МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1986

УДК 531.383

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ГИРОСКОПОМ И ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ

ПЕНДЮХОВА Н. В., СОБОЛЕВ В. А., СТРЫГИН В. В.

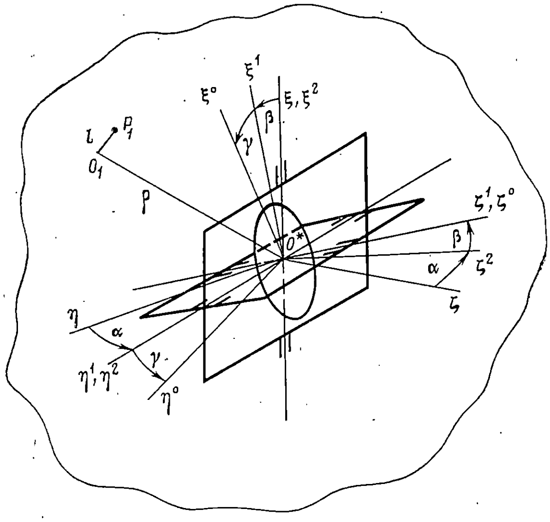
Задача о движении твердых тел, несущих гироскопические устройства и подвижные массы, исследовалась в [1–7]. В публикуемой работе развиваются результаты работ [4–6].

Изучается динамика свободного твердого тела, несущего гироскоп в кардановом подвесе и подвижную частицу, соединенную с некоторой внутренней точкой тела упругой связью, при наличии вязкого трения. Методом интегральных многообразий исследуется устойчивость ряда стационарных движений системы, частные случаи движения твердого тела с гироскопом и твердого тела с одной подвижной массой.

1. Рассмотрим движение свободного твердого тела D массы m, несущего гироскоп в кардановом подвесе массы m_2, и связанную с телом упругой связью частицу P_1 массы m_1. Через σ и λ обозначим жесткость связи и коэффициент вязкого трения. Пусть O_1 — некоторая точка тела, представляющая собой среднее (номинальное) положение частицы P_1. Обозначим через D^* систему, состоящую из тела D, гироскопа и частицы P_1, находящейся в номинальном положении. Пусть O^* — ее центр инерции. Будем считать, что центр карданова подвеса совпадает с точкой O^* и центром масс ротора. Положение точки O_1 определяется вектором $\boldsymbol{\rho}=O^*O_1$, а частицы P_1 — смещением $\mathbf{l}=O_1P_1$. Обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ абсолютную угловую скорость тела D. Введем следующие правые ортогональные системы координат (фиг. 1): O_*, ξ^*, η^*, ζ^* — инерциальная система координат, O^*, ξ, η, ζ — система координат, жестко связанная с телом D, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции системы D^*, O^*, ξ^2, η^2, ζ^2; O^*, ξ^1, η^1, ζ^1; O^*, ξ^0, η^0, ζ^0 — системы координат, связанные, соответственно, с внешним и внутренним кольцами и ротором гироскопа, оси которых являются главными центральными осями инерции этих тел. Поворот внешнего кольца относительно системы O^*, ξ, η, ζ определяется углом α между осями η^2 и η, поворот внутреннего кольца относительно внешнего — углом β между осями ζ^1 и ζ^2, поворот ротора относительно внутреннего кольца — углом γ между осями ξ^0 и ξ^1. Будем предполагать, что ротор гироскопа является динамически симметричным относительно оси ζ^0.

Обозначим через A_2, B_2, C_2; A_1, B_1, C_1; $A_0=B_0$, C_0 осевые моменты, соответственно, внешнего и внутреннего колец и ротора гироскопа в системах координат, связанных с этими телами, а через A, B, C — осевые моменты системы D^* в системе координат O^*, ξ, η, ζ. Будем предполагать, что момент сопротивления вращению ротора уравновешивается вращающим моментом двигателя.

Уравнения движения описанной механической системы можно получить следуя работам [1, 2, 4]. Введем безразмерные переменные $\tau=t\Omega$, $\mathbf{y}=\boldsymbol{\omega}/\Omega$, $\mathbf{z}=\mathbf{l}/|\boldsymbol{\rho}|$, $\mathbf{e}=\boldsymbol{\rho}/|\boldsymbol{\rho}|$, $\mathbf{x}=\|\alpha, \beta\|^T$ (Ω — некоторое характерное значение величины $|\boldsymbol{\omega}|$). Векторы $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{e}$ в проекциях на оси системы O^*, ξ, η, ζ имеют координаты p, q, r; z_1, z_2, z_3; e_1, e_2, e_3. В качестве малых параметров задачи рассмотрим $\varepsilon=\Omega A_g/H_g$, $\mu=A_g/A^*$, $\delta=m_1|\boldsymbol{\rho}|^2/A^*$. Здесь A_g — величина порядка осевых моментов колец карданова подвеса и ротора гироскопа ($A_g\sim A_1$), A^* — величина порядка осевых моментов системы D^* ($A^*\sim$



$\sim B$). Первый интеграл системы, означающий постоянство собственного момента гироскопа, имеет вид

$$H_g = C_0(\gamma' + (\alpha' + p) S_\beta - q S_\alpha S_\beta + r C_\alpha C_\beta) = \text{const}$$

$$C_\alpha = \cos\alpha,\ S_\alpha = \sin\alpha,\ C_\beta = \cos\beta,\ S_\beta = \sin\beta$$

(штрих означает дифференцирование по безразмерному времени τ). Заметим, что $m_1 = \varkappa\delta M$, $M = m + m_1 + m_2$, $\varkappa$ — некоторое число порядка $O(1)$.

Обозначим через n_2 и n_1 коэффициенты вязкого трения на осях внешнего и внутреннего кардановых колец. Пусть $\nu = \mu/\varepsilon$, $N_2 = n_2/(\Omega A_g)$, $N_1 = n_1/(\Omega A_g)$, $\Lambda_1 = \delta\Lambda$, $\Lambda_1 = \lambda|\rho|^2/(\Omega A^*)$, $\Sigma = \sigma|\rho|^2/(A^*\Omega^2)$.

В дальнейшем будем считать [4], что $\Sigma \gg \delta\Lambda \gg \delta$, $\Sigma = O(1)$.

Используя введенные обозначения, запишем уравнения движения исследуемой механической системы в следующем виде:

$$(\mathbf{S}_0 + \mu\mathbf{S}_1) y' + \mu\mathbf{T}\mathbf{x}'' + \nu(\mathbf{U}\mathbf{y} + \mathbf{V}\mathbf{x}') + \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mu\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}) + \delta\mathbf{g}_2(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'') = 0$$

$$\varepsilon\mathbf{F}\mathbf{x}'' + (\varepsilon\mathbf{W} + \mathbf{G})\mathbf{x}' + \varepsilon\mathbf{Q}\mathbf{y}' + \mathbf{R}\mathbf{y} + \varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}) = 0$$

$$\delta(1 - \varkappa\delta)\mathbf{z}'' + \delta\Lambda\mathbf{z}' + \Sigma\mathbf{z} = -\delta[\varphi_1(\mathbf{y}, \mathbf{y}') +$$

$$+ (1 - \varkappa\delta)(\varphi_2(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}) + \varphi_3(y, \mathbf{z}'))] \qquad (1.1)$$

$$\mathbf{S}_0 = \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{Vmatrix} 0 & C_\alpha C_\beta & S_\alpha C_\beta \\ -C_\alpha C_\beta & 0 & S_\beta \\ -S_\alpha C_\beta & -S_\beta & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{Vmatrix} a & a_1 S_\alpha S_\beta C_\beta & -a_1 C_\alpha C_\beta S_\beta \\ a_1 S_\alpha S_\beta C_\beta & b_1 C_\alpha^2 + c S_\alpha^2 & (b_1 - c) C_\alpha S_\alpha \\ -a_1 C_\alpha S_\beta C_\beta & (b_1 - c) S_\alpha C_\alpha & b_1 S_\alpha^2 + c C_\alpha^2 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{Vmatrix} 0 & C_\beta \\ -C_\alpha C_\beta & S_\alpha S_\beta \\ -S_\alpha C_\beta & -C_\alpha S_\beta \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ a_1 S_\alpha S_\beta C_\beta & b C_\alpha \\ -a_1 C_\alpha S_\beta C_\beta & b S_\alpha \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{g}_1^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{g}_1^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}) + \mathbf{g}_1^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

$$\mathbf{g}_1^1 = \begin{Vmatrix} -a_1 v_1 p S_\beta C_\beta + (b_1 - c) u_1 v_1 \\ a_1 (p^2 C_\alpha + u_1 r) C_\beta S_\beta - p[(b_1 - c) v_1 S_\alpha + (c - a) r] \\ a_1 (p^2 S_\alpha - u_1 q) C_\beta S_\beta + p[(b_1 - c) v_1 C_\alpha + (c - a) q] \end{Vmatrix}$$

$$g_1^2=\left\|\begin{matrix}[-a_1pS_{2\beta}+(a_1C_{2\beta}+b)\,u_1]\,\beta'\\ [ar+a_1pC_\alpha S_{2\beta}-(b_1-c)\,u_2]\,\alpha'+\\ +[(a_1C_{2\beta}-b)\,pS_\alpha+a_1u_1S_{2\beta}S_\alpha]\,\beta'\\ [-aq+a_1pS_\alpha S_{2\beta}+(b_1-c)\,v_2]\,\alpha'+\\ +[-(a_1C_{2\beta}-b)\,pC_\alpha-a_1u_1S_{2\beta}C_\alpha]\,\beta'\end{matrix}\right\|$$

$$g_1^3=\left\|\begin{matrix}-a_1S_{2\beta}\alpha'\beta'\\ a_1C_\alpha S_\beta C_\beta(\alpha')^2+(a_1C_{2\beta}-b)\,S_\alpha\beta'\alpha'\\ a_1S_\alpha S_\beta C_\beta(\alpha')^2-(a_1C_{2\beta}-b)\,C_\alpha\beta'\alpha'\end{matrix}\right\|$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y})=\|(C-B)\,qr,\ (A-C)\,pr,\ (B-A)\,pq\|^T$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{y},\mathbf{y}',\mathbf{z},\mathbf{z}',\mathbf{z}'')=(\mathbf{e}+(1-\varkappa\delta)\mathbf{z})\times(\mathbf{y}'\times\mathbf{z}+\mathbf{y}\times\mathbf{z}'+\mathbf{z}'')+$$
$$+(1-\varkappa\delta)\,(\mathbf{z}'\times\mathbf{y}\times\mathbf{z}+\mathbf{y}\times\mathbf{z}\times\mathbf{y}\times\mathbf{z}+\mathbf{y}\times\mathbf{z}\times\mathbf{z}')+\mathbf{z}'\times\mathbf{y}\times\mathbf{e}+$$
$$+\mathbf{z}\times\mathbf{y}'\times\mathbf{e}+\mathbf{y}\times\mathbf{e}\times\mathbf{y}\times\mathbf{z}+\mathbf{y}\times\mathbf{e}\times\mathbf{z}'+\mathbf{y}\times\mathbf{z}\times\mathbf{y}\times\mathbf{e}$$

$$\mathbf{F}=\left\|\begin{matrix}a&0\\0&b\end{matrix}\right\|,\quad \mathbf{W}=\left\|\begin{matrix}N_2&0\\0&N_1\end{matrix}\right\|,\quad \mathbf{G}=\left\|\begin{matrix}0&C_\beta\\-C_\beta&0\end{matrix}\right\|$$

$$\mathbf{Q}=\left\|\begin{matrix}a&a_1S_\alpha S_\beta C_\beta&-a_1C_\alpha S_\beta C_\beta\\0&bC_\alpha&bS_\alpha\end{matrix}\right\|,\qquad R=-V^T$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{y})=\mathbf{f}^1(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{y})+\mathbf{f}^2(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{f}^3(\mathbf{x},\mathbf{x}')$$

$$\mathbf{f}^1=\left\|\begin{matrix}[(a_1C_{2\beta}+b)\,u_1-a_1pS_{2\beta}]\,\beta'\\-[(a_1C_{2\beta}+b)\,u_1-a_1pS_{2\beta}]\,\alpha'\end{matrix}\right\|$$

$$\mathbf{f}^2=\left\|\begin{matrix}-(c-b_1)\,u_1v_1-a_1pv_1C_\beta S_\beta\\a_1[p^2S_\beta C_\beta-u_1^2S_\beta C_\beta-u_1pC_{2\beta}]\end{matrix}\right\|,\qquad \mathbf{f}^3=\left\|\begin{matrix}-a_1S_{2\beta}\alpha'\beta'\\a_1S_\beta C_\beta(\alpha')^2\end{matrix}\right\|$$

$$\varphi_1(\mathbf{y},\mathbf{y}')=\mathbf{y}\times\mathbf{y}\times\mathbf{e}+\mathbf{y}'\times\mathbf{e},\qquad \varphi_2(\mathbf{y},\mathbf{y}',\mathbf{z})=\mathbf{y}\times\mathbf{y}\times\mathbf{z}+\mathbf{y}'\times\mathbf{z}$$

$$\varphi_3(\mathbf{y},\mathbf{z}')=2\mathbf{y}\times\mathbf{z}',\qquad a=A_2+C_1+a_1C_\beta^2,\qquad a_1=A_0+A_1-C_1$$

$$b=A_0+B_1,\qquad b_1=b+B_2,\qquad c=a_1S_\beta^2+C_1+C_2$$

$$C_\beta^2=\cos^2\beta,\qquad S_\beta^2=\sin^2\beta,\qquad C_\alpha^2=\cos^2\alpha,\qquad S_\alpha^2=\sin^2\alpha$$

$$C_{2\beta}=\cos 2\beta,\qquad S_{2\beta}=\sin 2\beta,\qquad u_1=qS_\alpha-rC_\alpha,\qquad v_1=qC_\alpha+rS_\alpha$$

$$u_2=qS_{2\alpha}-rC_{2\alpha},\qquad v_2=qC_{2\alpha}+rS_{2\alpha}.\qquad C_{2\alpha}=\cos 2\alpha,\qquad S_{2\alpha}=\sin 2\alpha$$

Система (1.1) содержит малые параметры при части производных, т. е. является сингулярно возмущенной. Для анализа этой системы удобно воспользоваться методом интегральных многообразий Боголюбова — Митропольского [8—10].

2. Рассматриваемая механическая система имеет несколько однопараметрических семейств стационарных движений. С помощью метода интегральных многообразий сравнительно просто исследуются следующие случаи:

$$q=q_0=\text{const},\ p=r=0,\ \alpha=\pi/2,\ \beta=0,\ \mathbf{z}=\mathbf{z}^0\tag{2.1}$$

$$q=q_0=\text{const},\ p=r=0,\ \alpha=-\pi/2,\ \beta=0,\ \mathbf{z}=\mathbf{z}^0\tag{2.2}$$

$$\mathbf{z}^0=\Sigma_0^{-1}q_0^2\|e_1,\ 0,\ e_3\|^T,\ \Sigma_0=\Sigma-\delta(1-\varkappa\delta)\,q_0^2$$

если точка O_1 лежит в плоскости $\xi O^*\zeta$, и $\mathbf{z}^0=0$, если O_1 лежит на оси η:

$$r=r_0=\text{const},\ p=q=0,\ \alpha=0,\ \beta=0,\ \mathbf{z}=\mathbf{z}^0\tag{2.3}$$

$$r=r_0=\text{const},\ p=q=0,\ \alpha=\pi,\ \beta=0,\ \mathbf{z}=\mathbf{z}^0\tag{2.4}$$

$$\mathbf{z}^0=\Sigma_1^{-1}r_0^2\|e_1,\ e_2,\ 0\|^T,\ \Sigma_1=\Sigma-\delta(1-\varkappa\delta)\,r_0^2$$

если точка O_1 лежит в плоскости $\xi O^*\eta$, и $\mathbf{z}^0=0$, если O_1 лежит на оси ζ.

Следуя [10, 11], можно показать, что для системы (1.1), при условии $\cos\beta\neq0$, существует устойчивое пятимерное интегральное многообразие

$x'=H^1(x, y, \varepsilon, \mu, \delta)$, $z=h(x, y, \varepsilon, \mu, \delta)$, $z'=h^1(x, y, \varepsilon, \mu, \delta)$, которое представимо в виде асимптотического ряда $H^1(x, y, \varepsilon, \mu, \delta)=\sum\varepsilon^i\mu^j\delta^k H^1_{i,j,k}(x, y)$, $h(x, y, \varepsilon, \mu, \delta)=\sum\varepsilon^i\mu^j\delta^k h_{i,j,k}(x, y)$, $h^1(x, y, \varepsilon, \mu, \delta)=\sum\varepsilon^i\mu^j\delta^k h^1_{i,j,k}(x, y)$.

Коэффициенты разложений определяются приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях малых параметров в формальных тождествах, получающихся из (1.1) заменой x' на H^1, z на h, z' на h^1:

$$(S_0+\mu S_1)y'+g(y)+\nu(Uy+VH^1)+\mu g_1(x, H^1, y)+$$
$$+\mu T(H_x{}^1H^1+H_y{}^1y')+\delta g_2(y, y', h, h^1, h_x{}^1H^1+h_y{}^1y')=0$$
$$\varepsilon F(H_x{}^1H^1+H_y{}^1y')+(G+\varepsilon W)H^1+Ry+\varepsilon Qy+\varepsilon f(x, H^1, y)=0$$
$$\delta(1-\varkappa\delta)(h_x{}^1H^1+h_y{}^1y')+\delta\Lambda h^1+\Sigma h=-\delta[\varphi_1(y, y')+$$
$$+(1-\varkappa\delta)(\varphi_2(y, y', h)+\varphi_3(y, h^1))],\ h_xH^1+h_yy'=h^1$$

(нижний индекс x или y означает дифференцирование по соответствующей переменной).

Уравнения, описывающие движение по интегральному многообразию, имеют вид

$$S_0y'+g(y)-\mu g^1(x, y)+\delta^2g^2(y)+\delta^3\Lambda g^3(y)+\ldots=0$$
$$x'=H_0{}^1(x, y)+\varepsilon H_1{}^1(x, y)+\ldots \qquad (2.5)$$
$$g^1(x, y)=g_1(x, H_0{}^1, y)+T(H_0{}^1)_xH_0{}^1+VH_1{}^1+(S_1+T)\psi(y)$$
$$g^2(y)=\Phi(y, \varphi_1(y, \psi(y)), \varphi_4(y)),\ g^3(y)=\Phi(y, \varphi_4(y), \varphi_5(y))$$
$$\Phi(y, u(y), v(y))=-\Sigma^{-1}(e\times\psi(y)\times u+u\times\psi(y)\times e+y\times e\times y\times u+$$
$$+y\times u\times y\times e)+e\times y\times v+v\times y\times e+y\times e\times v+e\times v_y\psi(y)$$
$$H_0{}^1=H^1_{0,0,0}=-G^{-1}Ry, \qquad \psi(y)=-S_0{}^{-1}g(y)$$
$$H_1{}^1=H^1_{1,0,0}=-G^{-1}[F(H_0{}^1)_xH_0{}^1+WH_0{}^1+f(x, H_0{}^1, y)+(F(H_0{}^1)_y+Q)\psi(y)]$$
$$h_1=h_{0,0,1}=-\varphi_1(y, \psi(y)/\Sigma), \qquad \varphi_4(y)=h^1_{0,0,1}=(h_1)_y\psi(y)$$
$$h_2=h_{0,0,2}=-\frac{\Lambda}{\Sigma}\varphi_4(y), \qquad \varphi_5(y)=\frac{1}{\Lambda}h^1_{0,0,2}=\frac{1}{\Lambda}(h_2)_y\psi(y)$$

(при вычислении $h^1_{0,0,2}$ ограничились членами, содержащими множитель $\Lambda\gg1$).

Исследуем устойчивость решения $p=q=0$, $r=r_0=\mathrm{const}$, $\alpha=0$, $\beta=0$ системы (2.5) в случае, когда ось ζ является осью динамической симметрии системы D^*, т. е. когда $A=B$. Линеаризуем систему (2.5) на решении $y=y^0=\|0,\ 0,\ r_0\|^T$, $x=0$. Вводя новые переменные $y_1=\|p,\ q,\ r_1\|^T$, $r_1=r-r_0$, получим

$$y_1'=-S_0{}^{-1}[g_y+\mu g_y{}^1+\delta^2g_y{}^2+\delta^3\Lambda g_y{}^3]|_{y=y^0, x=0}y_1+\mu g_x{}^1|_{y=y^0, x=0}x+\ldots$$
$$x'=[(H_0{}^1)_y+\varepsilon(H_1{}^1)_y]|_{y=y^0, x=0}y_1+[(H_0{}^1)_x+\varepsilon(H_1{}^1)_x]|_{y=y^0, x=0}x+\ldots \qquad (2.6)$$

Положив $v=\|p, y\|^T$, перепишем систему (2.6) в виде

$$v'=(\Delta_0+\mu\Delta_1+\delta^2\Delta_2+\delta^3\Lambda\Delta_3)v+\mu X_0x+\ldots, \qquad r_1'=0$$
$$x'=(Y_0+\varepsilon Y_1)v+(Z_0+\varepsilon Z_1)x+\ldots, \quad s=(C-A)/A \qquad (2.7)$$
$$\Delta_0=sr_0\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}; \quad \Delta_1=-\frac{1}{A}\begin{Vmatrix}N_2 & 0\\ B_2r_0(s-1) & N_1\end{Vmatrix}$$
$$X_0=\frac{r_0}{A}\begin{Vmatrix}0 & N_2\\ -N_1 & -(A_2+B_2-C_2)r_0\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_0=\left\|\begin{matrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix}\right\|,\quad \mathbf{Y}_1=\left\|\begin{matrix}0 & -N_1\\ N_2 & (A_2+B_2-C_2)\,r_0\end{matrix}\right\|$$

$$\mathbf{Z}_0=\left\|\begin{matrix}0 & r_0\\ -r_0 & 0\end{matrix}\right\|,\quad \mathbf{Z}_1=\left\|\begin{matrix}-N_1r_0 & 0\\ (A_2+B_2-C_2)\,r_0^2 & -N_2r_0\end{matrix}\right\|$$

В случае, когда точка O_1 лежит в плоскости $\xi O^*\eta$:

$$\Delta_2=-\frac{r_0^3}{A\Sigma}(1+s^2)(1-s)\left\|\begin{matrix}e_1e_2 & e_2^2\\ -e_1^2 & e_1e_2\end{matrix}\right\|$$

$$\Delta_3=-\frac{r_0^4}{A\Sigma^2}(1-s)^2(1+s)s\left\|\begin{matrix}e_2^2 & -e_1e_2\\ e_1e_2 & e_1^2\end{matrix}\right\|$$

Если точка O_1 лежит на оси ζ, то

$$\Delta_2=-\frac{r_0^3}{A\Sigma}(1-s)^3\left\|\begin{matrix}0 & -e_3^2\\ e_3^2 & 0\end{matrix}\right\|$$

$$\Delta_3=-\frac{r_0^4}{A\Sigma^2}(1-s)^2(1+s)s\left\|\begin{matrix}e_3^2 & 0\\ 0 & e_3^2\end{matrix}\right\|$$

Система (2.7) имеет интегральное многообразие $\mathbf{x}=\mathbf{H}(\varepsilon,\ \mu,\ \delta)\mathbf{v}$, для которого справедлив принцип сведения [10, 12], если только $r_0>0$. Уравнения, описывающие движение по интегральному многообразию, можно записать в виде

$$\mathbf{v}'=(\Delta_0+\mu\Delta_1+\mu\mathbf{X}_0\mathbf{H}+\delta^2\Delta_2+\delta^3\Lambda\Delta_3)\mathbf{v}+\ldots,\quad r_1'=0 \tag{2.8}$$

Матрицу $\mathbf{H}$ можно вычислить с любой степенью точности в виде ряда по степеням малых параметров ε, μ, δ. Ограничиваясь вычислением матрицы $\mathbf{H}_0=\mathbf{H}(0,\ 0,\ 0)$, можно выписать условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.8) по линейным членам. В случае, когда $e_3=0$, оно имеет вид

$$\mu(N_1+N_2)\frac{s}{(s+1)}+\delta^3\Lambda\frac{1}{\Sigma^2}(1-s)^2(1+s)s>0 \tag{2.9}$$

а если $e_2=e_1=0$, то

$$\mu(N_1+N_2)\frac{s}{(s+1)}+2\delta^3\Lambda\frac{1}{\Sigma^2}(1-s)^2(1+s)s>0 \tag{2.10}$$

Здесь $s\neq-1$.

Из принципа сведения для интегральных многообразий систем (1.1) и (2.7) следует, что условия (2.9) или (2.10) и неравенство $r_0>0$ являются достаточными условиями асимптотической устойчивости решения (2.3) системы (1.1) по переменным p, q, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}'$. Аналогично можно получить условия асимптотической устойчивости решения (2.4) системы (1.1), которые будут состоять из неравенства (2.9) или (2.10) и неравенства $r_0<0$. Таким же образом исследуется устойчивость решений (2.1) и (2.2).

3. Рассмотрим движение свободного твердого тела, обладающего полной динамической симметрией ($A=B=C$), на котором помещен гироскоп в кардановом подвесе, причем точка подвеса совпадает с центром инерции твердого тела и центром инерции ротора гироскопа. При условии $\cos\beta\neq0$ система уравнений, описывающая движение этой механической системы, имеет устойчивое интегральное многообразие $\mathbf{x}'=\mathbf{H}^1(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \varepsilon,\ \mu)=\sum\varepsilon^i\mu^j\mathbf{H}^1_{i,j}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Уравнения движения по интегральному многообразию имеют вид

$$\mathbf{S}_0\mathbf{y}'+\mu\boldsymbol{\psi}^1(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+\mu\varepsilon\boldsymbol{\psi}^2(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+\mu^2\boldsymbol{\psi}^3(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+\ldots=0 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{x}'=\mathbf{H}_0^1(\mathbf{x},\mathbf{y})+\varepsilon\mathbf{H}^1_{1,0}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\varepsilon\mu\mathbf{H}^1_{1,1}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\varepsilon^2\mathbf{H}^1_{2,0}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\ldots$$

$$\mathbf{H}_0{}^1=\mathbf{H}^1_{0,0}=-\mathbf{G}^{-1}R\mathbf{y}=\|\alpha_0',\beta_0'\|^T,\qquad \mathbf{H}^1_{0,1}=0,\qquad \mathbf{H}^1_{0,2}=0$$

$$\mathbf{H}^1_{1,0}=-\mathbf{G}^{-1}[\mathbf{W}\mathbf{H}_0{}^1+\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{H}_0{}^1,\mathbf{y})+\mathbf{F}(\mathbf{H}_0{}^1)_\mathbf{x}\mathbf{H}_0{}^1]=\|\alpha_1',\beta_1'\|^T$$

$$\mathbf{H}^1_{2,0}=-\mathbf{G}^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{H}^1_{1,0})_\mathbf{x}\mathbf{H}_0{}^1+(\mathbf{H}_0{}^1)_\mathbf{x}\mathbf{H}^1_{1,0}+\mathbf{f}^1(\mathbf{x},\mathbf{H}^1_{1,0},\mathbf{y})+\mathbf{f}^4(\mathbf{x},\mathbf{H}_0{}^1,\mathbf{H}^1_{1,0},\mathbf{y})]$$

$$\mathbf{H}^1_{1,1}=\mathbf{G}^{-1}[F(\mathbf{H}_0{}^1)_\mathbf{y}+Q]\mathbf{S}_0{}^{-1}\boldsymbol{\psi}^1(\mathbf{x},\mathbf{y}),\qquad \boldsymbol{\psi}^1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{g}_1(\mathbf{x},\mathbf{H}_0{}^1,\mathbf{y})+$$

$$+\mathbf{T}(\mathbf{H}_0{}^1)_\mathbf{x}\mathbf{H}_0{}^1+\mathbf{V}\mathbf{H}^1_{1,0}$$

$$\boldsymbol{\psi}^2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{V}\mathbf{H}^1_{2,0}+\mathbf{g}_1{}^2(\mathbf{x},\mathbf{H}^1_{1,0},\mathbf{y})+\mathbf{g}_3(\mathbf{x},\mathbf{H}_0{}^1,\mathbf{H}^1_{1,0})+T[(\mathbf{H}^1_{1,0})_\mathbf{x}\mathbf{H}_0{}^1+(\mathbf{H}_0{}^1)_\mathbf{x}\mathbf{H}^1_{1,0}]$$

$$\boldsymbol{\psi}^3(\mathbf{x},\mathbf{y})=-[\mathbf{S}_1+\mathbf{T}(\mathbf{H}_0{}^1)_\mathbf{y}]\mathbf{S}_0{}^{-1}\boldsymbol{\psi}^1(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{V}\mathbf{H}^1_{1,1}$$

$$\mathbf{f}^4(\mathbf{x},\mathbf{H}_0^1,\mathbf{H}^1_{1,0},\mathbf{y})=\left\|\begin{matrix}-a_1(\alpha_0'\beta_1'+\alpha_1'\beta_0')S_{2\beta}\\ a_1\alpha_0'\alpha_1'S_{2\beta}\end{matrix}\right\|,\quad \mathbf{g}_3(\mathbf{x},\mathbf{H}_0,\mathbf{H}_{1,0})=$$

$$=\left\|\begin{matrix}-a_1(\alpha_0'\beta_1'+\alpha_1'\beta_0')S_{2\beta}\\ a_1\alpha_0'\alpha_1'C_\alpha S_{2\beta}+(a_1C_{2\beta}-b)(\alpha_0'\beta_1'+\alpha_1'\beta_0')S_\alpha\\ a_1\alpha_0'S_\alpha S_{2\beta}-(a_1C_{2\beta}-b)(\alpha_0'\beta_1'+\alpha_1'\beta_0')C_\alpha\end{matrix}\right\|$$

Ограничимся рассмотрением случая $q^2+r^2\neq 0$. Система (3.1) имеет устойчивое интегральное многообразие $\mathbf{x}=\mathbf{H}(\mathbf{y},\varepsilon,\mu)=\sum\varepsilon^i\mu^j\mathbf{H}_{i,j}(\mathbf{y})$, движение по которому описывается уравнением

$$\mathbf{S}_0\mathbf{y}'=-\mu\boldsymbol{\psi}^1(\mathbf{H}_0,\mathbf{y})-\mu\varepsilon\boldsymbol{\psi}^2(\mathbf{H}_0,\mathbf{y})-\mu^2[\boldsymbol{\psi}^3(\mathbf{H}_0,\mathbf{y})-(\boldsymbol{\psi}^1)_\mathbf{x}|_{\mathbf{x}=\mathbf{H}_0}\mathbf{H}_{0,1}]+\ldots \quad (3.2)$$

$$\mathbf{H}_0=\mathbf{H}_{0,0}=\|\alpha_0,\beta_0\|^T,\ \mathbf{H}_0{}^1(\mathbf{H}_0,\mathbf{y})=0,\ \cos\alpha_0=r/\chi$$

$$\sin\alpha_0=-q/\chi,\ \operatorname{tg}\beta_0=p/\chi,\ \chi^2=q^2+r^2$$

$$\mathbf{H}_{0,1}=-[(\mathbf{H}_0{}^1)_\mathbf{x}|_{\mathbf{x}=\mathbf{H}_0}]^{-1}(\mathbf{H}_0)_\mathbf{y}\mathbf{S}_0{}^{-1}\boldsymbol{\psi}^1(\mathbf{H}_0,\mathbf{y}),\ (\mathbf{H}_0)_\mathbf{y}=$$

$$=-[(\mathbf{H}_0{}^1)_\mathbf{x}|_{\mathbf{x}=\mathbf{H}_0}]^{-1}[(\mathbf{H}_0{}^1)_\mathbf{y}|_{\mathbf{x}=\mathbf{H}_0}]$$

Система (3.2) имеет первый интеграл $p^2+q^2+r^2=|\mathbf{y}|^2=\text{const}$, означающий постоянство абсолютной величины угловой скорости твердого тела. Перейдем к сферическим координатам $p=|\mathbf{y}|\cos\theta$, $q=|\mathbf{y}|\sin\theta\cos\varphi$, $r=|\mathbf{y}|\sin\theta\sin\varphi$.

Для новых переменных θ, φ получим систему

$$\theta'=-\mu^2N_2d\operatorname{ctg}\theta,\ \varphi'=\mu d[1+\mu d]|\mathbf{y}|\cos\theta \quad (3.3)$$

$$d=(A_2-C_2)/A$$

Анализ уравнений (3.3) показывает, что $\theta(\tau)\to 0$ при $d>0$, $\tau\to+\infty$, т. е. мгновенная ось вращения системы D^*, проходящая через точку O^*, медленно вращаясь вокруг оси ξ, стремится занять ее положение. Если же $d<0$, то $\theta(\tau)\to\pi/2$ при $\tau\to+\infty$, т. е. мгновенная ось вращения системы D^*, медленно вращаясь вокруг оси ξ, неограниченно приближается к плоскости $\eta O^*\zeta$. Нетрудно заметить, что в первом случае внутреннее кольцо карданова подвеса стремится совпасть с внешним, а во втором — стать почти перпендикулярным ему.

4. Рассмотрим движение свободного твердого тела D с присоединенной частицей P_1 в случае, когда система D^* обладает полной динамической симметрией. Пусть $\mathbf{e}=\|1,\ 0,\ 0\|^T$. Система уравнений, описывающая движение исследуемой механической системы, имеет устойчивое интегральное многообразие $\mathbf{z}=\mathbf{h}(\mathbf{y},\delta)=\sum\delta^i\mathbf{h}_i(\mathbf{y})$, $\mathbf{z}'=\mathbf{h}^1(\mathbf{y},\delta)=\sum\delta^i\mathbf{h}_i{}^1(\mathbf{y})$.

Движение по интегральному многообразию описывается уравнением

$$A\mathbf{y}'=\delta^2\mathbf{g}_4(\mathbf{y})+\delta^3\mathbf{g}_6(\mathbf{y})+\delta^4\mathbf{g}_8(\mathbf{y})+\delta^5\Lambda\mathbf{g}_7(\mathbf{y})+\ldots \qquad (4.1)$$

$$\mathbf{g}_4(\mathbf{y})=\mathbf{g}_7(\mathbf{y},\mathbf{h}_1)\Lambda;\quad \mathbf{g}_6(\mathbf{y})=-(\mathbf{y}\times\mathbf{e}\times\mathbf{y}\times\mathbf{h}_2+\mathbf{y}\times\mathbf{h}_1\times\mathbf{y}\times\mathbf{h}_1+\mathbf{y}\times\mathbf{h}_2\times\mathbf{y}\times\mathbf{e})$$

$$\mathbf{g}_8(\mathbf{y})=-(\mathbf{e}\times\mathbf{g}_4\times\mathbf{h}_1+\mathbf{e}\times\mathbf{y}\times\mathbf{h}_3{}^1+\mathbf{h}_3{}^1\times\mathbf{y}\times\mathbf{e}+\mathbf{h}_1\times\mathbf{g}_4\times\mathbf{e}+\mathbf{y}\times\mathbf{e}\times\mathbf{y}\times\mathbf{h}_3+\mathbf{y}\times\mathbf{h}_1\times\mathbf{y}\times\mathbf{h}_2+$$
$$+\mathbf{y}\times\mathbf{h}_2\times\mathbf{y}\times\mathbf{h}_1-\varkappa\mathbf{y}\times\mathbf{h}_1\times\mathbf{y}\times\mathbf{h}_1+\mathbf{y}\times\mathbf{e}\times\mathbf{h}_3{}^1+\mathbf{y}\times\mathbf{h}_3\times\mathbf{y}\times\mathbf{e})$$

$$\mathbf{g}_7(\mathbf{y})=-(\mathbf{y}\times\mathbf{e}\times\mathbf{y}\times\mathbf{h}_4+\mathbf{y}\times\mathbf{h}_4\times\mathbf{y}\times\mathbf{e})/\Lambda$$

$$\mathbf{h}_1=-\frac{1}{\Sigma}\,\mathbf{y}\times\mathbf{y}\times\mathbf{e},\qquad \mathbf{h}_1{}^1=0,\qquad \mathbf{h}_2=\Sigma^{-2}\mathbf{y}\times\mathbf{y}\times\mathbf{y}\times\mathbf{y}\times\mathbf{e},\qquad \mathbf{h}_2{}^1=0$$

$$\mathbf{h}_3=-\Sigma^{-1}[\varphi_1(0,\mathbf{g}_4)+\varphi_2(\mathbf{y},0,\mathbf{h}_2)+\varkappa\varphi_2(\mathbf{y},0,\mathbf{h}_1)]$$

$$\mathbf{h}_3{}^1=(\mathbf{h}_1)_{\mathbf{y}}\mathbf{g}_4,\qquad \mathbf{h}_4=-(\Lambda/\Sigma)\mathbf{h}_3{}^1,\qquad \mathbf{h}_4{}^1=0$$

При вычислении $\mathbf{h}_4(\mathbf{y})$ ограничились членами, содержащими множитель $\Lambda\gg1$. Система (4.1) имеет первый интеграл $p^2+q^2+r^2=|\mathbf{y}|^2=\mathrm{const}$. Переходя к сферическим координатам, получим систему

$$A\theta'=\delta^5\Lambda/\Sigma^3|\mathbf{y}|^6\cos^3\theta\sin\theta$$

$$A\varphi'=-(\delta^2/\Sigma|\mathbf{y}|^3+\delta^3/\Sigma^2|\mathbf{y}|^5+\delta^4/\Sigma^3|\mathbf{y}|^7)\cos\theta-$$
$$-\delta^4/\Sigma^2[(2+\varkappa)|\mathbf{y}|^5\cos\theta+|\mathbf{y}|^5\cos^3\theta] \qquad (4.2)$$

Анализ уравнений (4.2) показывает, что $\theta(\tau)\to\pi/2$ при $\tau\to+\infty$, т. е. мгновенная ось вращения системы D^*, вращаясь вокруг оси ξ с достаточно малой угловой скоростью φ', при $\tau\to+\infty$ неограниченно приближается к плоскости $\eta O^*\zeta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
2. *Климов Д. М., Харламов С. А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
3. *Степаненко Н. П.* О гироскопе в кардановом подвесе на свободном основании.– Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3, с. 155–163.
4. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 33–44.
5. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами.– ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 34–42.
6. *Черноусько Ф. Л., Шамаев А. С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 3, с. 33–42.
7. *Соболев В. А., Стрыгин В. В.* Асимптотические методы в задаче о стабилизации вращающихся тел при помощи пассивных демпферов.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5, с. 24–31.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
9. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
10. *Стрыгин В. В.* Интегральные многообразия в задаче о сингулярном и параметрическом возмущении автоколебательной системы.– В кн.: Дифференциальные уравнения и их применение. Куйбышев: Куйбышевск. политехн. ин-т, 1975, № 2, с. 108–126.
11. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Влияние геометрических и кинетических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением.– Космич. исследования, 1976. т. 14, вып. 3, с. 366–371.
12. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения.– Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 6, с. 1276–1324.

Куйбышев

Поступила в редакцию
9.IV.1984