}{2}J(w^{(0)}(0) - w^{(0)}(2\pi)) = 0, \quad J = \text{diag}\{m, l+2m\} \quad (2.22)$$

$$Gw^{(0)}(\pi \pm \pi) - B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta)w^{(0)}(0) + B(\Lambda_0, \partial/\partial\theta)w^{(0)}(2\pi) = 0$$

$$G = \text{diag}\{-4m(m+l)(l+2m)^{-1}, 0\} \quad (2.23)$$

При этом первое собственное число спектральной задачи (2.1)–(2.3) в предположении (2.20), $\gamma = 1$ (или $\gamma = -1$) с точностью $O(\varepsilon)$ совпадает с первым собственным числом задачи (2.7), (2.22) (или (2.7), (2.23)).

3. Следствия. Из формул (1.36), (1.37) вытекает, что для включения, изображенного на фиг. 1, компоненты тензора напряжений не имеют сингулярностей в его вершине. Угловые части распределения напряжений в матрице совпадают с аналогичными угловыми частями в случае, когда включение отсутствует. Таким образом, в главном смещения являются линейными функциями, а напряжения постоянны вблизи O в Ω .

Сказанное приводит к следующему парадоксальному обстоятельству. Известно, что если модуль Юнга $E^* = \mu^*(\lambda^* + \mu^*)(\lambda^* + 2\mu^*)^{-1}$ материала включения мал по сравнению с модулем Юнга материала матрицы, то решение u задачи (1.3)–(1.5) в $\Omega \cup \omega$ близко к решению задачи в области Ω с контуром Γ , свободным от напряжений. Более точно, $E^v(u - u_N; \Omega) \rightarrow 0$ при $E^{-1}E^* \rightarrow 0$, где E^v — функционал упругой энергии в Ω . Аналогично, $E^v(u - u_D; \Omega) \rightarrow 0$ при $E^{-1}E^* \rightarrow +\infty$, т. е. решение u близко к решению u_D задачи в области с жестко зашлепленным контуром Γ . Оба векторных поля u_N и u_D характеризуются наличием корневой сингулярности напряжений в угловой точке раствора 2π контура области Ω . С другой стороны, решение u не имеет особенности в напряжениях.

Пояснением обсуждаемому факту могут служить результаты, полученные в п. 2. Согласно (2.19), показатель сингулярности напряжений в вершине узкого клиновидного включения близок к нулю. «Раствор» пикообразного включения, заданный неравенствами (1.10), равен $2A(r)$ и стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, т. е. включение можно «поместить» в угол любого сколь угодно малого раствора. Поэтому показатель сингулярности должен обращаться в нуль.

Для того чтобы в пределе получить задачу Дирихле или Неймана для уравнений равновесия, необходимо, чтобы материал узкого клиновидного включения был существенно жестче или мягче материала матрицы соответственно. Для включения раствора 2π указанное условие принимает вид (2.20) при $\gamma < -1$ или $\gamma > 1$. Формальное применение этого результата для пикообразного включения приводит к следующему ограничению на его свойства. Материал включения должен быть неоднородным, причем отношение модулей Юнга $E^*(x)/E(x)$ должно либо возрастать до бесконечности при приближении к точке O , либо стремиться к нулю. Именно, если $E^*(x)E^{-1}(x) = O(A(r))$ при $r \rightarrow 0$, то напряжения в точке имеют корневую особенность, а угловые части распределения напряжений совпадают с угловыми частями подобного распределения напряжений вблизи вершины трещины со свободными берегами. Если же $E(x)E^{-1}(x) = O(A(r))$ при $r \rightarrow 0$, то показатель особенности тоже будет равен $-1/2$, а угловые части будут совпадать с угловыми частями распределения напряжений вблизи вершины трещины с жестко зашлепленными берегами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. — Тр. Моск. мат. об-ва, 1967, т. 16, с. 209–292.
2. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. — Math. Nach., 1977, Bd. 76, s. 29–60.
3. Назаров С. А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983, 117 с.
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, т. 36, № 5, с. 1080–1133.
5. Пламеневский Б. А. Об асимптотическом поведении решений квазиэллиптических дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, т. 37, № 6, с. 1332–1375.

6. Назаров С. А. Асимптотика на бесконечности решения задачи Неймана с условиями сопряжения в угле.— Изв. ВУЗов. Математика, 1984, № 1, с. 18—25.
7. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения.— М.: Наука, 1974, 640 с.
8. Sinclair G. B. On the singular eigenfunctions for plane harmonic problems in composite region.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1980, vol. 47, n. 1, p. 87—92.
9. Keer L. M., Parihar K. S. Elastic stress singularity at conical inclusion.— Intern. J. Solids Struct., 1978, vol. 14, n. 4, p. 261—263.
10. Bazant Z. P., Keer L. M. Singularities of elastic stresses and of harmonic functions at conical notches or inclusions.— Intern. J. Solids Struct., 1974, vol. 10, n. 9, p. 957—964.
11. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об особенностях решений задачи Дирихле во внешности тонкого конуса.— Мат. сб., 1983, т. 122, № 4, с. 435—456.
12. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, т. 48, № 2, с. 347—371.

Ленинград

Поступила в редакцию
14.XII.1984