МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1986

УДК 539.3

ДАВЛЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ШТАМПА НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ

ГОМАН О. Г.

При помощи представления общего решения уравнений теории упругости трансверсально-изотропного тела через модифицированные r-аналитические функции [1] получено простое решение задачи о давлении осесимметричного штампа на упругое полупространство при наличии сцепления в зоне контакта. Метод решения основан на использовании представления модифицированных r-аналитических функций через аналитические по формулам Положего и сведении исходной задачи к двум задачам сопряжения для аналитических функций.

Для изотропного полупространства подобное решение получено в [2, 3]. Осесимметричная задача для штампа, сцепленного с трансверсально-изотропным полупространством (без кручения), более сложным методом решалась в работе [4].

1. Постановка задачи. Трансверсально-изотропное полупространство $z\leqslant 0$, граница которого $z=0$ совпадает с плоскостью упругой симметрии, находится под воздействием жесткого цилиндрического штампа радиуса R. Основание штампа представляет собой поверхность вращения, уравнение которой при соприкосновении с полупространством имеет вид $z=f(r)$, $f(0)=0$. Предполагается, что точки поверхности штампа и упругого тела сцеплены друг с другом и область контакта имеет в плане вид круга радиуса $a\leqslant R$. Под действием сжимающей осевой силы P_z и крутящего момента M_z штамп получает вертикальное смещение h и поворот вокруг вертикальной оси на угол ε. Остальная часть поверхности полупространства считается незагруженной, и напряжения и смещения в бесконечности обращаются в нуль.

В цилиндрической системе координат $zr\theta$ имеем следующие граничные условия при $z=0$: $w=-h+f(r)$, $u=0$, $v=\varepsilon r$ $(0<r<a)$; $\sigma_z=\tau_{zr}=\tau_{z\theta}=0$ $(a<r<\infty)$, где w, u и v — осевая, радиальная и окружная составляющие перемещения.

Решение уравнений теории упругости трансверсально-изотропного тела представим согласно [1] в виде

$$w=A_0\Phi+AP,\qquad u=r^{-1}(B_0\Psi+BQ) \tag{1.1}$$

$$\sigma_z=A_{13}(\partial u/\partial r+r^{-1}u)+A_{33}\partial w/\partial z=M\partial\Phi/\partial z+N\partial P/\partial z \tag{1.2}$$

$$\tau_{zr}=A_{44}(\partial w/\partial r+\partial u/\partial z)=M\alpha^{-2}\partial\Phi/\partial r+N\gamma^{-2}\partial P/\partial r$$

$$v=r^{-1}\Omega,\qquad \tau_{z\theta}=A_{44}\partial v/\partial z=A_{44}\beta^{-1}\partial X/\partial r \tag{1.3}$$

где $\Phi+i\Psi$, $P+iQ$ и $X+i\Omega$ — соответственно, (r,α)-, (r,γ)- и (r,β)-аналитическая функции $A_0=2\alpha/(\alpha+k)$, $B_0=2k/(\alpha+k)$, $M=A_0(A_{33}-kA_{13})$, $N=AA_{33}-\gamma BA_{13}$, $\alpha=\sqrt{\lambda/A_{44}}$ и λ — положительный корень уравнения

$$A_{11}\lambda^2-(A_{11}A_{33}-A_{13}^2-2A_{13}A_{44})\lambda+A_{33}A_{44}^2=0 \tag{1.4}$$

Выражения других постоянных β, γ, k, A и B через модули упругости A_{ij} приведены в [1].

Трансверсально-изотропные материалы можно разделить на две группы: у представителей первой группы оба корня уравнения (1.4) положи-

Вещество	α	β	γ	G	$1-r^*/a$
Мрамор	1,068	0,9705	0,7810	0,3788	$76{,}8\cdot10^{-6}$
Базальт	1,098	0,8671	0,8021	0,4686	$4{,}4\cdot10^{-6}$
Песчаник	1,1104	0,8502	0,7337	0,4971	$1{,}33\cdot10^{-6}$
Известняк	1,1457	0,9647	0,8216	0,4556	$7{,}05\cdot10^{-6}$
Лед	1,6414	0,9701	0,6232	0,5470	$0{,}26\cdot10^{-6}$

тельны, у представителей второй — комплексно сопряжены с положительными действительными частями [5]. Из 39 трансверсально-изотропных веществ, для которых в [6] даны упругие постоянные, 27 принадлежат к первой группе.

Изложенное ниже относится к веществам первой группы. В качестве примера в таблице приведены некоторые параметры для пяти материалов из этой группы.

Таким образом, для определения функций $\Phi+i\Psi$ и $P+iQ$, описывающих осесимметричное напряженно-деформированное состояние, имеем следующие смешанные граничные условия при $z=0$:

$$A_0\Phi+AP=-h+f(r),\quad B_0\Psi+BQ=0\quad (0<r<a) \tag{1.5}$$
$$M\partial\Phi/\partial z+N\partial P/\partial z=0,\quad M\alpha^{-2}\partial\Phi/\partial r+N\gamma^{-2}\partial P/\partial r=0\quad (a<r<\infty)$$

причем в силу осевой симметрии $\Psi|_{r=0}=Q|_{r=0}=0$.

Для задачи кручения (1.3) имеем условия

$$\Omega=\varepsilon r^2\quad (0<r<a),\quad \partial X/\partial r=0\quad (a<r<\infty) \tag{1.6}$$

Если в плоскости rz взять произвольную кривую CD и путем ее поворота вокруг оси z образовать поверхность вращения, то для осевой силы Z, действующей на эту поверхность, получим выражение

$$Z=2\pi\int_C^D r(\tau_{zr}\,dz-\sigma_z\,dr)=2\pi\left(\frac{M}{\alpha}\Psi+\frac{N}{\gamma}Q\right)\Big|_C^D \tag{1.7}$$

В частности, для величины суммарной сжимающей силы, приложенной к границе полупространства, имеем формулу

$$P_z=2\pi(M\alpha^{-1}\Psi+N\gamma^{-1}Q)_\infty \tag{1.8}$$

2. Метод решения. Обобщая формулы Положего для выражения r-аналитической функции через аналитическую [7], представим (r,α)-аналитическую функцию $\Phi+i\Psi$ в виде

$$\Phi+i\Psi=\operatorname{Re}\int_{\tau_0}^{\zeta_1}\vartheta(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{(\zeta_1-\tau)(\bar\zeta_1+\tau)}}+$$
$$+i\operatorname{Im}\int_{\tau_0}^{\zeta_1}\vartheta(\tau)\left(\tau-\frac{\zeta-\bar\zeta_1}{2}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{(\zeta_1-\tau)(\bar\zeta_1+\tau)}} \tag{2.1}$$

где $\vartheta(\zeta_1)=\varphi+i\psi$ — аналитическая функция «усложненного» аргумента $\zeta_1=r+iz_1$, $z_1=z/\alpha$ и $\tau=\xi+i\eta$. Положение начальной точки τ_0 на оси z в выражении (2.1) нефиксировано, и путь интегрирования может быть произвольным.

Функция $\vartheta=\varphi+i\psi$, рассматриваемая в зависимости от переменных (r, z), удовлетворяет видоизмененным условиям Коши — Римана $\partial\varphi/\partial r=\alpha\partial\psi/\partial z$, $\alpha\partial\varphi/\partial z=-\partial\psi/\partial r$, в связи с чем такую функцию будем называть также α-аналитической (от переменного $\zeta=r+iz$).

В аналогичном (2.1) виде представима также (r,γ)-аналитическая функция $P+iQ$ через аналитическую функцию $\sigma(\zeta_2)=p+iq$ переменного

$\zeta_2=r+iz_2$, $z_2=z/\gamma$ и (r, β)-аналитическая функция $\chi+i\Omega$ через аналитическую функцию $\Delta(\zeta_3)=\chi+i\omega$ переменного $\zeta_3=r+iz_3$, $z_3=z/\beta$.

В силу осевой симметрии φ, p и χ являются четными, а ψ, q и ω — нечетными функциями от r.

Будем предполагать, что при $\tau\to\infty$ функции ϑ, σ и Δ имеют порядок: $\vartheta(\tau)=iD_1/\tau+\ldots$, $\sigma(\tau)=iD_2/\tau+\ldots$, $\Delta(\tau)=iD_3/\tau+\ldots$, где D_1, D_2, D_3 — действительные постоянные.

Применив к подынтегральным функциям выражения (2.1) теорему Коши для замкнутого контура $l_1+l_2+l_3+l_4+l_5$ (l_1 — прямолинейный отрезок $\eta=z_1$, $0<\xi<r$, l_2 — полуокружность бесконечно малого радиуса, охватывающая точку $\tau=\zeta_1$ снизу, l_3 — прямолинейный отрезок $\eta=z_1$, $r<\xi<\infty$, l_4 — дуга бесконечного радиуса и l_5 — участок мнимой оси от $-\infty$ до z_1), придем к равенствам

$$\Phi(r,z)=\int_0^r\varphi(\xi,z)\,\frac{d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}=-\int_r^\infty\psi(\xi,z)\,\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}} \tag{2.2}$$

$$\Psi(r,z)=\int_0^r\psi(\xi,z)\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}=\int_r^\infty\varphi(\xi,z)\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}+\frac{\pi}{2}D_1 \tag{2.3}$$

справедливым на прямолинейном контуре $z=\text{const}$.

Из (2.3) следует, что при $r\to\infty$ $\Psi_\infty=\pi D_1/2$, $Q_\infty=\pi D_2/2$, так что формула (1.8) принимает вид

$$P_z=\pi^2(M\alpha^{-1}D_1+N\gamma^{-1}D_2) \tag{2.4}$$

Формулы (2.2), (2.3) дают следующие выражения для производных:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=-\frac{1}{r}\int_r^\infty\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=-\frac{1}{\alpha}\int_r^\infty\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}} \tag{2.5}$$

Обращая первое равенство (2.2) и второе (2.5), получим

$$\varphi(\xi,z)=\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\xi\Phi\,\frac{r\,dr}{\sqrt{\xi^2-r^2}},\qquad \frac{1}{\alpha}\varphi(\xi,z)=\frac{2}{\pi}\int_\xi^\infty\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\xi^2}} \tag{2.6}$$

Формулы типа (2.2), (2.3), (2.5) и (2.6) справедливы также для функций $P+iQ$, $p+iq$ и функций $\chi+i\Omega$, $\chi+i\omega$.

Полученные результаты позволяют граничные условия (1.5) записать при $0<r<a$ в форме

$$\int_0^r(A_0\varphi+Ap)\,\frac{d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}=-h+f(r),\qquad \int_0^r(B_0\psi+Bq)\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}=0$$

а при $a<r<\infty$ — в форме

$$-\int_r^\infty\left(\frac{M}{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{N}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}=0,\qquad -\int_r^\infty\left(\frac{M}{\alpha^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{N}{\gamma^2}\frac{\partial q}{\partial\xi}\right)\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}=0$$

Условия (1.6) соответственно при $0<r<a$ и $a<r<\infty$ примут вид

$$\int_0^r\omega\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}=\varepsilon r^2,\qquad \int_r^\infty\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}=0 \tag{2.7}$$

Используя формулы обращения (2.6), придем к граничным условиям для функций $\varphi+i\psi$, $p+iq$ и $\chi+i\omega$ при $z=0$:

$$A_0\varphi+Ap=F(\xi),\quad B_0\psi+Bq=0\quad (0<\xi<a) \tag{2.8}$$

$$M\alpha^{-1}\varphi+N\gamma^{-1}p=0,\quad M\alpha^{-2}\psi+N\gamma^{-2}q=0\quad (a<\xi<\infty) \tag{2.9}$$

$$F(\xi)=\frac{2}{\pi}\left(-h+\xi\int_0^\xi\frac{f'(r)\,dr}{\sqrt{\xi^2-r^2}}\right)$$

$$\omega|_{z=0}=\omega^*(\xi),\quad \omega^*=4\varepsilon\xi/\pi\ (0<\xi<a),\ \omega^*=0\ (a<\xi) \tag{2.10}$$

Доопределив функцию $F(\xi)$ четным, а $\omega^*(\xi)$ — нечетным образом на отрицательные значения ξ, придем к смешанной задаче (2.8), (2.9) для функций $\vartheta(\zeta_1)=\varphi+i\psi$ и $\sigma(\zeta_2)=p+iq$ и к задаче Дирихле (2.10) для функции $\Delta(\zeta_3)=\chi+i\omega$ в полуплоскости $z\leqslant 0$.

3. Решение задачи кручения. Решение задачи Дирихле (2.10) для полуплоскости $z_3\leqslant 0$, убывающее в бесконечности, имеет вид

$$\Delta(\zeta_3)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^*(\xi)\,d\xi}{\xi-\zeta_3}=2a+\zeta_3\ln\frac{\zeta_3-a}{\zeta_3+a} \tag{3.1}$$

Если величина a задана, то выражение (3.1) полностью определяет функцию $\Delta(\zeta_3)$, и тогда согласно (1.3), (2.2), (2.3) и (2.5) нахождение функций $v(r,z)$ и $\tau_{z\theta}(r,z)$ сводится к вычислению квадратур. Например, для тангенциального смещения границы полупространства вне области контакта из (1.3), (2.3) и (2.10) имеем

$$v=\frac{1}{r}\int_0^r\frac{\omega^*(\xi)\,\xi\,d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}=\frac{2\varepsilon}{\pi r}\left(r^2\arcsin\frac{a}{r}-a\sqrt{r^2-a^2}\right)$$

Напряжение $\tau_{z\theta}$ под штампом найдем из (1.3) и (2.2):

$$\tau_{z\theta}=-\frac{A_{44}}{\beta}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty\frac{\omega^*(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}=\frac{4A_{44}\varepsilon}{\pi\beta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

Суммарный крутящий момент, обеспечивающий поворот штампа на угол ε, равен

$$M_z=2\pi\int_0^a r^2\tau_{z\theta}\,dr=\frac{16}{3}\frac{A_{44}a^3\varepsilon}{\beta}$$

что согласуется с соответствующей формулой для кручения изотропного полупространства [3].

4. Решение осесимметричной задачи. Осесимметричная задача свелась к определению в полуплоскости $z\leqslant 0$ функций $\vartheta=\varphi+i\psi$ и $\sigma=p+iq$, первая из которых является α-аналитической, а вторая — γ-аналитической, по смешанным граничным условиям (2.8) и (2.9) на границе $z=0$. Для решения последней задачи заметим, что если $W^*(\zeta)=U^*(\xi,z)+iV^*(\xi,z)$ — аналитическая функция переменного $\zeta=\xi+iz$, то функция $W(\zeta)=U(\xi,z)+iV(\xi,z)=W^*(\zeta_1)=U^*(\xi,z/\alpha)+iV^*(\xi,z/\alpha)$, где $\zeta_1=\xi+iz/\alpha$, будет α-аналитической переменного ζ, причем на оси $z=0$ значения функций $W^*(\zeta)$ и $W(\zeta)$ совпадают. Поэтому, если найти аналитические функции $\vartheta(\zeta)$ и $\sigma(\zeta)$ переменного ζ, удовлетворяющие условиям (2.8), (2.9), то, заменив в первой функции ζ на $\zeta_1=\xi+iz/\alpha$, а во второй ζ на $\zeta_2=\xi+iz/\gamma$, получим искомые функции $\vartheta(\zeta_1)$ и $\sigma(\zeta_2)$.

Таким образом приходим к задаче определения двух аналитических функций $\vartheta(\zeta)=\varphi+i\psi$ и $\sigma(\zeta)=p+iq$ по условиям (2.8), (2.9), которая сводится к двум задачам сопряжения.

Доопределим функции $\vartheta(\zeta)$ и $\sigma(\zeta)$ в верхней полуплоскости, исходя из равенств $\vartheta^+(\zeta)=\overline{\vartheta(\bar{\zeta})}$, $\sigma^+(\zeta)=\overline{\sigma(\bar{\zeta})}$, и перепишем условия (2.9) в виде

$$\vartheta^-(\xi)+\vartheta^+(\xi)+b(\sigma^-(\xi)+\sigma^+(\xi))=0 \quad (b=N\alpha/M\gamma) \tag{4.1}$$

$$\vartheta^-(\xi)-\vartheta^+(\xi)+d(\sigma^-(\xi)-\sigma^+(\xi))=0 \quad (d=b\alpha/\gamma)$$

Введем в верхней и нижней полуплоскостях функции

$$\Omega_1^\pm(\zeta)=\mp(\vartheta(\zeta)+b\sigma(\zeta)), \quad \Omega_2^\pm(\zeta)=\vartheta(\zeta)+d\sigma(\zeta) \tag{4.2}$$

Условия (4.1) показывают, что $\Omega_1^+(\zeta)$ и $\Omega_1^-(\zeta)$ являются ветвями одной и той же функции $\Omega_1(\zeta)$, аналитической во всей плоскости ζ за исключением разреза $-a<\xi<a$. То же справедливо для $\Omega_2^+(\zeta)$ и $\Omega_2^-(\zeta)$.

Разрешая уравнения (4.2), получим $(e=1/(b-d))$:

$$\vartheta=e(d\Omega_1+b\Omega_2), \quad \sigma=-e(\Omega_1+\Omega_2) \quad (z>0) \tag{4.3}$$

$$\vartheta=-e(d\Omega_1-b\Omega_2), \quad \sigma=e(\Omega_1-\Omega_2) \quad (z<0) \tag{4.4}$$

При помощи последних выражений условия (2.8) запишутся, как условия на разрезе $-a<\xi<a$:

$$n_1(\Omega_1^+-\Omega_1^-)+k_1(\Omega_2^++\Omega_2^-)=2F(\xi)$$

$$m_1(\Omega_1^++\Omega_1^-)-l_1(\Omega_2^+-\Omega_2^-)=0 \tag{4.5}$$

$$n_1=e(A_0d-A), \quad k_1=e(A_0b-A)$$

$$m_1=-e(B_0d-B), \quad l_1=e(B_0b-B)$$

Предварительно умножив второе из равенств (4.5) на числовой множитель η, сложим его с первым. В результате получим

$$\Omega_1^+ + \frac{k_1-\eta l_1}{n_1+\eta m_1}\Omega_2^+ - \frac{n_1-\eta m_1}{n_1+\eta m_1}\left(\Omega_1^- - \frac{k_1+\eta l_1}{n_1-\eta m_1}\Omega_2^-\right)=\frac{2F(\xi)}{n_1+\eta m_1} \tag{4.6}$$

При выполнении условия $(k_1-\eta l_1)/(n_1+\eta m_1)=(k_1+\eta l_1)/(n_1-\eta m_1)$ для η получим два значения $\eta_{1,2}=\pm(\alpha\gamma)^{-1/2}$. Беря в (4.6) поочередно значения η_1 и $-\eta_1$, придем к двум задачам сопряжения на отрезке $-a<\xi<a$:

$$\Lambda_1^+=G\Lambda_1^-+f_1(\xi), \quad \Lambda_2^+=G^{-1}\Lambda_2^-+f_2(\xi) \tag{4.7}$$

$$\Lambda_1=\Omega_1-K\Omega_2, \quad \Lambda_2=\Omega_1+K\Omega_2 \tag{4.8}$$

$$G=(n_1-\eta_1 m_1)/(n_1+\eta_1 m_1), \quad K=\eta_1 l_1 m_1^{-1}$$

$$f_1(\xi)=2F(\xi)/(n_1+\eta_1 m_1), \quad f_2(\xi)=2F(\xi)/(n_1-\eta_1 m_1)$$

Для первой группы трансверсально-изотропных материалов число $G>0$ и его величина приведена в таблице (для изотропной среды $G=1/\varkappa$, $\varkappa=3-4\nu$, где ν — коэффициент Пуассона).

Решения задач сопряжения (4.7), исчезающие в бесконечности при условии $G>0$, имеют вид [8]:

$$\Lambda_1=\frac{X(\zeta)}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f_1(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-\zeta)},\qquad \Lambda_2=\frac{X^{-1}(\zeta)}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{X^+(t)f_2(t)\,dt}{t-\zeta} \tag{4.9}$$

$$X(\zeta)=((\zeta+a)/(\zeta-a))^{i\delta},\qquad \delta=(\ln G)/2\pi$$

После того как $\Lambda_1(\zeta)$ и $\Lambda_2(\zeta)$ найдены, функции $\vartheta(\zeta)$ и $\sigma(\zeta)$ определяются при помощи равенств (4.4) и (4.8)

$$\vartheta(\zeta)=M_1\Lambda_1(\zeta)+M_2\Lambda_2(\zeta),\qquad \sigma(\zeta)=N_1\Lambda_1(\zeta)+N_2\Lambda_2(\zeta) \tag{4.10}$$

$$M_{1,2}=-(b\pm dK)/L,\quad N_{1,2}=(K\pm1)/L,\quad L=2K(b-d)$$

Функции $\vartheta(\zeta_1)$ и $\sigma(\zeta_2)$ получаются из выражений (4.10) соответствующей заменой переменной ζ на ζ_1 и ζ_2.

Компоненты перемещений и напряжений выражаются при помощи формул (1.1), (1.2), (2.2), (2.3) и (2.5) в виде квадратур, содержащих функции $\vartheta(\zeta_1)$ и $\sigma(\zeta_2)$.

Заметим, что если $f(r)$ имеет вид полинома, то интегралы в выражениях (4.8) вычисляются в конечном виде [8].

5. Примеры. Приведем более подробные формулы для штампа с плоским и параболоидальным основанием. В этом случае $f(r)=r^2/2R_0$, где R_0 – радиус кривизны основания на оси симметрии (для плоского основания $R_0=\infty$):

$$F(\xi)=2(-h+\xi^2/R_0)/\pi,\quad f_1(\xi)=a_0h+a_2\xi^2$$

$$f_2(\xi)=b_0h+b_2\xi^2,\quad a_0=-4/(\pi(n_1+\eta_1m_1))$$

$$b_0=-4/(\pi(n_1-\eta_1m_1)),\ a_2=-a_0/R_0,\ b_2=-b_0/R_0$$

и для функций $\Lambda_1(\zeta)$ и $\Lambda_2(\zeta)$ получим следующие выражения:

$$\Lambda_1=[f_1(\zeta)(1-X(\zeta))+(2\delta^2a^2a_2+2i\delta aa_2\zeta)X(\zeta)]/(1-G) \tag{5.1}$$

$$\Lambda_2=G[f_2(\zeta)(1-X^{-1}(\zeta))+(2\delta^2a^2b_2-2i\delta ab_2\zeta)X^{-1}(\zeta)]/(G-1)$$

Асимптотика Λ_1 и Λ_2 при $\zeta\to\infty$ имеет вид $\Lambda_1(\zeta)=i\lambda_1\zeta^{-1}+\ldots$, $\Lambda_2(\zeta)=i\lambda_2\zeta^{-1}+\ldots$, где $\lambda_1=2\delta a[a_0h+(1-2\delta^2)a^2a_2/3]/(G-1)$, $\lambda_2=2\delta aG[b_0h+(1-2\delta^2)a^2b_2/3]/(G-1)$. Учитывая ее, согласно (4.10) найдем $D_1=(M_1+M_2)D_0$, $D_2=(N_1+N_2)D_0$, $D_0=4\delta a[h-a^2(1-2\delta^2)/3R_0]/\pi\eta_1m_1$.

Теперь из (2.4) получим зависимость между прижимающей силой P_z и осадкой штампа h:

$$P_z=\frac{8\pi\delta a}{\eta_1m_1}\,\frac{A_{44}(\alpha^2+k)}{\alpha+k}\left(h-\frac{a^2(1-2\delta^2)}{3R_0}\right) \tag{5.2}$$

В частном случае штампа с плоским основанием выражение (5.2) совпадает с формулой, приведенной в [4], и для изотропного вещества переходит в известную формулу [2, 3] (μ – модуль сдвига): $P_z=-16\pi\delta\mu ah/(\varkappa-1)$.

Пользуясь формулами (1.2), (2.2) и (4.10), найдем выражения для компонент напряжения σ_z и τ_{zr} под штампом

$$\sigma_z=-\int_0^r\left(\frac{M}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{N}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}=S\left[\frac{2a\delta}{R_0}J_0{}^c-\frac{2}{R_0}J_1{}^s+\right.$$

$$\left.+2a\delta\left(h+\frac{2\delta^2a^2}{R_0}\right)I_0{}^c-\frac{4\delta^2a^2}{R_0}I_1{}^s-\frac{2a\delta}{R_0}I_2{}^c\right] \tag{5.3}$$

$$\tau_{zr}=\frac{1}{r}\int\limits_0^r\left(\frac{M}{\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{N}{\gamma^2}\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}=$$

$$=T\left\{\frac{\pi}{R_0}r-\frac{G+1}{r\sqrt{G}}\left[\frac{2\delta a}{R_0}J_1^s+\frac{2}{R_0}J_2^c+\frac{4\delta^2a^2}{R_0}I_2^c+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2a\delta\left(h+\frac{2\delta^2a^2}{R_0}\right)I_1^s-\frac{2a\delta}{R_0}I_3^s\right]\right\}\qquad(5.4)$$

$$J_j^c=\int\limits_0^r\xi^j\cos\delta\rho\frac{d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}},\qquad I_j^c=\int\limits_0^r\frac{\xi^j\cos\delta\rho}{a^2-\xi^2}\frac{d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}$$

$$\rho=\ln\left|\frac{a+\xi}{a-\xi}\right|,\qquad T=-\frac{2}{\pi\eta_1m_1}\frac{A_{44}(\alpha^2+k)}{K\alpha(\alpha+k)}\qquad S=\frac{TK\alpha(G+1)}{\sqrt{G}}$$

а выражения J_j^s и I_j^s получаются из J_j^c и I_j^c заменой $\cos\delta\rho$ на $\sin\delta\rho$.

За счет присутствия функций $I_j^{c,s}(r)$ компоненты напряжений, как и для изотропной среды, в малой окрестности точки $r=a$ совершают бесконечное число колебаний с переменой знака, причем амплитуда их неограниченно возрастает. Область колебания расположена на участке $\pi/2\leqslant\leqslant\delta\rho<\infty$, чему соответствует зона $(r^*/a,\ 1)$, о ширине которой можно судить из приведенной таблицы.

Для изотропного полупространства и штампа с плоским основанием выражение (5.3) переходит в известную формулу [3]:

$$\sigma_z=8\mu a\delta(\varkappa+1)hI_0^c/\pi\sqrt{\varkappa}(\varkappa-1)$$

Приведем еще формулы для определения смещения свободной границы полупространства $r>a$:

$$w=-\int\limits_r^\infty(A_0\psi+Aq)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}=$$

$$=W_0\int\limits_r^\infty\left[\left(h+\frac{2\delta^2a^2}{R_0}-\frac{\xi^2}{R_0}\right)\sin\delta\rho+\frac{2\delta a\xi}{R_0}\cos\delta\rho\right]\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}$$

$$u=\frac{1}{r}\left[\frac{\pi}{2}(B_0D_1+BD_2)+\int\limits_r^\infty(B_0\varphi+Bp)\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{r}\left\{U_0\left(h-\frac{a^2(1-2\delta^2)}{3R_0}\right)+V_0\int\limits_r^\infty\left[h-\frac{\xi^2}{R_0}+\frac{2\delta a\xi}{R_0}\sin\delta\rho-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(h+\frac{2\delta^2a^2}{R_0}-\frac{\xi^2}{R_0}\right)\cos\delta\rho\right]\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}},\qquad V_0=-\frac{\gamma}{K}W_0\right.$$

$$W_0=\frac{4(\alpha^2-k)}{\pi\eta_1m_1(\alpha+k)(\gamma-\alpha)},\qquad U_0=\frac{4\delta a\alpha(\alpha\gamma-k)}{\eta_1m_1(\alpha+k)(\gamma-\alpha)}$$

Для плоского штампа эти формулы совпадают с данными из [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гоман О. Г.* Представление общего решения уравнений теории упругости трансверсально-изотропного тела через p-аналитические функции.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 1, с. 98–104.
2. *Моссаковский В. И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий.— ПММ, 1954, т. 18, вып. 2. с. 187–196.
3. *Александров А. Я., Соловьев Ю. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978. 462 с.
4. *Фабрикант В. И.* Осесимметричная задача о штампе, сцепленном с трансверсально-изотропным полупространством.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6, с. 141–146.
5. *Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища школа, 1981. 136 с.
6. *Батугин С. А., Ниренберг Р. К.* Приближенная зависимость между упругими константами анизотропных горных пород и параметры анизотропии.— Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископ., 1972, № 1, с. 7–12.
7. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1949. 635 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
4.II.1985