

УДК 539.3:534.1

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

КАРТВЕЛИШВИЛИ В. М.

Приводится постановка и излагается методика решения нового класса задач оптимизации тонкостенных термоупругих конструкций, нестационарно взаимодействующих с внешним термосиловым полем. Ранее конструкции проектировались в основном без учета влияния тепловых нагрузок [1-6], либо напряженно-деформированное состояние системы оптимизировалось за счет выбора соответствующего режима температурного нагружения [7] или способа размещения источников тепла [8]. В [9-11] оптимизировались системы, взаимодействующие со стационарным внешним тепловым полем.

Для гибких пластин и пологих оболочек переменной толщины, выполненных из неоднородного анизотропного материала, выписываются определяющие соотношения термоэластокинетики, и в рамках этой теории проводится анализ чувствительности и ставятся задачи оптимизации с локальными и интегральными по времени и пространственным координатам функционалами и ограничениями общего вида. На допустимые значения градиентов управляющих функций (толщины, концентрации армирующих включений) наложены ограничения, позволяющие проводить оптимизацию, не выходя за рамки исходной модели конструкции, и обеспечивающие существование решения оптимизационной задачи [12, 13]. На базе алгоритмов последовательной оптимизации и вариационного подхода при решении задач нестационарной теплопроводности и термоупругости решены конкретные задачи выбора оптимального распределения силового материала в конструкциях.

**1. Определяющие соотношения термоэластокинетики.** В прямоугольной системе координат  $Ox_1x_2z$  рассмотрим тонкостенную конструкцию переменной толщины  $-h(x_1, x_2) \leq \xi \leq h(x_1, x_2)$  (пластину, пологую оболочку), занимающую в плане на плоскости  $Ox_1x_2$  область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  и площадью  $S$ , а в пространстве  $Ox_1x_2z$  — область  $R + \partial R$  с граничной поверхностью  $\partial R = \partial R^+ \cup \partial R^- \cup \partial R_\Gamma$ , где  $\partial R^\pm = \pm h(x_1, x_2)$ ,  $\partial R_\Gamma$  — линейчатая поверхность, образованная из нормалей к срединной поверхности конструкции  $z = z(x_1, x_2)$  в точках ее граничного контура  $\Gamma$ . Тонкостенность и пологость оболочки обуславливаются выполнением соотношений  $|\xi z(x)_{,i}| \ll 1$ ,  $|z(x)_{,i} z(x)_{,j}| \ll 1$ . Здесь и далее индексы  $i, j, k, l$  принимают значения 1 и 2; по дважды повторяющимся индексам ведется суммирование; нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате;  $x = (x_1, x_2)$ .

На допустимые значения градиентов толщин наложено ограничение

$$\max_{x \in \Omega} |\nabla h(x)| = \max_{x \in \Omega} (h_{,i} h_{,i})^{1/2} \leq \xi \quad (1.1)$$

которое при соответствующих значениях  $\xi$  исключает возможность возникновения резких перепадов толщин (ребер), а следовательно, и скачков напряженно-деформированного состояния, обеспечивая тем самым существование в тонкостенной конструкции плоского напряженного состояния и выполнение гипотезы прямых нормалей.

Под действием силовых и тепловых нагрузок осуществляется нестационарное термосиловое взаимодействие конструкции с внешней средой в рамках теории несвязанной термоэластокинетики.

В произвольный момент времени  $t \geq 0$  тепловые процессы в конструкции обусловлены следующими факторами: заданием при  $t=0$  в  $R + \partial R$  начального распределения температуры  $T^0$ ; заданием на участках гранич-

ной поверхности  $\partial R_1 \subset \partial R_\Gamma$  температуры  $T_\Gamma(t)$ ; теплообменом конструкции с окружающей средой по закону Ньютона на поверхностях  $\partial R^\pm$  и участках  $\partial R_2 \subset \partial R_\Gamma$ ; наличием в  $R$  источников тепла с удельной мощностью  $Q(t)$  на единицу площади области  $\Omega$ .

В предположении о линейном распределении температурного поля  $T(x, \xi, t) = T_1(x, t) + \xi h^{-1} T_2(x, t)$  по толщине стенки конструкции сведем, следуя методике [14], трехмерную краевую задачу нестационарной теплопроводности в неоднородной анизотропной пластине или пологой оболочке переменной толщины к двумерной. В результате для функций

$$T_1(x, t) = \frac{1}{2h(x)} \int_{-h(x)}^{h(x)} T(x, \xi, t) d\xi, \quad T_2(x, t) = \frac{3}{2h^2(x)} \int_{-h(x)}^{h(x)} T(x, \xi, t) \xi d\xi \quad (1.2)$$

имеем следующую связанную краевую задачу (далее индексы  $t$  после запятой означают дифференцирование рассматриваемой величины соответствующее число раз по времени  $t$ , а  $n_i$  — составляющую единичного вектора нормали к контуру  $\Gamma$ ):

$$\rho c h T_{n,t} - (h k_{ij} T_{n,j})_{,i} + H(\mu_{ns} T_s - \gamma_n) - Q_n + \delta_{n2} \mu_n T_n = 0 \quad (1.3)$$

$$T_n(x, 0) = T_n^\circ \quad (t=0), \quad T_n(l, t) = T_n^\Gamma \quad (l \in \Gamma_1 \subset \Gamma)$$

$$k_{ij} n_i T_{n,j} + \mu_\Gamma (T_n - \theta_n) + q_n - \delta_{n2} k_{ij} n_i h_{,j} T_n h^{-1} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \subset \Gamma \quad (s, n=1, 2)$$

$$H = (1 + h_{,i} h_{,i})^{1/2}, \quad \mu_{11} = 1/3 \mu_{22} = (\mu^+ + \mu^-)/2$$

$$\mu_{21} = 3(\mu^+ - \mu^-)/2, \quad \mu_{12} = -2\kappa k_z + \mu_{21}/3$$

$$\gamma_1 = (\mu^+ \theta^+ + \mu^- \theta^-)/2, \quad \gamma_2 = 3(\mu^+ \theta^+ - \mu^- \theta^-)/2$$

$$\mu_2 = [(h k_{ij} h_{,j})_{,i} + 3k_z] h^{-1}$$

Здесь  $\rho = \rho(x)$  — плотность материала,  $c = c(x)$  — удельная теплоемкость,  $k_{ij} = k_{ij}(x)$  — тензор коэффициентов теплопроводности в касательных плоскостях стенки конструкции,  $k_z$  — коэффициент теплопроводности в направлении  $z$ ,  $\kappa$  — средняя кривизна срединной поверхности;  $\mu^\pm = \mu^\pm(x)$ ,  $\theta^\pm = \theta^\pm(x)$  — соответственно коэффициенты теплоотдачи на поверхностях  $\partial R^\pm = \pm h(x)$  и нестационарная температура среды, омывающей указанные поверхности;  $T_n^\circ$  и  $T_n^\Gamma$  — начальные и граничные значения величин  $T_n$ , получающиеся аналогично (1.2) путем осреднения по толщине стенки начальных и граничных условий для  $T(x, \xi, t)$ ;  $\mu_\Gamma = \mu_\Gamma(l)$  и  $\theta_n = \theta_n(l, t)$  — коэффициент теплоотдачи и осредненные значения слагаемых нестационарной температуры окружающей среды вдоль участка контура  $\Gamma_2$ . Величины  $Q_n = Q_n(x, t)$  и  $q_n = q_n(x, t)$  отвечают тепловым источникам, находящимся соответственно внутри области  $R$  и на участке границы  $\Gamma_2 \subset \Gamma$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

При  $t \geq 0$  силовое взаимодействие с внешней средой обусловлено: наличием в области  $R$  вектора объемных сил  $f(x) = \{f_i\}$ ; заданием на участках  $\partial R_3$  границы  $\partial R_\Gamma$  поверхностных нагрузок  $g(x, t) = \{g_i(x, t), g_z(x, t)\}$ , отнесенных к единице длины контура  $\Gamma$ ; действием на  $\partial R^\pm$  нормальных внешних сил с равнодействующей  $P(x, t)$ , отнесенной к единице площади области  $\Omega$ ; заданием на  $\partial R_1 \subset \partial R_\Gamma$  перемещений  $u_\Gamma(x, t) = \{u_i^\Gamma(x, t), u_z^\Gamma(x, t)\}$ .

Указанное нестационарное термосиловое взаимодействие со средой вызывает в конструкции перемещения, которые, согласно гипотезе прямых нормалей, определяются через вектор перемещений срединной поверхности  $u(x, t) = \{u_i(x, t), w(x, t)\}$ , имеющих при  $t=0$  начальные значения  $u^\circ(x, t) = \{u_i^\circ(x, t), w^\circ(x, t)\}$  и начальные скорости  $u_{,i}^\circ(x, t) = \{u_{i,i}^\circ(x, t), w_{,i}^\circ(x, t)\}$ .

Считая прогибы  $w$  сравнимыми с толщиной  $h$  и погибью  $z$ :  $w \sim h$ ,  $w \sim z$ ,  $w_{,i} w_{,j} \sim u_{i,j}$ , выпишем, следуя модели [15], выражения для деформаций  $e_{ij}$  в каждой точке рассматриваемой гибкой тонкостенной конструкции. Имеем

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \xi w_{,ij}, \quad \varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i} w_{,j} + z_{,i} w_{,j} + z_{,j} w_{,i}) \quad (1.4)$$

Усреднив по толщине стенки конструкции трехмерные уравнения движения и двумерные граничные условия, пренебрегая инерционными сдвиговыми членами, получим с учетом соотношений (1.4) следующую двумерную краевую задачу:

$$\begin{aligned} N_{ij,j} + F_i &= mu_{i,tt}, \quad M_{ij,ji} + [N_{ij}(w+z)_{,i}]_{,j} + P = mw_{,t} \\ u_i &= u_i^0, \quad w = w^0, \quad u_{i,t} = u_{i,t}^0, \quad w_{,t} = w_{,t}^0, \quad x \in \Omega \quad (t=0) \\ u_i &= u_i^\Gamma, \quad w = w^\Gamma \quad \text{на } \Gamma_4 \subset \Gamma; \quad N_{ij}n_j = N_i^\Gamma, \quad M_{ij}n_j = G^\Gamma \quad \text{на } \Gamma_3 \subset \Gamma \\ M_{ij,j}n_i + K_{,s} + N_{ij}n_j w_{,i} + N_{ij}n_j z_{,i} &= Q_z^\Gamma + K_{,s}^\Gamma \quad \text{на } \Gamma_3 \subset \Gamma \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \int_{-h(x)}^{h(x)} \sigma_{ij} d\xi, \quad M_{ij} = \int_{-h(x)}^{h(x)} \sigma_{ij} \xi d\xi, \quad m = \int_{-h(x)}^{h(x)} \rho d\xi, \quad F_i = \int_{-h(x)}^{h(x)} f_i d\xi \\ N_i^\Gamma &= \int_{-h(x)}^{h(x)} g_i d\xi, \quad M_i^\Gamma = \int_{-h(x)}^{h(x)} g_i \xi d\xi, \quad Q_z^\Gamma = \int_{-h(x)}^{h(x)} g_z d\xi \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} G^\Gamma &= M_1^\Gamma n_1 + M_2^\Gamma n_2, \quad K^\Gamma = M_2^\Gamma n_1 - M_1^\Gamma n_2 \\ K &= (M_{22} - M_{11})n_1 n_2 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2), \quad K_{,s} = \partial K / \partial s \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_{ij}$ ,  $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$  — соответственно напряжения, усилия и моменты, действующие в конструкции;  $K$  — крутящий момент,  $s$  — координата, отсчитываемая вдоль контура  $\Gamma$ . Если прямоугольная в плане пластина или пологая оболочка имеют свободные углы, то для данных углов в правую часть последнего граничного условия необходимо, как обычно, добавить член  $2M_{12}$ .

Усреднив согласно (1.6) соотношения Дюгамеля — Неймана по толщине стенки конструкции, получим, пренебрегая влиянием связанности деформаций растяжения — сжатия и изгиба, выражения для усилий и моментов

$$\begin{aligned} N_{ij} &= K_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \theta_{ij}^N, \quad M_{ij} = -D_{ijkl} w_{,kl} - \theta_{ij}^M, \quad K_{ijkl} = \int_{-h(x)}^{h(x)} c_{ijkl} d\xi \\ D_{ijkl} &= \int_{-h(x)}^{h(x)} c_{ijkl} \xi^2 d\xi, \quad \theta_{ij}^N = \int_{-h(x)}^{h(x)} \left( c_{ijkl} \int_0^T \alpha_{kl} dT \right) d\xi, \\ \theta_{ij}^M &= \int_{-h(x)}^{h(x)} \left( c_{ijkl} \xi \int_0^T \alpha_{kl} dT \right) d\xi \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $c_{ijkl} = c_{ijkl}(x, T)$  — тензор модулей упругости,  $\alpha_{kl} = \alpha_{kl}(x, T)$  — тензор тепловых расширений.

Соотношения (1.3), (1.4) — (1.7) полностью определяют процесс нестационарного термосилового взаимодействия с внешней средой гибких неоднородных анизотропных пластин и пологих оболочек переменной толщины, физические характеристики которых зависят от температуры. Опустив в соотношениях (1.3), (1.4), (1.5) члены, содержащие погибь  $z$  и среднюю кривизну  $\kappa$ , придем к уравнениям нелинейного деформирования гибких пластин. Опустив также в выражении для  $\varepsilon_{ij}$  из (1.4) и в уравнении для моментов (1.5) соответственно слагаемые  $w_{,i} w_{,j}$  и  $(N_{ij} w_{,i})_{,j}$ , получим несвязанные уравнения линейной теории нестационарного деформирования термоупругих пластин.

В дальнейшем рассмотрим два характерных случая деформирования системы: деформирование пластин в рамках линейной теории несвязанной динамической термоупругости (задача 1) и нелинейное нестационарное деформирование пластин и пологих оболочек без учета инерционных членов в правой части соотношений (1.5) (задача 2).

Подставив в линейном случае соотношения (1.4) в уравнения (1.7), запишем для краткости систему определяющих соотношений (1.3), (1.4), (1.5), (1.7) в операторном виде. Имеем для  $T(x, t) = \{T_1(x, t), T_2(x, t)\}$  и  $u(x, t) = \{u_i(x, t), w(x, t)\}$  следующую систему уравнений, начальных и краевых условий:

$$\begin{aligned} \Lambda_1[h]T_{,t}(x, t) + \Lambda_2[h]T(x, t) &= Q(x, h, t) \\ \Sigma_1(x, h, t)T(x, t) &= \vartheta_1(x, t) \text{ на } \Gamma_T \subset \Gamma, \Sigma_2(x)T(x, 0) = \vartheta_2(x) \text{ при } t=0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_3[h]u_{,tt}(x, t) + \Lambda_4[h]u(x, t) + \Lambda_5[h]T(x, t) &= P(x, t) \\ \Sigma_4(x, h, t)u(x, t) &= \vartheta_4(x, t) \text{ на } \Gamma_u \subset \Gamma, \Sigma_5(x)u(x, 0) = \vartheta_5(x) \text{ при } t=0 \end{aligned}$$

Здесь  $\Lambda_1[h], \dots, \Lambda_5[h]$  — линейные операторы определяющих уравнений,  $Q(x, h, t), P(x, t)$  — нестационарные термосиловые воздействия на систему,  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_5$  — линейные операторы граничных и начальных условий.

Для случая нелинейного деформирования гибких пластин и пологих оболочек, введя при  $F_i=0$  функцию напряжений  $\Phi$  согласно формулам  $N_{ij} = \gamma_{is}\gamma_{jr}\Phi_{,sr}$  ( $\gamma_{12}=1, \gamma_{11}=\gamma_{22}=0, \gamma_{21}=-1$ ), сведем систему нелинейных уравнений (1.4), (1.5), (1.7) к двум уравнениям относительно прогиба  $w$  и функции  $\Phi$  (все индексы принимают значения 1, 2):

$$\begin{aligned} (D_{ijkl}w_{,kl} + \theta_{ij}^M)_{,ji} - \gamma_{is}\gamma_{jr}\Phi_{,sr}(w+z)_{,ij} - P &= 0 \quad (1.9) \\ \gamma_{km}\gamma_{ln} \{ [K_{ijkl}^{-1}(\gamma_{is}\gamma_{jr}\Phi_{,sr} + \theta_{ij}^N)]_{,mn} + w_{,kl} (1/2 w+z)_{,mn} &= 0 \end{aligned}$$

**2. Сведение локальных функционалов и ограничений к интегральным. Постановка задачи оптимизации.** Учитывая, что в качестве искомых управляющих функций (т.е. функций, выбором которых стремятся улучшить в заданном смысле рассматриваемый критерий качества) в задачах оптимизации тонкостенных термоупругих конструкций могут выступать различные геометрические и структурные характеристики системы (распределение толщин в стенке конструкции, плотность компонент армирующего материала, направление укладки армирующих волокон и т.д.), введем вектор управляющих функций  $h(x) = \{h_\beta(x)\}$  ( $\beta=1, \dots, \beta_0$ ), компоненты которого зависят от вектора пространственных координат  $x$ .

Предполагается, что каждая компонента  $h_\beta$  вектора управляющих функций наряду с ограничением на минимальные и максимальные допустимые значения

$$0 < h_\beta^-(x) \leq h_\beta(x) \leq h_\beta^+(x) \quad (2.1)$$

удовлетворяет также неравенству типа (1.1), которое при достаточно больших значениях параметра  $r$  [16] можно аппроксимировать следующим интегральным ограничением ( $r$  — четное положительное число):

$$\left[ \frac{1}{S} \int_{\Omega} |\nabla h_\beta(x)|^r dx \right]^{1/r} = \left[ \frac{1}{S} \int_{\Omega} (h_{\beta,i} h_{\beta,i})^{r/2} dx \right]^{1/r} \leq \xi_\beta \quad (\beta=1, \dots, \beta_0) \quad (2.2)$$

Наличие разнохарактерных внешних воздействий на систему обуславливает расширение спектра критериев качества и усложнение их вида. Наряду с локальными и интегральными стационарными свойствами конструкции возникает необходимость и возможность оптимизировать также различные нестационарные локальные и интегральные характеристики термоупругой системы и, более того, ее смешанные локально-интегральные характеристики. Локальный по времени критерий качества  $J_0$  возникает, например, в том случае, когда требуется на множестве непересекающихся временных интервалов  $\Lambda = \{[t_0, t_1], \dots, [t_{k-1}, t_k]; \text{mes } \Lambda = \tau\}$  минимизировать возникающее в заранее неизвестный момент времени  $t^* \in \Lambda$  пиковое значение некоторой нестационарной (локальной или интегральной в  $\Omega$ ) характеристики  $\varphi^\circ$ . Так, величина  $\varphi^\circ$  может определяться как

$$\varphi^\circ = \max_{x \in \Omega} \Phi_0 \quad \text{или} \quad \varphi^\circ = \frac{1}{S} \int_{\Omega} \Phi_0 dx$$

где  $\Phi_0$  — заданная функция, такая, что

$$\max_{x \in \Omega} \max_{t \in \Lambda} \Phi_0 = \max_{t \in \Lambda} \max_{x \in \Omega} \Phi_0$$

Тогда для представленных выше выражений  $\varphi^\circ$  функционал  $J_0$  имеет вид

$$J_0 = \max_{t \in \Lambda} \max_{x \in \Omega} \Phi_0 \rightarrow \min_{h(x)} \quad \text{или} \quad J_0 = \max_{t \in \Lambda} \left( \frac{1}{S} \int_{\Omega} \Phi_0 dx \right) \rightarrow \min_{h(x)} \quad (2.3)$$

Аналогично может возникнуть спектр различных интегральных, локально-интегральных и локальных ограничений и изопериметрических условий

$$J_\alpha = \frac{1}{\tau} \int_{\Lambda} \left( \frac{1}{S} \int_{\Omega} \Phi_\alpha dx \right) dt \leq \xi_\alpha \quad (2.4)$$

$$J_\alpha = \max_{t \in \Omega} \left( \frac{1}{S} \int_{\Omega} \Phi_\alpha dx \right) \leq \xi_\alpha, \quad J_\alpha = \max_{t \in \Lambda} \max_{x \in \Omega} \Phi_\alpha \leq \xi_\alpha \quad (\alpha=1, \dots, \alpha_0)$$

Учитывая малое отличие норм в пространстве непрерывных функций и в пространстве  $L_p$  при достаточно больших  $p$ , все функционалы (2.3) и левые части ограничений (2.4) можно записать единообразно, приближенно заменяя  $J_\alpha$  следующими интегральными выражениями:

$$J_\alpha = \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{\Lambda} \left[ \left( \frac{1}{S} \int_{\Omega} \Phi_\alpha r_\alpha dx \right)^{1/r_\alpha} dt \right]^{p_\alpha} \right\}^{1/p_\alpha} = \|\Phi_\alpha\|_{r_\alpha p_\alpha} \quad (\alpha=0, \dots, \alpha_0) \quad (2.5)$$

Выбрав в (2.5) соответствующие значения  $p_\alpha$  и  $r_\alpha$  [16] для исходных локальных величин, задающих критерий качества и изопериметрические условия, и положив  $p_\alpha=1$ ,  $r_\alpha=1$  (совместно или порознь) для интегральных выражений, охватим широкий спектр локальных, интегральных и локально-интегральных функционалов и ограничений. Если  $p_\alpha \neq 1$  или  $r_\alpha \neq 1$ , то соответствующий показатель степени для удобства всегда выбираем четным положительным числом.

Опишем вид подынтегральных функций  $\Phi_\alpha$ , обозначив для краткости через  $D_t[\kappa_r^-, \kappa_r^+; r(x, t)] = \{\partial^r r(x, t)/dt^r, \kappa_r^- \leq \kappa \leq \kappa_r^+\}$  совокупность частных производных некоторой функции  $r(x, t)$  по времени, порядок которых лежит в диапазоне от  $\kappa_r^-$  до  $\kappa_r^+$  (например,  $D_t[0, 1; r(x, t)] = \{r, \partial r/\partial t\}$ ), а через  $D_x[v_r^-, v_r^+; r(x, t)] = \{\partial^v r(x, t)/\partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2}, v_1+v_2=|v|, v_r^- \leq v \leq v_r^+\}$  — совокупность частных производных по пространственным переменным (например,  $D_x[0, 0; r(x, t)] = r(x, t)$ ,  $D_x[0, 1; r(x, t)] = \{r, \partial r/\partial x_1, \partial r/\partial x_2\}$  и т. д.).

Учитывая, что поведение конструкции согласно соотношениям (1.3), (1.4), (1.5), (1.7) определяется функциями  $h(x)$ ,  $u(x, t)$ ,  $T(x, t)$ , а также их частными производными по времени и пространственным переменным, считаем, что и подынтегральные функции  $\Phi_\alpha$ , входящие в (2.5), зависят от указанных аргументов:  $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha\{D_x[v_h^-, v_h^+; h(x)], D_t[\kappa_u^-, \kappa_u^+; u(x, t)], D_x[v_u^-, v_u^+; u(x, t)], D_t[\kappa_T^-, \kappa_T^+; T(x, t)], D_x[v_T^-, v_T^+; T(x, t)]\} = \Phi[\dots]$ . Конкретный список аргументов  $[\dots]$  определяется спецификой оптимизационной задачи. Например, согласно (2.2), часть функций  $\Phi_\alpha$  может зависеть лишь от частных производных управляющих функций по пространственным переменным:  $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha\{D_x[1, 1; h_\beta]\}$  ( $\alpha=\beta=1, \dots, \beta_0$ ).

Обозначив через  $H_0$  множество допустимых управляющих функций, принадлежащих пространству  $W_p^1(\Omega)$  и удовлетворяющих системе неравенств (2.1), (2.2), сформулируем задачу оптимизации: найти вектор управляющих функций  $h(x) \in H_0$ , оптимизирующий функционал качества

$$J_0 = J_0[\dots] \rightarrow \inf_{h \in H_0} \quad (2.6)$$

при ограничениях  $J_\alpha = J_\alpha[\dots] \leq \xi_\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, \alpha_0$ ), которые после введения вспомогательных величин  $\varphi_\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, \alpha_0$ ) записаны в виде изопериметрических условий

$$\varphi_\alpha^2 + J_\alpha[\dots] - \xi_\alpha = 0 \quad (\alpha=1, \dots, \alpha_0) \quad (2.7)$$

3. Формула анализа чувствительности. Необходимые условия оптимальности. Предлагаемый подход к построению оптимального вектора управляющих функций  $h(x)$  базируется на методике последовательной оптимизации, т.е. на пошаговом отыскании вектора вариаций управляющих функций  $\delta h^{(k)}(x)$  ( $h^{(k+1)}(x) = h^{(k)}(x) + \delta h^{(k)}(x)$ ,  $k$  — номер шага), порождающих на каждом шаге такую вариацию функционала  $\delta J_0^{(k)}$ , которая приводит к монотонному улучшению в требуемом смысле критерия качества. Получающиеся при этом вариации  $\delta J_\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, \alpha_0$ ) не должны приводить к нарушению текущих активных ограничений, записанных в виде изопериметрических условий (2.7).

Основным этапом построения указанной последовательности  $\delta h^{(k)}(x)$  является вывод формулы чувствительности вариации функционала  $\delta J_0^{(k)}$  к вариациям вектора управляющих функций  $\delta h^{(k)}(x)$ , выписанных в силу рассматриваемой краевой задачи с учетом изопериметрических условий.

Для этого найдем первую вариацию расширенного функционала Лагранжа  $J = \lambda_m (\varphi_m^2 + J_m - \xi_m)$  ( $m=0, \dots, \alpha_0$ ;  $\lambda_0=1$ ;  $\varphi_0=\xi_0=0$ ;  $\lambda_m$  — множители Лагранжа), обусловленную формальным варьированием вектор-функций  $h(x)$ ,  $u(x, t)$ ,  $T(x, t)$ :  $h(x) + \delta h(x)$ ,  $u(x, t) + \delta u(x, t)$ ,  $T(x, t) + \delta T(x, t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \delta J = & \lambda_m \int_{\Lambda} \int_{\Omega} [U_m^h \delta h(x) + U_m^u \delta u(x, t) + U_m^T \delta T(x, t)] dx dt + \\ & + 2\lambda_m \varphi_m \delta \varphi_m + \lambda_m (R_m^h + R_m^u + R_m^T), \quad U_m^h = W_m^h([\dots]; v_h^-, v_h^+; x) \\ & U_m^u = W_m^u([\dots]; \kappa_u^-, \kappa_u^+; t) + W_m^u([\dots]; v_u^-, v_u^+; x) \\ & U_m^T = W_m^T([\dots]; \kappa_T^-, \kappa_T^+; t) + W_m^T([\dots]; v_T^-, v_T^+; x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

В формуле (3.1) введены обозначения

(3.2)

$$\begin{aligned} W_m^r([\dots]; v^-, v^+; s) = & \sum_{v=v^-}^{v^+} (-1)^v D_s [v, v; \psi_m(x, t) \frac{\partial \Phi_m[\dots]}{\partial (D_s[v, v; \chi(x, t)])}] \\ \Psi_m(x, t) = & \frac{1}{\tau S} \left( \frac{\|\Phi_m\|_r}{\|\Phi_m\|_{rp}} \right)^{p-1} \left( \frac{\Phi[\dots]}{\|\Phi_m\|_r} \right)^{r-1}, \quad \|\Phi_m\|_r = \left( \frac{1}{S} \int_{\Omega} \Phi_m^r[\dots] dx \right)^{1/r} \end{aligned}$$

Величины  $R_m^h = R_m^h(\delta h)$ ,  $R_m^u = R_m^u(\delta u)$ ,  $R_m^T = R_m^T(\delta T)$  из (3.1) образуются в результате взятия по частям интегралов  $\delta J_m[\dots]$  с учетом граничных и начальных условий конкретной краевой задачи. Не выписывая подробно их вид, отметим лишь, что перечисленные величины включают как контурные интегралы по  $\Gamma$  от функций, содержащих дифференциальные операции типа  $D_x[v_h^-, v_h^+ - 1; (h, \delta h)]$ , так и значения соответствующих производных по времени от функций  $u(x, t)$ ,  $T(x, t)$  и их вариаций  $\delta u$ ,  $\delta T$ , вычисленные в граничных точках множества  $\Lambda$ .

Далее остается исключить из (3.1) вариации вектор-функций  $\delta u(x, t)$  и  $\delta T(x, t)$ , выразив их через вариации управляющих функций  $\delta h(x)$ . Для конкретности рассмотрим линейную краевую задачу (1.8). Запишем задачу (1.8) в вариациях и, введя для вектор-функций  $u(x, t) = \{u_1, u_2, w\}$  и  $T(x, t) = \{T_1, T_2\}$  сопряженные вектор-функции  $u^*(x, t) = \{u_1^*, u_2^*, w^*\}$  и  $T^*(x, t) = \{T_1^*, T_2^*\}$ , скалярно умножим на последние соответствующие уравнения в вариациях краевой задачи (1.8). Интегрируя полученные выражения по области  $\Omega$  и множеству временных интервалов  $\Lambda$ , имеем с учетом записанных в вариациях начальных и граничных условий задачи (1.8) следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \int_{\Omega} [(\Lambda_1 \delta T_1 + \Lambda_2 \delta T + \delta \Lambda_1 T_1 + \delta \Lambda_2 T - \delta Q) T^* + (\Lambda_3 \delta u_{1,u} + \Lambda_4 \delta u + \Lambda_5 \delta T + \\ + \delta \Lambda_3 u_{1,u} + \delta \Lambda_4 u + \delta \Lambda_5 T) u^*] dx dt = \int_{\Lambda} \int_{\Omega} [(\Lambda_1^* T_1^* + \Lambda_2^* T^* + \Lambda_3^* u^*) \delta T + \\ + (\Lambda_3^* u_{1,u}^* + \Lambda_4^* u^*) \delta u + (U_T + U_u + U_Q) \delta h] dx dt + R^h + R^u + R^T = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\delta\Lambda_1, \dots, \delta\Lambda_5, \delta Q$  — дифференциальные выражения, определяемые видом проварьированных операторов  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_5$  и функции  $Q, U_T=U_T(h, T, T^*, u^*), U_u=U_u(h, u, u^*), U_Q=U_Q(h, T^*)$  — выражения, получающиеся в результате выделения в виде сомножителя вариации  $\delta h$ ;  $R^h, R^u, R^T$  — величины, образующиеся аналогично величинам  $R_m^h, R_m^u, R_m^T$  из (3.1) при интегрировании по частям. Здесь и далее звездочка означает сопряжение. Записав условие экстремума для функционала Лагранжа ( $\delta J=0$ ) и приравняв в нем нулю (с учетом соотношений (3.3), а также граничных и начальных условий краевой задачи в вариациях) члены, содержащие в качестве сомножителей величины  $\delta u$  и  $\delta T$ , получим следующую краевую задачу для сопряженных функций  $u^*(x, t), T^*(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_3^* u^*_{,t} + \Lambda_4^* u^* + \lambda_m U_m^u &= 0 \\ \Sigma_4^* u^* + \lambda_m r_m^u &= 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \Gamma, \Sigma_5^* u^* = 0 \text{ при } t=t_k \\ \Lambda_1^* T^*_{,t} + \Lambda_2^* T^* + \Lambda_3^* u^* + \lambda_m U_m^T &= 0 \\ \Sigma_1^* T^* + \lambda_m r_m^T &= 0 \text{ на } \Gamma_T \subset \Gamma, \Sigma_2^* T^* = 0 \text{ при } t=t_k \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $r_m^u$  и  $r_m^T$  — соответствующие подынтегральные выражения, входящие в контурные интегралы  $R_m^u$  и  $R_m^T$  из (3.1).

Отметим, что «начальные» условия для сопряженных функций задаются в конечный момент времени  $t_k \in \Lambda$ .

Исключив указанным способом из выражения для вариации функционала  $\delta J$  члены, обусловленные вариацией вектор-функций  $u(x, t)$  и  $T(x, t)$ , и подчинив условиям  $\lambda_m \varphi_m = 0$  вспомогательные величины  $\varphi_m$  ( $m=1, \dots, \alpha_0$ ), в итоге приходим к основной формуле анализа чувствительности, из которой как следствие вытекает условие оптимальности и с помощью которой строятся различные алгоритмы метода последовательной оптимизации (т.е. метода, позволяющего осуществить монотонное улучшение в требуемом смысле критерия качества термоупругой системы, не нарушая накладываемых на нее конструктивных, технологических и прочих ограничений):

$$\delta J = \int_{\Omega} \int_{\Delta} U_{\alpha}^h \delta h dt dx + \int_{\Gamma} \int_{\Delta} U_{\Gamma}^h \delta h dt d\Gamma \quad (3.5)$$

$U_{\alpha}^h = U_T(h, T, T^*, u^*) + U_u(h, u, u^*) + U_Q(h, T^*) + \lambda_m U_m^h, U_{\Gamma}^h = r^h + \lambda_m r_m^h$  где  $r^h, r_m^h$  — подынтегральные выражения в  $R^h, R_m^h$ .

Учтем ограничения (2.1) на компоненты управляющего вектора  $h_{\beta}(x)$ , что можно осуществить несколькими способами [11, 12, 17, 18]. Так, введем вспомогательную управляющую вектор-функцию  $\gamma(x) = \{\gamma_{\beta}(x)\}$  по закону  $h_{\beta}(x) = 1/2 [h_{\beta}^{+}(x) + h_{\beta}^{-}(x)] + 1/2 [h_{\beta}^{+}(x) - h_{\beta}^{-}(x)] \sin \gamma_{\beta}(x)$ , производная вариация которой никогда не нарушает ограничений (2.1). Следовательно, не умаляя общности, можно считать, что в (3.5) вариации  $\delta h$  произвольны и ограничения (2.1) удовлетворяются автоматически.

Из условия экстремума функционала  $\delta J=0$  с учетом произвольности вариации  $\delta h$  получим из (3.5) необходимые условия оптимальности:

$$\int_{\Lambda} U_{\alpha}^h dt = 0, \quad \int_{\Lambda} U_{\Gamma}^h dt = 0.$$

а выбирая в области  $\Omega$  и на ее границе  $\Gamma$  вариации  $\delta h$ , например, в виде

$$\delta h_{\alpha} = - \left( \int_{\Lambda} U_{\alpha}^h dt \right)^n, \quad \delta h_{\Gamma} = - \left( \int_{\Lambda} U_{\Gamma}^h dt \right)^n$$

обеспечим в вычислительных алгоритмах монотонное уменьшение (если  $n$  — нечетное целое число) или увеличение ( $n$  — четное число) критерия качества  $J_0$ .

**4. Оптимальное проектирование композитных конструкций.** Применим изложенную методику сведения задач оптимизации с локальными функционалами и ограничениями к задачам с интегральными характери-

стиками для вывода формул анализа чувствительности и условий оптимальности в конкретных задачах оптимального проектирования пластин и пологих оболочек, выполненных из композитного материала. Введем новый элемент в постановку задачи оптимизации: считаем, что свойства материала зависят от температуры, т. е.  $D_{ijkl} = D_{ijkl}(x, T)$ ,  $K_{ijkl} = K_{ijkl}(x, T)$ .

Итак, требуется выбором распределения толщины  $h_1(x)$  и концентрации армирующих включений  $h_2(x)$  (управляющий вектор имеет две компоненты) минимизировать максимальные на отрезке времени  $\Lambda = [0, \tau]$  нестационарные термоупругие смещения конструкции ( $a_w, a_u = 0, 1; a_w + a_u \neq 0$ ):

$$J_0 = \max_{t \in \Lambda} \max_{x \in \Omega} \sqrt{a_w w^2 + a_u u_i u_i} \approx \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{\Lambda} \left[ \frac{1}{S} \int_{\Omega} (\sqrt{a_w w^2 + a_u u_i u_i})^r dx \right]^{p/r} dt \right\}^{1/p} \rightarrow \min_{h_1, h_2} \quad (4.1)$$

При  $a_w = 0, 1; a_u = 1$  минимизируются смещения в плоскости пластины или полные смещения пластины (задача 1), а при  $a_w = 0, a_u = 1$  — поперечный прогиб гибкой пластины или пологой оболочки (задача 2).

Считаем, что значения компонент управляющего вектора (толщина конструкции и концентрация включений) на границе области  $\Omega$  заданы и в процессе оптимизации не варьируются.

В изопериметрические условия включим накладываемые на соответствующую компоненту управляющего вектора конструктивное и технологическое ограничения (2.2), записанные в виде

$$J_\alpha = \frac{1}{\tau} \int_{\Lambda} \left[ \frac{1}{S} \int_{\Omega} (\sqrt{h_{\alpha,i} h_{\alpha,i}})^{r_\alpha} dx \right]^{1/r_\alpha} dt - \xi_\alpha + \varphi_\alpha^2 = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4.2)$$

а также условие постоянства массы композитной конструкции  $\mu$

$$J_3 = \frac{1}{\tau} \int_{\Lambda} \int_{\Omega} m^\circ dx dt - \mu = 0, \quad m^\circ = 2h_1(x) [\rho_+ + (\rho_+ - \rho^\circ) h_2(x)] \quad (4.3)$$

где  $\rho_+, \rho^\circ$  — соответственно плотность армирующих включений и матрицы композита.

Как следует из п. 3, вид формулы анализа чувствительности существенно зависит от конкретного вида определяющих соотношений, граничных и начальных условий краевой задачи. В случае линейного деформирования пластин (задача 1) определяющие соотношения (1.4)–(1.7) удобно записать в перемещениях

$$(K_{ijkl} u_{k,l} - \theta_{ij}^N)_{,j} + F_i - m^\circ u_{i,tt} = 0, \quad (D_{ijkl} w_{,kl} + \theta_{ij}^M)_{,ji} - P + m^\circ w_{,tt} = 0 \quad (4.4)$$

а в случае нелинейного деформирования гибких пластин и пологих оболочек (задача 2) — в виде (1.9).

Для определенности выберем в задачах 1, 2 следующие начальные и граничные условия для величин  $T_n$  из (1.3), а также для  $u_i, w$  и  $\Phi$  из (4.4) и (1.9):

$$\begin{aligned} T_n(x, 0) = 0 \quad (t=0); \quad T_n(l, t) = 0 \quad (l \in \Gamma) \\ u_i(x, 0) = u_{i,t}(x, 0) = 0 \quad (t=0); \quad u_i(l, t) = 0 \quad (l \in \Gamma) \\ w(x, 0) = w_{,t}(x, 0) = 0 \quad (t=0); \quad w(l, t) = w_{,i}(l, t) = 0 \quad (l \in \Gamma) \\ w(l) = w_{,i}(l) = 0; \quad \Phi(l) = \Phi_{,i}(l) = 0 \quad (l \in \Gamma) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Чтобы исключить из выражения для вариации функционала Лагранжа  $\delta J = \delta J_0 + \lambda_m \delta J_m + \lambda_3 \delta J_3$  ( $m = 1, 2$ ) члены, содержащие вариации  $\delta u_i$  и  $\delta w$ , введем сопряженные функции  $T_n^*, u_i^*, w^*$  и  $T_n^*, w^*, \Phi^*$  ( $n = 1, 2$ ). Выпишем в вариациях соответствующие уравнения из (1.3), (4.4) и (1.9). Умножим скалярно уравнения в вариациях на сопряженные переменные и проинтегрируем полученные скалярные произведения по областям  $\Lambda$  и  $\Omega$ . Сложим для каждой из задач вариацию  $\delta J$  с соответствующим проинтегрированным скалярным произведением и выделим в суммарном подинтегральном выражении (с учетом проварьированных конкретных



граничных и начальных условий (4.5)) члены, содержащие сомножителями величины  $\delta T_n$ ,  $\delta u_i$ ,  $\delta w$  (в задаче 1) и  $\delta T_n$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \Phi$  (в задаче 2). Приравнявая нулю выделенные члены, получим следующие краевые задачи для сопряженных переменных:

$$\begin{aligned}
 m^\circ w_{,t_*}^* + (D_{ijkl} w_{,ij}^*)_{,lk} - \psi_0 \Phi_0^{-1} w &= 0, \\
 m^\circ u_{h,t_*}^* + (K_{ijkl} u_{i,j}^*)_{,l} - \psi_0 \Phi_0^{-1} u_h &= 0 \\
 m^1 T_{n,t_*}^* - (h_1 k_{ij} T_{n,i}^*)_{,j} + H_{\mu_{sn}} T_s^* + \delta_{n2} \mu_n T_n^* &= \\
 = a_u u_{i,j}^* \left( \delta_{n1} \frac{\partial K_{ijkl}}{\partial T_n} u_{h,l} - \frac{\partial \theta_{ij}^N}{\partial T_n} \right) - a_w w_{,ij}^* \left( \delta_{n1} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial T_n} w_{,kl} + \frac{\partial \theta_{ij}^M}{\partial T_n} \right) & \quad (4.6) \\
 w^*(x, 0) = w_{,i}^*(x, 0); \quad u_i^*(x, 0) = u_{i,t_*}^*(x, 0) = 0; \quad T_n^*(x, 0) = 0 \quad (t_* = 0) \\
 w^*(l, t_*) = w_{,i}^*(l, t_*) = 0; \quad u_i^*(l, t_*) = 0; \quad T_n^*(l, t_*) = 0 \quad (l \in \Gamma) \\
 \gamma_{is} \gamma_{jr} [\Phi_{,vp} \gamma_{kp} \gamma_{lv} K_{ijkl}^{-1} - w^*(w+z)_{,ij}] = 0 \\
 [D_{ijkl} w_{,ij}^* + \Phi_{,vp} \gamma_{kp} \gamma_{lv} (1/2 w+z)_{,pv}]_{,lk} - \\
 - (w^* \gamma_{is} \gamma_{jr} \Phi_{,sr})_{,ji} + 1/2 (\Phi^* \gamma_{kp} \gamma_{lv} w_{,kl})_{,vp} - \psi_0 \Phi_0^{-1} w = 0 \\
 m^1 T_{n,t_*}^* - (h_1 k_{ij} T_{n,i}^*)_{,j} + H_{\mu_{sn}} T_s^* + \delta_{n2} \mu_n T_n^* &= \\
 = -\gamma_{kp} \gamma_{lv} \Phi_{,vp} \left[ \delta_{n1} \frac{\partial K_{ijkl}^{-1}}{\partial T_n} (\gamma_{is} \gamma_{jr} \Phi_{,sr} + \theta_{ij}^N) + K_{ijkl}^{-1} \frac{\partial \theta_{ij}^N}{\partial T_n} \right] - \\
 - w_{,ij}^* \left( \delta_{n1} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial T_n} w_{,kl} + \frac{\partial \theta_{ij}^M}{\partial T_n} \right) \\
 w^*(l, t_*) = w_{,i}^*(l, t_*) = 0, \quad \Phi^*(l, t_*) = \Phi_{,i}^*(l, t_*) = 0 \\
 T_n^*(l, t_*) = 0 \quad (l \in \Gamma), \quad T_n^*(x, 0) = 0 \quad (t_* = 0) \quad (n, s, r, v, p = 1, 2) \\
 \Phi_0 = \sqrt{a_w w^2 + a_u u_i u_i}, \quad t_* = \tau - t, \quad m^1 = 1/2 m^\circ c
 \end{aligned}$$

где функция  $\psi_0 = \psi_0(x, t_*)$  определяется согласно формулам (2.5), (3.2),  $\delta_{ns}$  — символ Кронекера.

Накладывая на вспомогательные величины  $\varphi_m$  условие  $\lambda_m \varphi_m = 0$ , выпишем оставшиеся слагаемые в выражении для вариации функционала  $\delta J$ . В итоге получим формулу анализа чувствительности (формулу, явно связывающую вариацию оптимизируемого функционала с вариацией управляющих функций  $h_1(x)$  и  $h_2(x)$ ), которая для задачи 1 имеет вид

$$\begin{aligned}
 \delta J_0 &= \int \left( \int_{\Omega} \Omega_m dt \right) \delta h_m dx \quad (4.7) \\
 \Omega_m &= \frac{\lambda_m}{\tau S} \left[ \left( \frac{\Phi_m}{\|\Phi_m\|_{r_m}} \right)^{r_m-1} \Phi_m^{-1} h_{m,i} \right]_{,i} + \frac{\lambda_s}{\tau} \frac{\partial m^\circ}{\partial h_m} + B_m + a_w \left[ \frac{\partial m^\circ}{\partial h_m} w_{,it} w^* + \right. \\
 &+ w_{,ij}^* \left( \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial h_m} w_{,kl} + \frac{\partial \theta_{ij}^M}{\partial h_m} \right) \left. \right] + a_u \left[ \frac{\partial m^\circ}{\partial h_m} u_{i,t} u_i^* - u_{i,j}^* \left( \frac{\partial K_{ijkl}}{\partial h_m} u_{h,l} - \frac{\partial \theta_{ij}^N}{\partial h_m} \right) \right] \\
 B_m &= \frac{\partial m^1}{\partial h_m} T_{n,i} T_n^* + T_{n,j} \left( \delta_{m1} k_{ij} + \delta_{m2} \frac{\partial k_{ij}}{\partial h_m} h_1 \right) T_{n,i}^* + \delta_{n2} T_n \frac{\partial \mu_n}{\partial h_m} T_n^* - \\
 &- \delta_{m1} \left[ \frac{\partial H}{\partial h_{m,i}} (\mu_{ns} T_s - \gamma_n) T_n^* + \delta_{n2} T_n \frac{\partial \mu_n}{\partial h_{m,i}} T_n^* \right]_{,i} + \delta_{m1} \delta_{n2} \left( T_n \frac{\partial \mu_n}{\partial h_{m,ij}} T_n^* \right)_{,ji}
 \end{aligned}$$

Для задачи 2 следует в подынтегральном выражении  $\Omega_m$  из (4.7) заменить два последних слагаемых на сумму  $\gamma_{kp} \gamma_{lv} \Phi_{,vp}^* [(\partial K_{ijkl}^{-1} / \partial h_m) (\gamma_{is} \gamma_{jr} \Phi_{,sr} + \theta_{ij}^N) + K_{ijkl}^{-1} (\partial \theta_{ij}^N / \partial h_m)] + w_{,ij}^* [(\partial D_{ijkl} / \partial h_m) w_{,kl} + (\partial \theta_{ij}^M / \partial h_m)]$ .

Из условия  $\delta J=0$ , приравняв нулю подинтегральное выражение, приходим с учетом произвольности  $\delta h_m$  к следующим необходимым условиям оптимальности:

$$\int_0^1 \Omega_m dt = 0 \quad (m=1, 2) \quad (4.8)$$

Итак, для нахождения искомых компонент вектора управляющих функций  $h_1, h_2$  имеем замкнутую систему уравнений (1.3), (4.4)–(4.6), (4.8) (в задаче 1) или (1.3), (1.9), (4.5), (4.6), (4.8) (в задаче 2), а также изопериметрические условия (4.2), (4.3) и связь  $\lambda_m \varphi_m = 0$ . Если один из коэффициентов  $a_n$  или  $a_n$  из (4.1) в задаче 1 равен нулю, то из крайних задач (4.4)–(4.6) следует исключить соответствующие уравнения, крайние и начальные условия.

**5. Оптимальное проектирование гибких конструкций.** Чтобы нагляднее выделить существо вопроса в задачах оптимального проектирования гибких конструкций с учетом нестационарного теплового взаимодействия с внешней средой, упростим постановку задачи 2 из п. 4: проведем анализ чувствительности и выведем условия оптимальности в задаче с локальным по времени и интегральным по пространственным координатам функционалом при идеализации некоторых граничных условий.

Рассмотрим прямоугольную в плане ( $\Omega = \{-a \leq x_1 \leq a; -b \leq x_2 \leq b\}$ ,  $a \gg b$ ) гибкую пологую оболочку с переменной в направлении координаты  $x_2$  толщиной  $2h(x_2)$  и нагруженную по торцам  $x_1 = \pm a$  крутящим моментом  $K$  и изгибающим моментом  $M$ .

Продольные кромки оболочки свободны от усилий:  $N_{22} = \Phi_{,11} = 0$ ,  $N_{12} = \Phi_{,12} = 0$  при  $x = \pm b$ .

Тепловое взаимодействие с внешней средой порождает в оболочке нестационарное поле температур, пространственное распределение которого зависит лишь от одной координаты  $x_2$ :  $T = \{T_1(t, x_2), T_2(t, x_2)\}$ .

Оболочка выполнена из изотропного материала с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом линейного расширения  $\alpha$ , величины которых зависят от температуры по линейному закону:  $E = E(T) = E_0 + E_1 T$ ,  $\alpha = \alpha(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T$  ( $E_0, E_1, \alpha_0, \alpha_1$  – заданные константы). Коэффициент Пуассона  $\nu$  от температуры не зависит.

Считаем, что функции  $h = h(x_2)$ ,  $T_1 = T_1(t, x_2)$ ,  $T_2 = T_2(t, x_2)$ , а следовательно, и функции, задающие свойства материала оболочки, симметричны относительно оси  $x_2 = 0$ .

Учитывая характер термосилового нагружения и допущение о симметрии геометрических и структурных свойств, представим прогибы оболочки в виде

$$w = 1/2 A_{13} x_1 x_2 + W(x_2), \quad A_{22} = -\nu A_{11} = \nu \kappa, \quad 1/2 (A_{12} + A_{21}) = \varphi \quad (5.1)$$

где  $W = W(x_2)$  – неизвестная функция, удовлетворяющая дополнительным условиям  $W(0) = W_{,2}(0) = 0$ ; константы  $\kappa$  и  $\varphi$  характеризуют соответственно кривизну и закрутку деформированной оболочки.

Подставив представление (5.1) в систему (1.9), получим (с учетом равенства  $N_{11} = \Phi_{,22}$ ) дифференциальные уравнения

$$1/2 [B^{-1} (N_{11} + \vartheta_N) - \kappa (W + z)]_{,22} = \sigma \quad (5.2)$$

$$[DW_{,22} + (1 + \nu)\vartheta_M]_{,22} = -\kappa * N_{11}$$

которые при помощи осредненных граничных условий  $\int N_{11} dx_2 = 0$ ,  $\int N_{12} dx_2 = 0$  ( $-b \leq x_2 \leq b$ ), задаваемых на торцах оболочки  $x_2 = \pm a$ , и точных граничных условий  $DW_{,22} + (1 + \nu)\vartheta_M = [DW_{,22} + (1 + \nu)\vartheta_M]_{,2} = 0$ , задаваемых на продольных кромках  $x_2 = \pm b$ , сведем (при дополнительных условиях  $W(0) = W_{,2}(0) = 0$ ) к системе интегральных уравнений

$$N_{11} = -\vartheta_N + BY \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
 W &= (1+\nu) \left( \chi^- \int_{x_2} \frac{x_2 - \xi}{D} \vartheta_M d\xi + \chi^+ \int_0^{x_2} \frac{\xi - x_2}{D} \vartheta_M d\xi \right) + \kappa^* (\chi^- \Sigma^- [N_{11}] + \chi^+ \Sigma^+ [N_{11}]) \\
 B &= \int_{-h}^h E d\xi, \quad D = \int_{-h}^h E \xi^2 d\xi, \quad \vartheta_N = \int_{-h}^h \left( E \int_0^T \alpha dT \right) d\xi, \\
 \vartheta_M &= \int_{-h}^h \left( E \xi \int_0^T \alpha dT \right) d\xi \\
 \sigma &= 1/2 (\varphi^2 + \nu \kappa^2), \quad \kappa^* = (1 - \nu^2) \kappa, \quad Y = \vartheta_N + \sigma X + \kappa (U + Z) \\
 X &= x_2^2 - A^{-1} \int_{-b}^b B x_2^2 dx_2, \quad U = W - A^{-1} \int_{-b}^b B W dx_2, \quad Z = z - A^{-1} \int_{-b}^b B z dx_2
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

$$\vartheta_N = A^{-1} \int_{-b}^b \vartheta_N dx_2, \quad A = \int_{-b}^b B dx_2, \quad \Sigma^- [N_{11}] = \int_{x_2} \frac{x_2 - \xi}{D(\xi)} d\xi \int_{-b}^{\xi} (\xi - \eta) N_{11}(\eta) d\eta$$

$$\Sigma^+ [N_{11}] = \int_0^{x_2} \frac{x_2 - \xi}{D(\xi)} d\xi \int_{\xi}^b (\xi - \eta) N_{11}(\eta) d\eta$$

где  $\chi^- = 1$  при  $x_2 \leq 0$ ,  $\chi^- = 0$  при  $x_2 > 0$ ,  $\chi^+ = 0$  при  $x_2 < 0$ ,  $\chi^+ = 1$  при  $x_2 \geq 0$ .

Вычислив в (5.4) четыре первых интеграла с учетом линейной зависимости  $E$  и  $\alpha$  от температуры, получим следующие явные выражения величин  $B$ ,  $D$ ,  $\vartheta_N$ ,  $\vartheta_M$  через функции  $h$ ,  $T_1$  и  $T_2$ :  $B = 2Ah$ ,  $D = 2/3 Ah^3$ ,  $\vartheta_N = 2 [(\alpha_0 E_0 + A_1 T_1 + 1/2 \alpha_1 E_1 T_1^2) T_1 + 1/6 (\alpha_1 E_0 + 2\alpha_0 E_1 + 3\alpha_1 E_1 T_1) T_2^2] h$ ,  $\vartheta_M = 2 T_2 \cdot [1/6 (\alpha_0 E_0 + 4A_1 T_1 + 3\alpha_1 E_1 T_1^2) + 1/10 \alpha_1 E_1 T_2^2] h^2$ ,  $A_0 = E_0 + E_1 T_1$ ,  $A_1 = 1/2 \alpha_1 E_0 + \alpha_0 E_1$ .

Формула для определения скручивающего момента в зависимости от крутки  $\varphi$  и осевых усилий  $N_{11}$  имеет вид

$$K = \varphi C, \quad C = \frac{2}{1+\nu} \int_{-b}^b D dx_2 + \int_{-b}^b N_{11} x_2^2 dx_2
 \tag{5.5}$$

Величину  $C = C(\varphi, \kappa)$  назовем эффективной крутильной жесткостью оболочки. Как следует из соотношений (5.3) – (5.5), определенные режимы тепловых нагрузок могут породить нестационарные осевые усилия  $N_{11}(x_2, t)$ , вызывающие снижение эффективной крутильной жесткости рассматриваемой тонкостенной конструкции [19].

Возникает задача оптимизации: при заданной на отрезке времени  $\Lambda = [0, \tau]$  программе тепловых нагружений и фиксированных значениях крутки  $\varphi$  и кривизны  $\kappa$  выбором распределения толщин в оболочке (функции  $h = h(x_2)$ ) максимизировать минимальное на отрезке времени  $\Lambda$  значение величины  $C$ . Искомая функция  $h(x_2)$  подчиняется изопериметрическому условию постоянства объема конструкции:  $V = \text{const}$  и ограничениям (1.1), (2.1).

Предположим, что тепловое нагружение порождает унимодальную зависимость величины  $C$  от времени  $t$ , причем минимальные значения изгибной и крутильной жесткости оболочки строго положительны, т. е. оболочка не теряет устойчивость при скручивании в изгибе. Тогда аппроксимируем функционал задачи интегралом

$$J_0 = \left\{ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [C_0 - C(t)]^p dt \right\}^{1/p} \rightarrow \min_h$$

где  $C_0$  – жесткость на кручение оболочки в начальный момент времени, и выпишем его вариацию с учетом зависимости физических характери-

стик материала от температуры

$$\delta J_0 = \int_{-b}^b dx_2 \int_0^\tau \Phi_p(t) (V_h \delta h + V_{T_1} \delta T_1 + V_{T_2} \delta T_2 + V_w \delta W) dt$$

$$V_h = \frac{2}{1+\nu} \frac{\partial D}{\partial h} + X \left( \frac{\partial B}{\partial h} Y - \frac{\partial \vartheta_N}{\partial h} \right), \quad V_{T_1} = \frac{2}{1+\nu} \frac{\partial D}{\partial T_1} + X \left( \frac{\partial B}{\partial T_1} Y - \frac{\partial \vartheta_N}{\partial T_1} \right)$$

$$V_{T_2} = -X \frac{\partial \vartheta_N}{\partial T_2}, \quad V_w = \kappa B X, \quad \Phi_p(t) = - \left( \frac{C_0 - C(t)}{\|C_0 - C\|_p} \right)^{p-1} \quad (5.6)$$

Чтобы исключить в формуле (5.6) из подынтегрального выражения слагаемые, содержащие множителями вариации  $\delta T_1$ ,  $\delta T_2$  и  $\delta W$ , введем сопряженные функции  $T_1^*$ ,  $T_2^*$ ,  $W^*$  и воспользуемся уравнениями теплопроводности (1.3) (положив в них для простоты  $\mu^- = \mu^+$ ) и системой (5.2), сводящейся с учетом граничных условий к (5.3). Записав систему уравнений теплопроводности

$$\rho c h T_{2,t} + L_{22} T_2 + Q_2 = 0, \quad \rho c h T_{1,t} + L_{11} T_1 + L_{12} T_2 + Q_1 = 0 \quad (5.7)$$

где вид операторов  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  и функций  $Q_1$ ,  $Q_2$  определяется структурой уравнений (1.3), и, применив изложенную ранее методику исключения вариаций фазовых переменных, получим систему уравнений

$$N_{11}^* = B Y^*, \quad W^* = \chi^- \Sigma^- [N_{11}^*] + \chi^+ \Sigma^+ [N_{11}^*] \quad (5.8)$$

$$\rho c h T_{1,t}^* + L_{11} T_1^* + \Phi_p^* \frac{\partial D}{\partial T_1} + (1+\nu) W_{,22}^* \frac{\partial \vartheta_M}{\partial T_1} + Y^* \left( \frac{\partial B}{\partial T_1} Y - \frac{\partial \vartheta_N}{\partial T_1} \right) = 0$$

$$\rho c h T_{2,t}^* + L_{22} T_2^* + L_{12} T_1^* + (1+\nu) W_{,22}^* \frac{\partial \vartheta_M}{\partial T_2} - Y \frac{\partial \vartheta_M}{\partial T_2} = 0$$

$$Y^* = \Phi_p X + \kappa^* U^*, \quad t_* = \tau - t, \quad \Phi_p^* = 2\Phi_p / (1+\nu) + W_{,22}^* W_{,22}$$

$$U^* = W^* - A^{-1} \int_{-b}^b B W^* dx_2$$

к которой для определения сопряженных величин необходимо добавить соответствующие однородные граничные и начальные условия, обусловленные характером теплового нагружения.

В итоге, вариация функционала  $J_0$  в силу уравнений теплопроводности (1.3), а также совместности и изгиба (1.9) имеет вид

$$\delta J_0 = \langle e_0, \delta h \rangle = \int_{-b}^b e_0 \delta h dx_2 \quad (5.9)$$

$$e_0 = \int_0^\tau \left[ \Phi_p^* \frac{\partial D}{\partial h} + (1+\nu) W_{,22}^* \frac{\partial \vartheta_M}{\partial h} + Y^* \left( \frac{\partial B}{\partial h} Y - \frac{\partial \vartheta_N}{\partial h} \right) + B_1 \right] dt$$

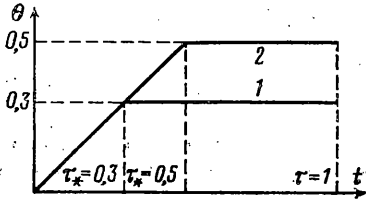
где слагаемое  $B_1$  определяется согласно формулам (4.7) с  $h_1 = h$ ; угловыми скобками обозначено скалярное произведение.

Имея в распоряжении выражение для вариации функционала  $J_0$ , записав изопериметрическое условие постоянства объема  $\delta V = \langle e, \delta h \rangle$  и присоединив необходимое число ограничений, записанных аналогично:  $\delta J_m = \langle e_m, \delta h \rangle + 2\varphi_m \delta \varphi_m$ , получим с учетом равенства  $\lambda_m \varphi_m = 0$  формулу анализа чувствительности  $\delta J = \langle e_0 + \lambda e + \lambda_m e_m, \delta h \rangle$  ( $\lambda, \lambda_m$  — множители Лагранжа) и как следствие условие оптимальности  $e_0 + \lambda e + \lambda_m e_m = 0$  ( $m=1, \dots$ ). Кроме того, полученные формулы вариаций функционала и изопериметрических условий позволяют построить градиентные процедуры оптимизации [11, 12, 17, 18] и получить оптимальное решение численно.

**6. Алгоритмы численной реализации метода последовательной оптимизации.**  
**Примеры.** Опишем методику численного отыскания оптимальных решений, предположив, что функции  $\theta^\pm$ ,  $\theta_n$  из (1.3), задающие температуру внешней среды, изменяются по закону  $\theta^\pm(x, t) = \theta(t) \theta_\alpha^\pm(x)$ ,  $\theta_n(l, t) = \theta(t) \theta_n^\circ(l)$ , где  $\theta(t) = \vartheta t$  при  $0 \leq t \leq \tau_*$

$\theta(t) = \Phi \tau_*$  при  $t > \tau_*$  ( $\Phi > 0$ ),  $x \in \Omega$ ,  $l \in \Gamma$ . Для расчетов выберем изображенные на фиг. 1 функции  $\theta(t)$  с  $\Phi=1$ , задав  $\tau=1$  и положив для сформулированных ниже задач 1', 1'' и 2 соответственно  $\tau_*=0,3; 0,3; 0,5$  (кривые 1 и 2). (Все величины здесь и далее приводятся в безразмерном виде.)

Вид функций  $\theta_{\alpha^{\pm}}(x)$ ,  $\theta_{\alpha^{\circ}}$  зададим согласно геометрическим характеристикам рассматриваемых конструкций так, чтобы в задаче 1 из п. 4 смоделировать случай деформирования пластин в своей плоскости (задача 1') или случай поперечного изгиба пластины (задача 1''), а в задаче 2 из пп. 4, 5 (учитывая, что прямоугольной в плане гибкой полой оболочкой часто моделируют несущую поверхность прямого крыла) — случай нелинейного деформирования конструкции при наличии в ней не зависящих от координаты  $x_1$  осевых температурных напряжений  $N_{11}(t, x_2)$ , вызванных неравномерным аэродинамическим нагревом обшивки на определенных режимах полета летательного аппарата [19].



Фиг. 1

Итак, в задачах 1' и 1'' выберем соответственно следующие функции:  $\theta_{\alpha^+}(x) = \theta_{\alpha^+}(x)$ ,  $\theta_{\alpha^{\circ}}(l) = \theta_{\alpha^+}(l)$  и  $\theta_{\alpha^-}(x) = -\theta_{\alpha^+}(x)$ ,  $\theta_{\alpha^{\circ}}(l) = \theta_{\alpha^+}(l)$ , где  $\theta_{\alpha^+}(x) = \cos(\frac{1}{2}\pi x_1) \cos(\frac{1}{2}\pi x_2)$ ,  $x \in \Omega \{-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$ ,  $l \in \Gamma$ , а в задаче 2  $-\theta_{\alpha^-}(x_2) = \theta_{\alpha^+}(x_2) = x_2^2$ ,  $\theta_{\alpha^{\circ}}(\pm 1) = 1$ , где  $-1 \leq x_2 \leq 1$ . Кроме того, во всех случаях при расчетах в уравнениях (1.3) положим  $\mu^+ = \mu^- = 1$ ,  $Q_n = q_n = 0$ ,  $T_n^{\circ} = 0$ ,  $\mu_{\Gamma} = 1$ , а в уравнениях (1.5)  $-F_i = N_i^{\Gamma} = M_i^{\Gamma} = Q_z^{\Gamma} = P = 0$ ,  $u_i^{\circ} = w^{\circ} = w, t^{\circ} = u_{i,t}^{\circ} = 0$ .

Для нахождения оптимальных распределений толщин  $h(x)$ , минимизирующих в задачах 1', 1'' соответственно максимальное термомеханическое смещение  $(u_i u_i)^{1/2}$  и прогиб  $|w|$  или максимизирующих в задаче 2 минимальное значение эффективной крутильной жесткости  $C$  при постоянном объеме конструкции  $V$  и ограничениях на значения и градиенты толщины  $h^- \leq h \leq h^+$ ,  $|\nabla h| \leq \xi$ , предлагается алгоритм метода последовательной оптимизации.

Алгоритм состоит из шагов. На первом этапе  $k$ -го шага при известном текущем распределении толщин  $h^{(k)}(x)$  в задачах 1', 1'' и 2 вначале отыскивается нестационарное поле температур в конструкции, а затем соответственно нестационарные смещения, прогибы или функция  $W$ .

Чтобы решить нестационарную задачу теплопроводности, разобьем отрезок времени  $[0, \tau]$  на  $N$  равных промежутков  $\Delta = \tau/N$  сеткой  $t_n = n\Delta$ ,  $0 \leq n \leq N$  и, выписав устойчивую неявную разностную схему по времени  $t$  и вышуклую вариационно-разностную по пространственным переменным  $x$  [11, 20–22], сведем, например в задаче 2, решение одномерной краевой задачи теплопроводности  $(AT_{,2})_{,2} - BT = Q + ST, t$ ,  $\alpha + \alpha_0 T(-1) - \alpha_1 T_{,2}(-1) = 0$ ,  $\beta + \beta_0 T(1) + \beta_1 T_{,2}(1) = 0$ ,  $T(0) = T^{(0)}$  к последовательному отысканию функций  $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(N)}$ , минимизирующих последовательность функционалов  $\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(N)}$ :

$$\pi^{(n)} = \pi[T^{(n)}] = \int_{-1}^1 [AT_{,2}^{(n)} T_{,2}^{(n)} + (B+S/\Delta)T^{(n)}T^{(n)} + 2(Q-ST^{(n-1)}\Delta^{-1})T^{(n)}] dx_2 + \\ + A(-1) [2\alpha T^{(n)}(-1) + \alpha_0 T^{(n)}(-1)T^{(n)}(-1)] \alpha_1^{-1} + \\ + A(1) [2\beta T^{(n)}(1) + \beta_0 T^{(n)}(1)T^{(n)}(1)] \beta_1^{-1}$$

Используя указанный подход сведения нестационарной краевой задачи к последовательности вариационных задач, отыскиваем в случае 1' и 1'' поля перемещений и прогибов, отвечающие найденным полям температур. В задаче 2 функцию  $W$  и соответствующие осевые усилия  $N_{11}$  отыскиваем, решая интегральные уравнения (5.3) итерационным методом.

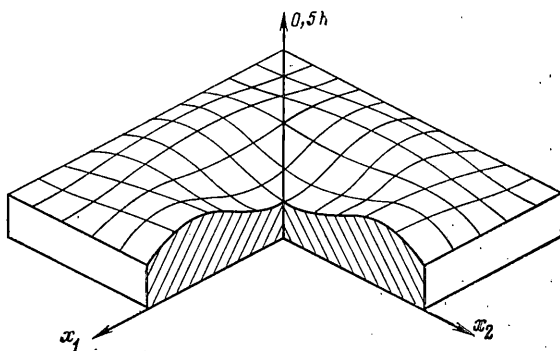
На втором этапе  $k$ -го шага в силу очевидной аналогии сопряженных и прямых краевых задач (1.3), (4.4), (1.9), (4.6), (5.3), (5.8) находим сопряженные переменные с помощью схем и подходов, уже использовавшихся для отыскания «прямых» полей.

На заключительном этапе  $k$ -го шага, используя значения нестационарных полей в моменты времени  $t_n$  ( $0 \leq n \leq N$ ), вычисляем входящие в формулы анализа чувствительности интегралы по времени (4.8), (5.9) и на основе полученных стационарных распределений, а также алгоритмов метода проекции градиентов [5, 9, 11, 12, 17, 18] задаем новое улучшенное распределение толщин  $h^{(k+1)}(x)$ .

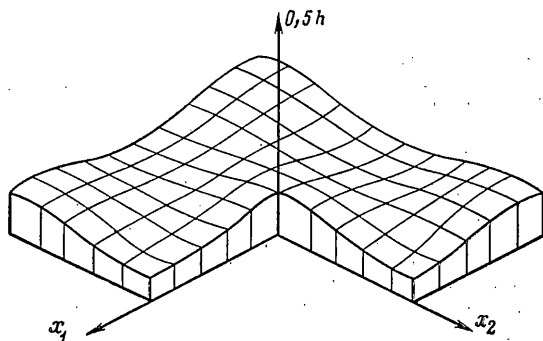
На фиг. 2 и 3 изображены найденные после пяти шагов последовательной оптимизации ( $k_*=5$ ) улучшенные распределения толщин в упругих изотропных шарнирно опертых квадратных пластинах ( $\nu=0,3$ ,  $h^-=0,9$ ,  $h^+=1,1$ ,  $\xi=10$ ,  $V=4$ ,  $\rho=1$ ,  $c=1$ ,  $k_{ij}=k_2=1$ ) для задач 1' и 1''.

Изображенные на фиг. 2, 3 распределения отвечают разбиению области  $\Omega$  сеткой  $20 \times 20$ , причем в силу симметрии теплового нагружения расчеты проводились на четверти области  $\Omega$ , и разбиению интервала  $\Lambda = [0, 1]$  на десять равных промежутков времени ( $N=10$ ).

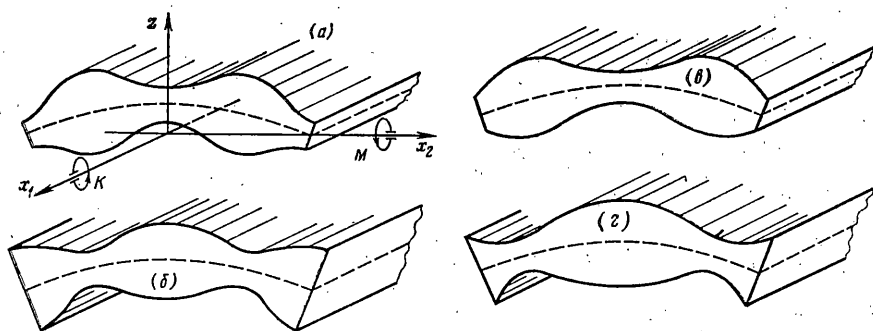
Для рассматриваемых типов функционалов и при выбранных здесь скоростях температурного нагружения ( $\Phi=1$ ) представленные на фиг. 2, 3 распределения силового материала качественно отслеживают полученные в [11] распределения толщин для аналогично закрепленных по контуру оптимальных конструкций при дей-



Фиг. 2



Фиг. 3

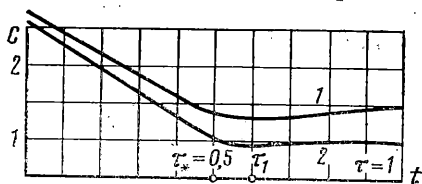


Фиг. 4

ствии на них соответствующих стационарных термосиловых нагрузок. Это обстоятельство позволяет предугадать качественные особенности поведения управляющих функций для различных условий закрепления пластин в широком диапазоне тепловых нагрузок с  $\vartheta < 1$  и облегчает выбор начального распределения толщины в методе последовательной оптимизации. При  $\vartheta \gg 1$  и малых значениях  $h^-/h^+$  инерционные эффекты начинают играть заметную роль и, по-видимому, в этом случае следует использовать уравнения связанной термоэластокинематики.

На фиг. 4, а - г изображены оптимальные распределения силового материала в равномерно прогреваемой по толщине стенки ( $T(t, x_2) \equiv T_1(t, x_2)$ ) гибкой изотропной (с модулем Юнга материала  $E = E(T_1) = 1 - 0,1T_1$  и коэффициентом линейного расширения  $\alpha = \alpha(T_1) = 1 + 0,1T_1$ ) полой оболочки ( $-1 \leq x_2 \leq 1$ ,  $z = 0,2$ ,  $h^- = 0,4$ ,  $h^+ = 0,6$ ,  $\xi = 10$ ,  $V = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $c = 1$ ,  $k_{22} = k_z = 1$ ), которая в результате действия крутящих и изгибающих моментов имеет углы закрутки  $\varphi$  и кривизны изгибаемой поверхности  $\kappa$ , равные  $(\varphi; \kappa) = (0; 0)$ ,  $(2,5; 0)$ ,  $(0; 1,5)$ ,  $(2,5; 1,5)$ .

На фиг. 5 приведены графики зависимости эффективной крутильной жесткости  $C$  от времени  $t$  для оболочки, имеющей оптимальную (кривая 1) и постоянную (кривая 2) толщину, при  $\varphi = 0$ ,  $\kappa = 0$ . Для остальных значений параметров  $\kappa$  и  $\varphi$  качественный характер изображенных зависимостей сохраняется.



Фиг. 5

Для остальных значений параметров  $\kappa$  и  $\varphi$  качественный характер изображенных зависимостей сохраняется.

Из приведенных на фиг. 5 графиков видно, что оптимальным выбором толщины можно добиться существенного увеличения минимального значения величины  $C$ , которое в результате нестационарного процесса теплообмена оболочки со средой реализуется в момент времени  $\tau_1 > \tau_*$ .

Алгоритмы метода последовательной оптимизации в задачах нестационарной термоупругости реализованы в виде пакета программ на языке ФОРТРАН. Расчеты проводились на ЭВМ ЕС 1040-1050.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Леник Ю. Р.* Применение принципа максимума Понтрягина в задачах прочности, устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций.— Механика: Период. сб. перев. иностр. статей, 1974, № 6, с. 126–141.
2. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
3. *Братусь А. С., Каргвелишвили В. М.* Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 119–139.
4. *Хог Э., Арора Я.* Прикладное оптимальное проектирование. М.: Мир, 1983. 479 с.
5. *Каргвелишвили В. М., Кобелев В. В.* Рациональные схемы армирования слоистых пластин из композиционных материалов.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 1, с. 68–80.
6. *Иванова С. Ю.* О некоторых задачах снижения веса конструкций, работающих в режиме вынужденных гармонических колебаний.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 5, с. 147–154.
7. *Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В.* Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках. Киев: Наук. думка, 1984. 157 с.
8. *Стоян Ю. Г., Пулягин В. П.* Размещение источников физических полей. Киев: Наук. думка, 1981. 182 с.
9. *Каргвелишвили В. М., Миронов А. А.* Задачи оптимизации эффективной крутильной жесткости неравномерно нагретых и предварительно напряженных тонкостенных стержней.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 150–161.
10. *Каргвелишвили В. М.* Вопросы оптимизации авиационных конструкций с учетом аэродинамического нагрева.— В кн.: Динамика и прочность машин. Киев: Вища школа, 1984, вып. 40, с. 64–71.
11. *Каргвелишвили В. М.* Оптимальное проектирование упругих пластин, взаимодействующих с внешним тепловым полем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 175–186.
12. *Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М.* Проектирование пластин с учетом ограничений на изменяемость толщин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 6, с. 130–136.
13. *Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Литвинов В. Г.* Об оптимальных решениях в задачах проектирования упругих пластин.— Прикл. механика, 1984, т. 20, № 11, с. 82–85.
14. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
15. *Marguerre K.* Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung.— In: Proc. of 5th Intern. Congr. Appl. Mech. N. Y.: Wiley, 1939, p. 93–101.
16. *Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А.* Об одном численном методе решения двумерных задач оптимизации в теории упругости.— В кн.: Матер. 5-й Всес. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978, ч. 2, с. 3–14.
17. *Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А.* Численное решение двумерных задач оптимизации упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 68–78.
18. *Каргвелишвили В. М., Миронов А. А., Самсонов А. М.* Численный метод решения задач оптимизации подкрепленных конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 2, с. 93–103.
19. Влияние высоких температур на авиационные конструкции. М.: Оборонгиз. 1961. 415 с.
20. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления: Численные методы. М.: Наука, 1973. 238 с.
21. *Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Черноусько Ф. Л.* О разностно-квадратурных аппроксимациях выпуклых интегральных функционалов.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 2, с. 269–272.
22. *Каргвелишвили В. М.* Численное решение двух контактных задач для упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 68–72.

Москва

Поступила в редакцию  
22.1.1985