

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯХ  
В СОСТАВНОЙ АРКЕ

КИЛИКОВСКАЯ О. А.

Получена определяющая система уравнений в задаче о напряженно-деформированном состоянии арки, состоящей из отдельных несклеенных, шероховатых блоков, находящихся под действием силовых нагрузок и высоких температур. Построена область допустимых геометрических параметров и параметров нагружения, при которых существует решение задачи. Показана единственность решения в предположении, что касательный модуль упругости положителен и непрерывен. На примере линейной зависимости при сжатии напряжения от деформации показана сходимость метода упругих решений. Сравняются решения для сплошной и составной арок, имеющих одинаковый модуль упругости при сжатии.

**1. Определяющая система уравнений.** Постановка задачи о напряженно-деформированном состоянии арки, состоящей из отдельных, несклеенных шероховатых блоков, находящейся под действием высоких температур и распределенных нагрузок, дана в [1] и основана на следующих предположениях: цилиндрическая арка из отдельных блоков заменяется сплошной физически нелинейной аркой с приведенными характеристиками; принимается, что для такой сплошной арки справедлива гипотеза Кирхгофа — Лява, вариант соотношений для оболочки взят, как в [2]; при деформации  $e > 0$  для приведенного материала принимается  $\sigma(e) \equiv 0$ , так как пакет несклеенных блоков не может сопротивляться растяжению; зависимость  $\sigma(e, T)$  при  $e < 0$  находится из эксперимента на сжатие пакета блоков; определяется механизм выбора зазоров и имеет вид, представленный на фиг. 1. При малых деформациях модуль упругости осредненного материала на порядки меньше модуля упругости составляющих блоков, кривая  $\sigma \sim e$  при  $e \rightarrow 0$  может иметь и горизонтальную касательную.

Введем систему координат, как показано на фиг. 2, где  $r$  — радиус средней поверхности,  $h$  — толщина,  $\varphi_0$  — угол раствора арки,  $\varphi$  — текущий угол,  $y$  — координата по толщине,  $Y$  — ось симметрии.

После интегрирования уравнений равновесия по дуге  $\varphi$  получим

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma(e_1, T) dy = R \cos \varphi + p(r, \varphi)$$

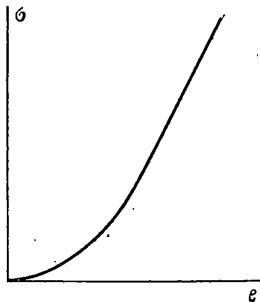
$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma(e_1, T) y dy = M_0 + Rr(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + m(r, \varphi) \quad (1.1)$$

$$e_1 = \varepsilon(\varphi) + \kappa(\varphi)y - e_2(T(y))$$

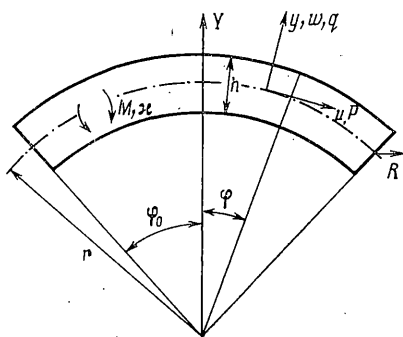
Здесь  $R$ ,  $M_0$  — распор и момент в заделке,  $\varepsilon(\varphi)$ ,  $\kappa(\varphi)$  — удлинение и изменение кривизны срединного волокна в точке  $\varphi$ ,  $e_2(T)$  — температурная деформация,  $e_1$  — «силовая» деформация,  $p$ ,  $m$  — сила и момент в сечениях, вызванные внешней нагрузкой.

Зависимость  $\sigma(e, T)$  принимается в виде

$$\sigma = \sigma(e, T) \quad (e < 0), \quad \sigma = 0 \quad (e > 0) \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для статически определимой задачи, т. е. когда заданы  $R$  и  $M_0$ , а  $\varphi$  является параметром, для каждой точки задача относительно двух чисел  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  замкнута.

Если задача статически неопределима, например пять жестко заделаны, то  $R$  и  $M_0$  также подлежат определению. Интегрируя геометрические уравнения [2] с учетом условий жесткой заделки, получим [1]:

$$\int_0^{\varphi_0} \left( \kappa(\varphi) - \frac{\varepsilon(\varphi)}{r} \right) \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{\varphi_0} \kappa(\varphi) d\varphi = 0 \quad (1.3)$$

Система (1.1), (1.3) с условием (1.2) определяет две неизвестные функции  $\varepsilon(\varphi)$ ,  $\kappa(\varphi)$  и два числа  $R$ ,  $M_0$ . Поставленная задача является нелинейной из-за нелинейности соотношения (1.2).

**2. Область существования решения системы.** Зависимость (1.2), в которой предполагается, что каждое волокно не может сопротивляться растяжению, накладывает ограничения на допустимые геометрические параметры и нагрузку на свод. Областью существования решения будем называть область геометрических параметров арки, либо область параметров нагружения, при которых существует решение системы (1.1), (1.3) с условием (1.2).

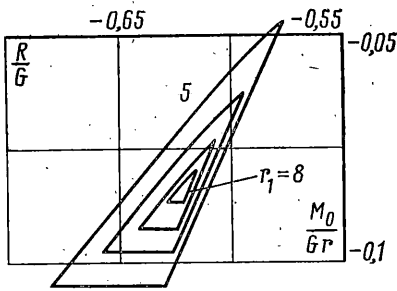
Из условия (1.2) следует, что по всему сечению  $\sigma \leq 0$ , т. е.

$$P = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dy < 0 \quad (2.1)$$

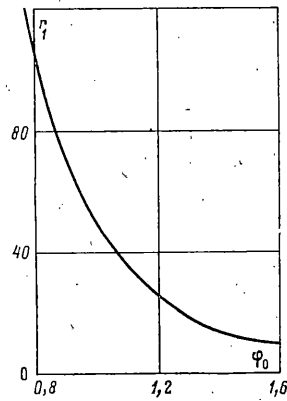
Обозначим через  $y_0$  координату центра тяжести эпюры напряжений. Тогда момент в сечении  $M = y_0 P$ . Так как эпюра напряжений расположена по одну сторону от оси  $y$ , то  $|y_0| < h/2$ , следовательно,  $|M/Ph| < 0,5$ .

Рассмотрим статически определимую задачу, в которой величины  $R$ ,  $M_0$  могут быть найдены без исследования перемещений, а следовательно, известны правые части системы (1.1) и отношение  $M/Ph$ .

Поставим задачу следующим образом: для арки заданной геометрии ( $\varphi_0$ ,  $r$ ,  $h$ ) при заданной распределенной нагрузке  $q(\varphi)$  в плоскости  $R$ ,  $M_0$  найдем такую область, в которой система (1.1) с условием (1.2) может иметь решение, т. е. в этой области должны быть выполнены неравенства, приведенные выше во всех сечениях арки  $\varphi$ . При каждом фиксированном  $\varphi$  эти неравенства определяют область существования решения. Семейство прямых с параметром  $\varphi$  и определяет область в плоскости  $R$ ,  $M_0$ . Если далее при фиксированном  $\varphi_0$  увеличивать параметр  $r_1 = r/h$  при постоянных параметрах нагрузки, то эта область будет изменяться. На фиг. 3 представлено семейство областей существования при действии собственного веса на арку с углом раствора  $\varphi_0 = \pi/2$  ( $G = \rho g h r$  — вес части арки длиной в один радиус) при параметрах  $r_1$  от  $r_1 = 5$  до  $r_1 = 9$ , начиная с которого решение системы (1.1) с условием (1.2) не существует ни при каких  $R$ ,  $M_0$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Продельвая аналогичную процедуру для любого  $0 < \varphi_0 < \pi/2$ , получим таким образом в плоскости  $r_1, \varphi_0$  такую кривую  $r_*(\varphi_0)$  (фиг. 4). Если точка лежит выше этой кривой, то не существует таких  $R, M_0$ , когда задача (1.1), (1.2) может иметь решение, а следовательно, не может существовать и решения статически неопределимой задачи.

Для точек, лежащих ниже кривой  $r_*(\varphi_0)$ , решение статически неопределимой задачи существует в некоторой области изменения  $R, M_0$ ; относительно существования решения статически неопределимой задачи ничего сказать нельзя без дополнительного исследования температурного поля и зависимости  $\sigma(\epsilon, T)$  при сжатии. Однако численное решение различных вариантов статически неопределимых задач показало, что их решение при  $r_1 < r_*(\varphi_0)$  существует.

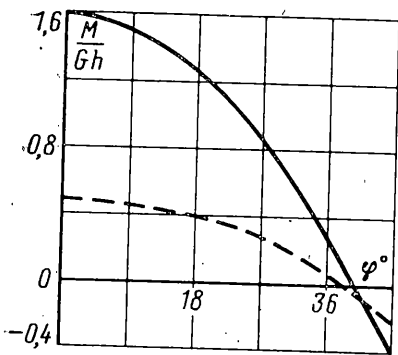
**3. Единственность решения.** Так как задача существенно нелинейна, возникает вопрос о единственности решения системы (1.1), (1.2), (1.3). Можно доказать лемму, что если преобразование  $x=x(u, v), y=y(u, v)$  точкам выпуклой, односвязной области  $A(u, v)$  ставит в соответствие точки области  $B(x, y)$ , причем функции и их производные непрерывны вплоть до границы и удовлетворяют неравенствам  $\partial x/\partial u > 0, \partial(x, y)/\partial(u, v) > 0$ , то обратное преобразование  $B$  в  $A$  однозначно.

Предполагая непрерывность и положительность  $\partial\sigma/\partial\epsilon$  при  $\epsilon < 0$ , получим, что для функций  $P = \int \sigma(\epsilon, T) dy, M = \int \sigma(\epsilon, T) y dy$  выполнены условия леммы, откуда следует единственность статически неопределимой задачи. Аналогично для статически неопределимой задачи из выполнения условий леммы для функций

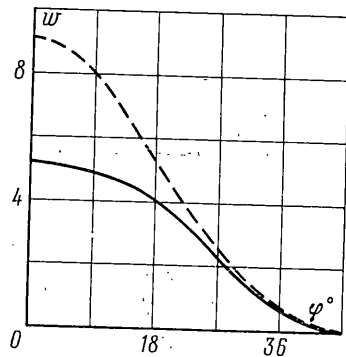
$$f_1(R, M_0) = \int_0^{\varphi_0} \kappa(R, M_0, \varphi) d\varphi, \quad f_2(R, M_0) = \int_0^{\varphi_0} \kappa(R, M_0, \varphi) - \frac{\epsilon(R, M_0, \varphi)}{r} \cos \varphi d\varphi.$$

следует единственность статически неопределимой задачи.

**4. Особенности метода решения.** Задача (1.1) — (1.3) решается методом последовательных приближений. Нелинейность диаграмм имеет две основные особенности, определяющие трудности в применении итерационных методов: в отличие от задач с диаграммами типа пластичности, приведенный материал для составной арки имеет при сжатии возрастающую жесткость и поэтому вопрос о сходимости для составной арки включает в себя вопрос о сходимости методов для сплошной конструкции с возрастающей жесткостью; тот факт, что материал не может сопротивляться растяжению, усложняет процесс сходимости. В каждом новом приближении возникает новая область сжатых волокон — это накладывает ограничения на начальное и промежуточные приближения, так как для существования



Фиг. 5



Фиг. 6

обратного оператора необходимо, чтобы область сжатия в любом приближении ни в одном сечении не обращалась в нуль.

Наиболее простым методом решения физически нелинейной задачи для оболочки является метод секущих модулей, который состоит в замене соотношения  $\sigma = \sigma(e, T) = E(e, T)e$  в  $n$ -м приближении соотношением  $\sigma_n = E(e_{n-1}, T)e_n$ . Метод сходится не всегда, это зависит от вида диаграммы. Применительно к задаче об изгибе сплошной балки автором доказано, что для сходимости метода секущих при возрастающей жесткости, если начальное приближение близко к точному, необходимо выполнение ограничения на рост  $\sigma(e)$  в виде

$$\frac{\partial \sigma}{\partial e} < 2E \quad \left( \frac{\partial \sigma}{\partial e} < 2\sigma/e \right) \quad (4.1)$$

Для составной арки это же условие сходимости доказано для степенной зависимости  $\sigma(e)$ , если только решение существует, и в нулевом приближении в каждом сечении имеется область сжатых волокон. Для резко возрастающих диаграмм, когда условие (4.1) не выполняется, метод секущих расходится, но сходится метод Ньютона, который состоит в замене  $\sigma(e, T)$  в каждом приближении на

$$\sigma_n = \sigma(e_{n-1}, T) + \sigma'(e_{n-1}, T)(e_n - e_{n-1}) \quad (4.2)$$

Условия сходимости итерационных методов, полученные аналитически не в общем случае, подтверждены численно для различных нулевых приближений и при различных видах диаграмм и нагрузок. Метод касательных опробован для диаграмм  $\sigma = Ae^\alpha$ , где  $\alpha$  изменялось от единицы до четырех.

**5. Численные результаты.** Для численного расчета рассмотрена задача об изгибе статически неопределимой арки следующей геометрии:  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $R = 400$  м,  $h = 0,46$  м, с жестко заделанными пятнами, под действием собственного веса (удельный вес  $\rho g = 3 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>) и высоких температур (до 1600° С на нижней кромке). Модуль упругости блоков  $E = 10^4$  МПа; экспериментально установлено, что средний модуль упругости пакета блоков меньше на два порядка. Очевидно, что оценка напряженно-деформированного состояния такой арки, составленной из пакета блоков, даже приближенно не может оцениваться по состоянию линейной арки с модулем упругости самих блоков.

Сравним решения для сплошной и составной арки из «приведенного» материала с постоянным модулем  $E = 100$  МПа.

Распределение моментов по  $\varphi$  при температурах нижней и верхней кромок, соответственно 1600 и 200° С, дано на фиг. 5, графики перемещений (в см) на фиг. 6. Сплошные линии — для случая сплошной арки, штриховые — для составной. Максимальный безразмерный момент для составной арки  $\approx 0,05$ , для сплошной  $\approx 1,6$ .

Характер зависимости момента от температуры несколько изменяется для составной арки. Так, при дополнительном нагреве верхней кромки момент в составной арке увеличивается, а в линейной — уменьшается. Перемещение в вершине свода почти вдвое больше, чем у сплошной арки. В отличие от линейной задачи, темпера-

турный момент, так же как и средняя температура, влияет на величину перемещений. Сравнение линейной и нелинейной задач даже в этом простейшем случае  $E = \text{const}$  показывает, что напряженно-деформированное состояние сплошной и составной арок довольно сильно отличается, особенно интегральные характеристики, например, момент в вершине арки, который часто берут для оценки состояния составной арки из решения линейной задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Панферов В. М., Беловол Е. Г., Грунин Л. П., Ильин Л. М., Киликовская О. А., Мансуров Р. М., Овчинников Г. Е., Тринчер В. К., Филатов А. Д. Оптимально-напряженный свод (ОНС-II) мартеновских печей. — Науч. тр. НИИ механики МГУ, 1974, № 34, с. 1–66.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

Москва

Поступила в редакцию  
8.II.1985