

УДК 539.375

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ВОЛНЫ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

ГЛУШКО А. И., НИКИТИН И. С.

Под действием сильных динамических нагрузок в массиве горной породы могут возникать и расти зоны частичного (с образованием той или иной системы микротрещин и микропор) или полного (вплоть до раздробления) разрушения породы. Подвижные границы этих зон носят нечеткий, размытый характер. Однако в определенных случаях, когда ширина такой переходной границы намного меньше характерного размера зоны (или какого-то другого характерного размера процесса, например диаметра включения в массив, на котором происходит разрушение), можно в идеализированной форме считать эту границу поверхностью сильного разрыва функций, определяющих состояние среды. При переходе через эту поверхность (фронт разрушения) скачком меняются свойства среды. Перед фронтом поведение неразрушенного материала описывается некоторой, вообще говоря, упругопластической моделью, а за ним — другой упругопластической моделью. Предполагается, что свойства неразрушенной и разрушенной сред предварительно известны из экспериментов. На самом фронте в качестве обязательных должны выполняться динамические (законы сохранения импульса, энергии, массы) и кинематические (законы непрерывности смещений) условия совместности.

Такой подход к решению задач динамического разрушения применялся во многих работах [1–3]¹, в которых конкретизировались модели для описания неразрушенного и разрушенного состояний материала и которые отличались видом критерия разрушения — дополнительного условия на фронте разрушения, необходимого для однозначной разрешимости той или иной математической задачи. Наиболее полное решение конкретной задачи с фронтом разрушения (о сферически-симметричном взрыве в бесконечном массиве горной породы) дано в [2], где неразрушенная среда считалась упругой, разрушенная — гипопругой и ставился так называемый силовой критерий разрушения на фронте сильного разрыва — условия, связывающие предельные значения напряжений со стороны неразрушенного материала.

Следует заметить, что вопрос о необходимости дополнительного условия на фронте разрушения (в той или иной его форме) не является очевидным. Можно показать необходимость такого условия, исходя из однозначной разрешимости задачи о распаде произвольного разрыва на границе полупространств разрушенного и неразрушенного материалов, если рассмотреть очевидные опытные факты (скорость упругих продольных волн в разрушенном материале меньше, чем в неразрушенном; скорость движения фронта разрушения меньше скорости продольных волн в неразрушенном материале). Ниже также принимается силовой критерий разрушения. Считается, что существует функция от напряжений или, если предположить исходный материал изотропным, от инвариантов тензора напряжений $\Phi = \Phi(I_1, I_2, I_3)$, такая, что на фронте выполняется условие $\Phi = 0$, а в неразрушенной среде всегда $\Phi \leq 0$. В случае одноосного деформирования, например, существует предельное значение напряжения σ_* и напряжения в неразрушенном материале ограничены предельным условием $|\sigma| \leq \sigma_*$. Неразрушенных состояний с $|\sigma| > \sigma_*$ не существует.

В публикуемой работе строится метод численного решения задач динамического разрушения на основе метода распада произвольного разрыва [4] с явным выделением движущегося фронта разрушения. Поэтому наряду с формулированием выбранных простейших моделей для описания разрушенного и неразрушенного состояний материала приводятся простые решения трех задач о распаде начального разрыва: на границе полупространств из неразрушенного материала; из разрушенного и на границе неразрушенного и разрушенного полупространств (в этом случае и будет явно возникать фронт разрушения).

1. Ограничимся рассмотрением одноосного движения в направлении оси X в случае малых деформаций и скоростей. Примем следующие обозначения: u — смещение в направлении оси X , v — скорость частиц, $\epsilon = du/dx$ — градиент смещения (деформация), $\sigma = \sigma_{xx}$ — напряжение, a_n —

¹ См. Николаевский В. Н. Предельная скорость фронта разрушения и динамические перегрузки хрупких материалов. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1979, № 123. 54 с.

скорость продольных волн в неразрушенном материале, a_p — скорость продольных волн в разрушенном материале, D — скорость фронта разрушения.

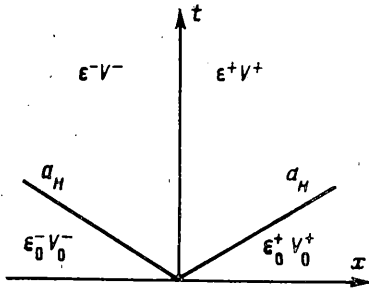
Согласно предположениям, $\varepsilon \ll 1$, $v/a_p \ll 1$. Принимаем также ограничение $D < a_p$, $a_p < a_n$. Плотность среды ρ в силу малости деформаций считаем постоянной и положим равной единице.

В задаче распада разрыва верхним индексом плюс будем обозначать величины, относящиеся к правому полупространству ($x > 0$), в верхнем индексом минус — величины, относящиеся к левому ($x < 0$); нижним индексом нуль обозначим величины, относящиеся к начальному моменту времени.

Сформулируем простейшие модели неразрушенной и разрушенной сред, в которых отражаются их основные свойства. Состояние среды определяется двумя функциями — градиентом смещения $\varepsilon(x, t)$ и скоростью частиц $v(x, t)$. Напряжения σ определяются по ε .

Пока не превышен критерий разрушения, неразрушенную среду естественно считать упругой. Напряжения и деформации в ней связаны законом Гука $\sigma = a_n^2 \varepsilon$. Тогда справедливы уравнения

$$\partial v / \partial x - \partial \varepsilon / \partial t = 0, \quad \partial v / \partial t - a_n^2 \partial \varepsilon / \partial x = 0 \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Решение задачи распада в такой среде показано на фиг. 1. От точки разрыва начальных данных $x=0$ в момент $t=0$

в обе стороны начинают распространяться продольные волны. Деформация и скорость за ними определяются из соотношений совместности на продольной волне или, что то же самое, из условия постоянства римановых инвариантов системы (1.1) вдоль характеристик $\varepsilon^+ = \varepsilon^-$, $v^+ = v^-$, $v^+ + a_n \varepsilon^+ = v_0^+ + a_n \varepsilon_0^+$, $v^- - a_n \varepsilon^- = v_0^- - a_n \varepsilon_0^-$.

В результате получим $\varepsilon^+ = 1/2 [A] / a_n$, $v^+ = 1/2 [v_0^+ + v_0^- + a_n (\varepsilon_0^+ - \varepsilon_0^-)]$, $[A] = v_0^+ + a_n \varepsilon_0^+ - (v_0^- - a_n \varepsilon_0^-)$.

Критерий разрушения примем в виде $|\sigma| = \sigma_*$ или $|\varepsilon| = \sigma_* / a_n^2 = \varepsilon_*$; отсюда получаем ограничение на начальные данные в таком режиме распада разрыва: $|\varepsilon^+| = 1/2 | [A] / a_n | \leq \varepsilon_*$ или $| [A] | \leq 2 a_n \varepsilon_*$.

2. Перейдем к формулировке модели разрушенной среды. Считаем, что разрушенная среда полностью раздроблена и представляет собой скопление несвязанных кусков материала. Предполагается, что при сжатии ($\sigma \leq 0$) такая среда ведет себя упруго по закону Гука: $\sigma = a_p^2 \varepsilon$, где $a_p < a_n$.

Уравнения движения при $\sigma \leq 0$ следующие:

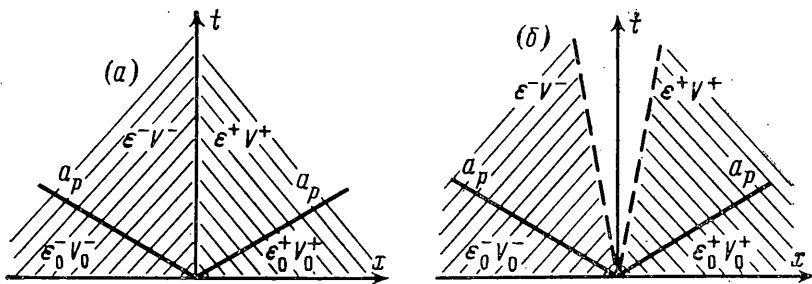
$$\partial v / \partial x - \partial \varepsilon / \partial t = 0, \quad \partial v / \partial t - a_p^2 \partial \varepsilon / \partial x = 0 \quad (2.1)$$

Состояний растяжения с $\sigma > 0$ (или $\varepsilon > 0$) такая среда не выдерживает (разлетается), в ней появляются разрывы сплошности. В задаче распада разрыва для разрушенной среды возможны два случая.

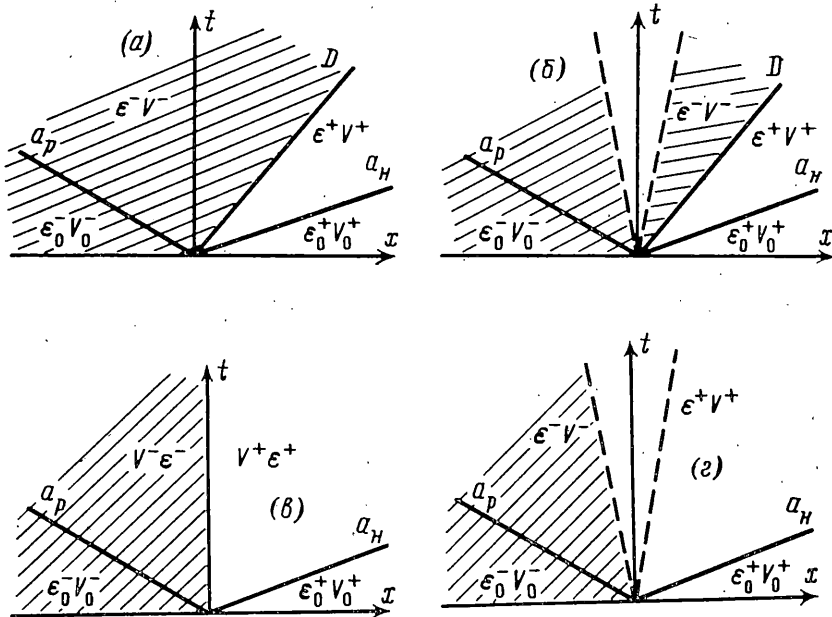
Случай (а) (фиг. 2, а, здесь и далее области, занятые разрушенной средой, заштрихованы) — отсутствие разлета в разрушенной среде. Решение такое же, как и в неразрушенной среде, но с другой скоростью продольных волн: $\varepsilon^+ = \varepsilon^- = 1/2 [A] / a_p$, $v^+ = v^- = 1/2 [v_0^+ + v_0^- + a_p (\varepsilon_0^+ - \varepsilon_0^-)]$. Условие контакта $\varepsilon \leq 0$ дает $[A] \leq 0$.

Случай (б) (фиг. 2, б) — режим разлета полупространств с образованием свободных от напряжений границ. Используем соотношения на продольных волнах и условия на свободных границах $\varepsilon^+ = \varepsilon^-$, $v^+ - a_p \varepsilon^+ = v_0^+ + a_p \varepsilon_0^+$, $v^- - a_p \varepsilon^- = v_0^- - a_p \varepsilon_0^-$. Из них получаем $v^+ = v_0^+ + a_p \varepsilon_0^+$, $v^- = v_0^- - a_p \varepsilon_0^-$. Условие разлета (или непересечения образовавшихся свободных границ) дает $v^+ - v^- > 0$ или $[A] > 0$.

Таким образом, при любых начальных данных в задаче распада разрыва для разрушенной среды реализуется либо случай (а) при $[A] \leq 0$, либо случай (б) при $[A] > 0$.



Фиг. 2



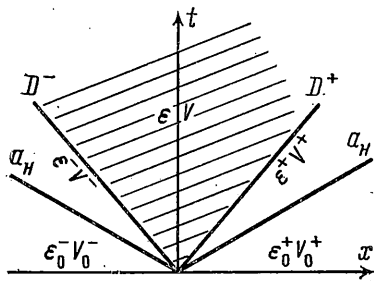
Фиг. 3

3. Теперь можно построить решение задачи о распаде в случае, когда начальные разрывные состояния (при $t=0$) являются состояниями неразрушенной (при $x>0$) и разрушенной сред ($x<0$). При этом может возникать фронт разрушения, на котором должны выполняться соотношения динамической и кинематической совместности, а со стороны неразрушенного материала — критерий разрушения: $[(D-v)v]^+ + [\sigma] = 0$, $[\sigma^+] = \sigma_*$, $[v] + [(D-v)\varepsilon] = 0$, где принято обозначение $[...]$ для скачка величины на фронте разрушения.

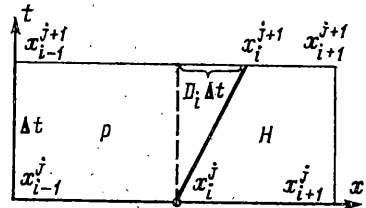
Скорость фронта D подлежит определению и должна подчиняться ограничению $D < a_p$. Соотношения динамической и кинематической совместности далее будем использовать в предположении $v \ll D$. Исследуем четыре возможных комбинации решения такой задачи распада разрыва. Случай (а) — отсутствие разлета в разрушенной среде и фронта разрушения (фиг. 3, а). Ограничения таковы: $\varepsilon \leq 0$ — разрушенная среда сохраняет сплошность; $0 < D < a_p$ — фронт разрушения всегда движется в сторону неразрушенного материала. Соотношения на продольных волнах $v^+ + a_n \varepsilon^+ = v_0^+ + a_n \varepsilon_0^+$, $v^- - a_p \varepsilon^- = v_0^- - a_p \varepsilon_0^-$. Соотношения на фронте разрушения $Dv^+ + a_n^2 \varepsilon^+ = Dv^- + a_p^2 \varepsilon^-$, $v^+ + D\varepsilon^+ = v^- + D\varepsilon^-$. Критерий разрушения $|\varepsilon^+| = \varepsilon_*$.

Решение этой системы следующее:

$$D = \frac{[A]a_p \mp \varepsilon_*(a_n + a_p)a_n}{[A] \mp \varepsilon_*(a_n + a_p)}, \quad \varepsilon^\pm = \frac{[A](a_p \mp D)}{(a_n + a_p)(a_n \mp D)}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

При $\varepsilon^+ = \varepsilon_*$ ограничения не удовлетворяются ни при каких начальных данных; при $\varepsilon^+ = -\varepsilon_*$ режим удовлетворяет ограничениям при $[A] \leq -\varepsilon_*(a_n + a_p)(a_n/a_p)$.

Случай (б) — фронт разрушения и разлет в разрушенной среде (фиг. 3, б). Выпишем соотношения на фронте разрушения; условие на образовавшейся свободной границе и критерий разрушения: $Dv^+ + a_n^2 \varepsilon^+ = -Dv^- + a_p^2 \varepsilon^-$, $v^+ + D\varepsilon^+ = v^- + D\varepsilon^-$, $\varepsilon^- = 0$ $|\varepsilon^+| = \varepsilon_*$. Решений у этой системы нет, режим (б) не реализуется.

Случай (в) — контакт разрушенного и неразрушенного полупространств без возникновения фронта разрушения (фиг. 3, в). Выполняется условие контакта двух полупространств $v^+ = v^-$, $\sigma^+ = \sigma^-$. Соотношения на продольных волнах $v_0^+ + a_n \varepsilon_0^+ = v^+ + a_n \varepsilon^+$, $v_0^- - a_p \varepsilon_0^- = v^- - a_p \varepsilon^-$.

Решение этой системы $\varepsilon^+ = [A] a_p / [(a_n + a_p) a_n]$, $\varepsilon^- = [A] a_n / [(a_n + a_p) a_p]$.

Должны выполняться ограничения: в неразрушенной среде $|\varepsilon^+| \leq \varepsilon_*$; в разрушенной среде $\varepsilon^- \leq 0$. Из них получаем, что режим реализуется при $-\varepsilon_*(a_n/a_p)(a_n + a_p) \leq [A] \leq 0$.

Случай (г) — разлет полупространств (фиг. 3, г) с образованием свободных границ. С учетом условий на свободных границах $\varepsilon^\pm = 0$ и соотношений на продольных волнах получаем $v^+ = v_0^+ + a_n \varepsilon_0^+$, $v^- = v_0^- - a_p \varepsilon_0^-$.

Должно выполняться условие непересечения свободных границ $v^+ - v^- > 0$. Отсюда получаем, что режим (г) реализуется при $[A] > 0$.

Таким образом, при любых начальных условиях справа (в неразрушенной среде) и слева (в разрушенной среде) реализуются: при $[A] < -\varepsilon_*(a_n + a_p)(a_n/a_p)$ — режим (а), при $-\varepsilon_*(a_n + a_p)(a_n/a_p) \leq [A] \leq 0$ — режим (в), при $[A] > 0$ — режим (г).

4. Решение задачи распада разрыва в неразрушенной среде, полученное в п. 1, справедливо при условии $|[A]| \leq 2a_n \varepsilon_*$. Решим задачу о распаде разрыва в неразрушенной среде с возникновением разрушенной зоны и разбегающихся фронтов разрушения (фиг. 4). Обозначим через v и ε скорость и деформацию в разрушенной зоне. Система соотношений на продольных волнах и фронтах разрушения такова: $v^\pm \pm a_n \varepsilon^\pm = v_0^\pm \pm a_n \varepsilon_0^\pm$, $v^\pm \pm D^\pm \varepsilon^\pm = v \pm D^\pm \varepsilon$, $D^\pm v^\pm \pm a_n^2 \varepsilon^\pm = D^\pm v \pm a_p^2 \varepsilon$.

Решение этой системы следующее:

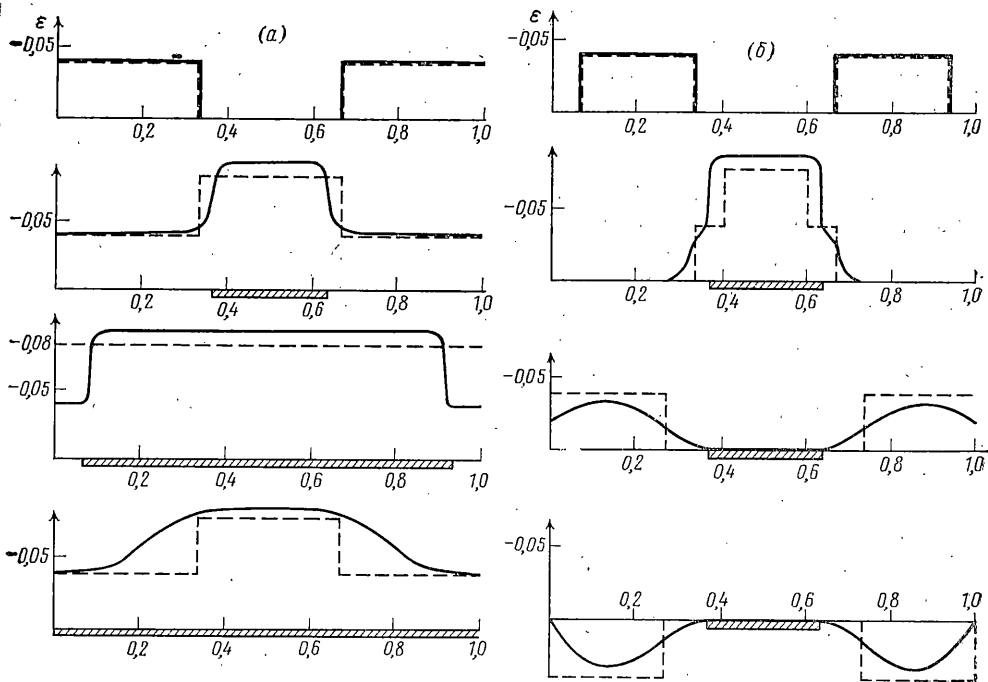
$$D = D^\pm = \sqrt{a_p^2 + [1/2(a_n - a_p)/\alpha]^2 + 1/2(a_n^2 - a_p^2)/\alpha}$$

$$\varepsilon = -\varepsilon_*(a_n^2 - D^2)/(a_p^2 - D^2), \quad \alpha = 1/2([A] + 2a_n \varepsilon_*)/\varepsilon_*$$

Из условия $0 < D < a_p$ получаем $[A] < -2a_n \varepsilon_*$. В случае $[A] > 2a_n \varepsilon_*$ происходит разрыв и разлет двух неразрушенных полупространств. Таким образом, в задаче распада произвольного разрыва в неразрушенной среде при условии $|[A]| \leq 2a_n \varepsilon_*$ разрушения нет, при $[A] < -2a_n \varepsilon_*$ возникает разрушенная зона, при $[A] > 2a_n \varepsilon_*$ происходит разрыв и разлет неразрушенных полупространств.

Решение описанных задач распада произвольного разрыва позволяет строить численный метод расчета динамических одномерных задач с явным выделением фронта разрушения.

Рассмотрим задачу о динамической сжимающей нагрузке, приложенной с обеих сторон к полюсу $0 \leq x \leq 1$, упругий материал которой не выдерживает напряжений $|\sigma| > \sigma_*$ (или $|\varepsilon| > \varepsilon_*$). Отрезок $0 \leq x \leq 1$ разбивается на интервалы $\Delta x_i = (x_i, x_{i+1})$



Фиг. 6

($i=1, 2, \dots, M$), в каждом из которых материал может находиться в двух состояниях — неразрушенном (n) и разрушенном (p) и, соответственно, описывается уравнениями (1.4) при $|\varepsilon| < \varepsilon_*$ и (2.1) при $\varepsilon \leq 0$. Граничные условия при $x=0$ и $x=1$ такие: $\sigma(0, t) = \sigma(1, t) = -\sigma_0(t)$. В начальный момент ($t=0$) $\varepsilon = v = 0$ и вся полоса не разрушена.

Расчет ведется шагами по времени $\Delta t = \min(\Delta x_i / a_n)$. Если известны величины ε_i^j и v_i^j и состояние на нижнем слое ячейки $\Delta x_i^j = (x_i^j, x_{i+1}^j)$ в момент t_j , то в следующий момент $t_{j+1} = t_j + \Delta t$ можно определить величины ε_i^{j+1} и v_i^{j+1} и состояние на верхнем слое ячейки $\Delta x_i^{j+1} = (x_i^{j+1}, x_{i+1}^{j+1})$, где $x_i^{j+1} = x_i^j + D_i \Delta t$, $x_{i+1}^{j+1} = x_{i+1}^j + D_{i+1} \Delta t$; $D_i = 0$ на границе ячеек с одинаковым состоянием, или D_i равняется скорости фронта разрушения, которая определяется из задачи распада разрыва на границе ячеек с разным состоянием (фиг. 5).

Запишем разностный аналог законов сохранения систем (1.4) и (2.1) для непрямоугольных ячеек $\Omega = \{t, x: t_j \leq t \leq t_j + \Delta t, x_i \leq x \leq x_i + D_i(t - t_j)\}$, примыкающих к фронту разрушения (фиг. 5):

$$v_i^{j+1} = v_i^j \frac{\Delta x^j}{\Delta x^{j+1}} + a^2 (E_{i+1} - E_i) \frac{\Delta t}{\Delta x^{j+1}} + \left(V_{i+1} \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x^{j+1}} - V_i \frac{\Delta x_i}{\Delta x^j} \right)$$

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j \frac{\Delta x^j}{\Delta x^{j+1}} + (V_{i+1} - V_i) \frac{\Delta t}{\Delta x^{j+1}} + \left(E_{i+1} \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x^{j+1}} - E_i \frac{\Delta x_i}{\Delta x^j} \right)$$

$$\Delta x_i = x_i^{j+1} - x_i^j, \quad \Delta x^j = x_{i+1}^j - x_i^j$$

где E_i и V_i на боковых гранях ячейки определяются из соответствующих задач распада — разрыва; $a = a_p$ или $a = a_n$ в зависимости от состояния ячейки.

Приведем результаты расчетов для случая мгновенно приложенной постоянной нагрузки, действующей в течение бесконечного интервала времени (фиг. 6, а) и короткого интервала времени $\tau = 4\Delta t$ (фиг. 6, б). Параметры расчетов $a_n = 1,0$, $a_p = 0,9$, $M = 20$, $\varepsilon_0 = 0,04$, $\varepsilon_* = +0,05$. Волновые картины $\varepsilon(x)$ приведены в моменты времени $t = 5\Delta t, 10\Delta t, 15\Delta t, 20\Delta t$. Двойной чертой на оси X проведены разрушенные зоны в соответствующие моменты времени. На этих фигурах штриховыми линиями показаны решения упругих задач, в которых не учитывается разрушение. Как и следовало ожидать, под действием интенсивной достаточно длительной нагрузки весь материал переходит в разрушенное состояние (фиг. 6, а). При действии кратковремен-

ного импульса той же интенсивности возникает ограниченная зона разрушения (фиг. 6, б). Расчеты показывают также, что со временем граница между зонами становится свободной от напряжений.

Авторы благодарят Н. В. Зволинского за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А., Черепанов Г. П. О самоподдерживающемся разрушении напряженного хрупкого тела.— Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 3, с. 543—546.
2. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 643—669.
3. Слепян Л. И. О волне хрупкого разрушения.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 4, с. 190—192.
4. Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.XI.1983