

УДК 539.3

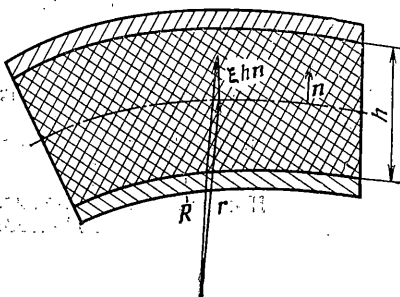
ОБЩАЯ ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ТОНКОСЛОЙНЫХ
РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

МИЛЯКОВА Л. В., ЧЕРНЫХ К. Ф.

Тонкослойными резинOMETаллическими элементами называют конструкции из чередующихся скрепленных между собой тонких слоев резины и металла, которые используются в самых различных областях машиностроения [1]. Широкое использование тонкослойных резинOMETаллических элементов — этих своеобразных «антиоболочек» — стимулировало создание общей теории, предложенной в [2] и развиваемой в публикуемой статье, в которой дается систематическое ее изложение. Проблема расчета жесткости тонкослойных резинOMETаллических элементов со срединной поверхностью общего вида и произвольного очертания в плане сведена к решению двумерной краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. В качестве примеров рассмотрены задачи определения жесткостей на сжатие и изгиб некоторых плоских, цилиндрического и сферического кругового очертания тонкослойных резинOMETаллических элементов. Предложен вариационный метод, дающий хорошее приближение уже при одной-двух варьируемых постоянных.

1. Рассмотрим простейший вид тонкослойных резинOMETаллических элементов — однослойный (фиг. 1), представляющий собой тонкий резиновый слой со срединной поверхностью общего вида и произвольного очертания в плане, привулканизированный по лицевым поверхностям к металлическим обоямам. Характерный линейный размер срединной поверхности значительно превышает толщину слоя h . Будем называть такие однослойные конструкции имитаторами.

Отнесем срединную поверхность слоя (фиг. 1) к криволинейным координатам α^1, α^2 . Пусть ξ — расстояние от материальной точки слоя до срединной поверхности, а $\xi_0 = \xi/h$ ($-1/2 \leq \xi_0 \leq 1/2$) (в дальнейшем индекс \checkmark ξ_0 будем опускать). Радиус-векторы материальной точки до и после деформации, соответственно, равны [2]:



Фиг. 1

$$\mathbf{R}(\alpha^1, \alpha^2; \xi) = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2) + \xi \mathbf{h} \mathbf{n}(\alpha^1, \alpha^2) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{R}^*(\alpha^1, \alpha^2; \xi) = \mathbf{R} + \xi(\mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}) + (1 - 4\xi^2) u_{\alpha^i} \checkmark \mathbf{r}^{\alpha^i} + \xi(1 - 4\xi^2) w_{\checkmark} \mathbf{n}$$

где $\mathbf{U} = \text{const}$, $\mathbf{\Omega} = \text{const}$, так что слагаемое $\xi(\mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R})$ отвечает жестким перемещениям параллельных материальных поверхностей ($\xi = \text{const}$), в том числе и лицевых ($\xi = \pm 1/2$), а последующие слагаемые, не влияя на смещения лицевых поверхностей, обеспечивают деформацию параллельных поверхностей. Все индексы принимают значения 1, 2, а по повторяющимся греческим индексам производится суммирование.

Используя известные зависимости теории тонких оболочек и общепринятые обозначения [3], получаем, применив (1.1) и опустив малые по сравнению с аналогичными слагаемые, содержащие малые для тонкого слоя множители вида $\xi h b_i^j$, следующие выражения для компонент тен-

зора деформаций ($e_{ij} = 1/2(g_{ij}^* - g_{ij})$):

$$e_{ij} = 1/2(\nabla_i u_j^\sim + \nabla_j u_i^\sim)(1 - 4\xi^2) - b_{ij} w^\sim \xi(1 - 4\xi^2) \quad (1.2)$$

$$h e_{33} = 1/2\{U_n + c_{\alpha\alpha}[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\Omega^\alpha - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^\alpha)\Omega_n] + c_{\alpha\alpha}\Omega^\alpha h \xi\} - 4u_i^\sim \xi + 1/2 \nabla_i w^\sim \xi(1 - 4\xi^2)$$

$$h e_{33} = [U_n + c_{\alpha\gamma}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^\gamma)\Omega^\alpha] + w^\sim(1 - 12\xi^2)$$

$$U_i = \mathbf{U} \cdot \mathbf{r}_i, \quad U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}, \quad \Omega^i = \Omega \cdot \mathbf{r}^i, \quad \Omega_n = \Omega \cdot \mathbf{n}$$

$$c_{ij} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j), \quad b_{ij} = -\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j, \quad \mathbf{r}_j = \partial \mathbf{r} / \partial \alpha^j, \quad \mathbf{n}_j = \partial \mathbf{n} / \partial \alpha^j$$

Из (1.2) с принятой точностью следуют выражения для относительного изменения объема ($\theta = a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + e_{33}(a^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j)$) и напряжений соответственно

$$\theta = a^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta^\sim (1 - 4\xi^2) + 1/h \{w^\sim(1 - 12\xi^2) + [U_n + c_{\alpha\gamma}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^\gamma)\Omega^\alpha]\} \quad (1.3)$$

$$\sigma^{hi} = (K - 2/3G)\theta a^{hi} + 2G a^{hi} a^{lv} e_{lv} \quad (1.4)$$

$$\sigma^{i3} = 2G a^{i3} e_{i3}, \quad \sigma^{33} = (K - 2/3G)\theta + 2G e_{33}$$

Используя известное вариационное уравнение Лагранжа [3], получаем, учитывая, что $\delta u_i = (1 - 4\xi^2)\delta u_i^\sim$, $\delta u_3 = \xi(1 - 4\xi^2)\delta w^\sim$ и δu_i^\sim , δw^\sim произвольны, три однородных уравнения равновесия

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\nabla_\alpha \sigma^{\alpha j} + \frac{1}{h} \frac{\partial \sigma^{3j}}{\partial \xi} \right) (1 - 4\xi^2) d\xi = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \left(\nabla_\alpha \sigma^{\alpha 3} + \frac{1}{h} \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \xi} \right) \xi (1 - 4\xi^2) d\xi = 0 \quad (1.5)$$

и три краевых условия

$$\int_{-1/2}^{1/2} (\nu_\alpha \sigma^{\alpha j} - \sigma_\nu^j) (1 - 4\xi^2) d\xi = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} (\nu_\alpha \sigma^{\alpha 3} - \sigma_\nu^3) \xi (1 - 4\xi^2) d\xi = 0 \quad (1.6)$$

где ν_i — компоненты тангенциальной нормали к контуру срединной поверхности. В дальнейшем будем считать, что поверхностная нагрузка является нормальным давлением $\sigma_\nu^j = -p\nu^j$, $\sigma_\nu^3 = 0$.

Подставляя в соотношения (1.5), (1.6) выражения (1.2) — (1.4), получаем после интегрирования и отбрасывания малых слагаемых три уравнения равновесия

$$a^{i\gamma} \{a^{\alpha\beta} \nabla_\gamma \nabla_\alpha u_\beta^\sim + 1/2 h^{-1} \nabla_\gamma w^\sim + 5/4 h^{-1} \nabla_\gamma [U_n + c_{\alpha\alpha}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^\alpha)\Omega^\alpha] - 5\rho^2 h^{-2} u_\gamma^\sim\} = 0 \quad (1.7)$$

$$\rho^2 a^{\gamma\alpha} \nabla_\gamma \nabla_\alpha w^\sim - 28h^{-2} (h a^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta^\sim + 3w^\sim) = 0 \quad (1.8)$$

и три краевых условия

$$\nu^j \{a^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta^\sim + 1/2 h^{-1} w^\sim + 5/4 h^{-1} [U_n + c_{\alpha\gamma}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^\gamma)\Omega^\alpha]\} = 0 \quad (1.9)$$

$$\nu^\mu \{\nabla_\mu w^\sim - 14h^{-1} u_\mu^\sim + 7/4 c_{\mu\alpha} \Omega^\alpha\} = 0 \quad (1.10)$$

Здесь $\rho^2 = 2G/(K - 2/3G) \approx 2G/K \ll 1$, поскольку для резины модуль сдвига G на 2—4 порядка меньше модуля объемного сжатия K [4, 5].

Умножая уравнения (1.7) на $a_{j\gamma}$ и суммируя по $j = \gamma$, получаем

$$\nabla_k \{a^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta^\sim + 1/2 h^{-1} w^\sim\} - 5\rho^2 h^{-2} u_k^\sim = 5/4 h^{-1} \nabla_k [U_n + c_{\alpha\gamma}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^\gamma)\Omega^\alpha] \quad (1.11)$$

Из системы уравнений (1.11), (1.8) следует, что последняя содержит как быстро меняющееся, так и медленно меняющееся решения. Оставаясь в рамках предлагаемого простейшего варианта теории тонкослойных резинометаллических элементов, можно не учитывать быстро меняющуюся часть напряженно-деформированного состояния, поскольку она практически не влияет на жесткость. В дальнейшем ограничимся рассмотрением медленно меняющейся части.

Опуская в (1.8) малое первое слагаемое, имеем

$$w^{\sim} = -1/3 h a^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} u_{\beta}^{\sim} \quad (1.12)$$

Подставляя это выражение в (1.7), получаем уравнения

$$\nabla_h (a^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} u_{\beta}^{\sim}) - 6\rho^2 h^{-2} u_h^{\sim} = 3/2 h^{-1} \nabla_h [U_n + c_{\alpha\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\gamma}) \Omega^{\alpha}] \quad (1.13)$$

Введем в рассмотрение функцию $\theta^{\sim} = a^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} u_{\beta}^{\sim}$. Умножая уравнения (1.13) на $a^{\mu k} \nabla_{\mu}$ и суммируя по $k = \omega$, получаем для θ^{\sim} разрешающее уравнение

$$a^{\mu\omega} \nabla_{\mu} \nabla_{\omega} \theta^{\sim} - 6\rho^2 h^{-2} \theta^{\sim} = -a^{\mu\omega} \nabla_{\mu} \{3/2 h^{-1} \nabla_{\omega} [U_n + c_{\alpha\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\gamma}) \Omega^{\alpha}]\} \quad (1.14)$$

Краевые условия для θ^{\sim} находим умножая (1.9) на v_j и суммируя по $j = \gamma$. В результате с учетом (1.12) и условия $v^{\gamma} v_{\gamma} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$ получаем на граничном контуре g :

$$\theta^{\sim}|_g = -3/2 h^{-1} [U_n + c_{\alpha\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\gamma}) \Omega^{\alpha}] - 3/2 p/K \quad (1.15)$$

Далее с учетом (1.3), (1.12) получим

$$\theta(\alpha^1, \alpha^2; \xi) = \theta^{\circ}(\alpha^1, \alpha^2) = 2/3 \theta^{\sim} + h^{-1} [U_n + c_{\alpha\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\gamma}) \Omega^{\alpha}] \quad (1.16)$$

Отсюда и из (1.15) следует, что в принятом приближении относительное изменение объема равномерно по толщине слоя и отсутствует на боковой поверхности при $p=0$.

Сформулированную краевую задачу можно несколько упростить приняв в качестве разрешающей функцию θ° . При этом согласно (1.14) — (1.16) имеем

$$a^{\mu\omega} \nabla_{\mu} \nabla_{\omega} \theta^{\circ} - 6\rho^2 h^{-2} \theta^{\circ} = 6\rho^2 h^{-3} [U_n + c_{\alpha\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\gamma}) \Omega^{\alpha}], \quad \theta^{\circ}|_g = -p/K \quad (1.17)$$

Таким образом, отыскание медленно меняющейся части решения сводится к решению двумерной краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца (1.17).

Из (1.17) следует, что при переходе к безразмерным переменным в уравнении появляется множитель $\rho^2 (l/h)^2$. Таким образом, в полученную задачу входит определяющий характер решения совмещенный параметр $\xi \sim \rho (l/h)$, учитывающий как тонкостенность слоя (l/h), так и упругие свойства материала (ρ).

Из (1.12), (1.13) находим компоненты вектора смещения

$$u_h^{\sim} = 1/4 h^2 \rho^{-2} \nabla_h \theta^{\circ}, \quad w^{\sim} = -1/2 \theta^{\circ} + 1/2 [U_n + c_{\alpha\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\gamma}) \Omega^{\alpha}] \quad (1.18)$$

Из этих формул и (1.2) определяем, отбрасывая малые члены

$$e_{ij} = 1/4 h^2 \rho^{-2} \nabla_i \nabla_j \theta^{\circ} (1 - 4\xi^2) + 1/2 b_{ij} \{h\theta^{\circ} - [U_n + c_{\alpha\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\gamma}) \Omega^{\alpha}]\} \xi (1 - 4\xi^2) \\ h e_{i3} = 1/2 \{U_i + c_{i\alpha} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \Omega^{\alpha} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\alpha}) \Omega_n] + c_{i\alpha} \Omega^{\alpha} h \xi\} - \\ - 1/4 c_{i\alpha} \Omega^{\alpha} h \xi (1 - 4\xi^2) - h^2 \rho^{-2} \nabla_i \theta^{\circ} \xi \quad (1.19)$$

$$h e_{33} = 3/2 [U_n + c_{\alpha\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\gamma}) \Omega^{\alpha}] (1 - 4\xi^2) - 1/2 \theta^{\circ} h (1 - 12\xi^2)$$

По (1.4) имеем

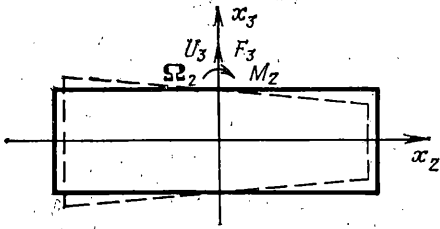
$$\sigma^{hl} = (K - 2/3 G) \theta^{\circ} a^{hl} + 2G a^{hl} e_{\mu\nu} \quad (1.20)$$

$$\sigma^{i3} = 2G a^{i\mu} e_{\mu 3}, \quad \sigma^{33} = (K - 2/3 G) \theta^{\circ} + 2G e_{33}$$

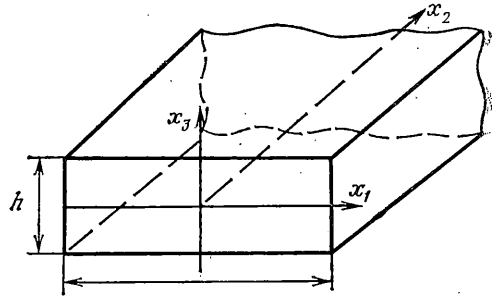
Из фиг. 2 видно, что главный вектор и главный момент напряжений, действующих на верхнюю (плюс) и нижнюю (минус) лицевые поверхности, подсчитываются по формулам

$$\mathbf{F}^{\pm} = \pm \int_S (\sigma^{\alpha 3} \mathbf{r}_{\alpha} + \sigma^{33} \mathbf{n}) dS, \quad \mathbf{M}^{\pm} = \pm \int_S (\mathbf{r} + 1/2 h \mathbf{n}) \times (\sigma^{\alpha 3} \mathbf{r}_{\alpha} + \sigma^{33} \mathbf{n}) dS \quad (1.21)$$

При этом с учетом малости толщины слоя интегрирование производится по площади S срединной поверхности.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для достаточно больших значений совмещенного параметра ξ напряжения можно подсчитывать по упрощенным формулам

$$\sigma^{hl} = K\theta^\circ \alpha^{hl}, \quad \sigma^{33} = K\theta^\circ, \quad \sigma^{i3} \approx 0 \quad (1.22)$$

При этом по (1.21):

$$\mathbf{F}^\pm = \pm K \int_S \mathbf{n} \theta^\circ dS, \quad \mathbf{M}^\pm = \pm K \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \theta^\circ dS \quad (1.23)$$

2. Рассмотрим плоские имитаторы. Помещая начало координат в некоторой точке срединной поверхности, имеем в прямоугольной декартовой системе координат с осями $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, $\alpha^1 = x_1, \alpha^2 = x_2, \xi = x_3/h$; $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$; $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^i = \mathbf{e}_i$; $a^{ij} = \delta_{ij}$; $b_{ij} = 0$; $c_{11} = c_{22} = 0, c_{11} = -c_{21} = 1$; $\nabla_i = \partial/\partial x_i, \nabla_i \nabla_j = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$.

Разрешающая задача Дирихле (1.17) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \theta^\circ}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2 \theta^\circ}{(\partial x_2)^2} - 6\rho^2 h^{-2} \theta^\circ = -6\rho^2 h^{-3} (U_3 + x_2 \Omega_1) - x_1 \Omega_2, \quad (2.1)$$

$$\theta^\circ|_S = -p/K \quad (U_3 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_3, \Omega_i = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_i)$$

и имеет очевидное частное решение

$$\theta^\circ * = (U_3 + x_2 \Omega_1 - x_1 \Omega_2) / h \quad (2.2)$$

Из (1.18) – (1.21) находим

$$u_i^\circ = \frac{1}{4} h^2 \rho^{-2} \partial \theta^\circ / \partial x_i, \quad w^\circ = -\frac{1}{2} \theta^\circ + \frac{1}{2} (U_3 + x_2 \Omega_1 - x_1 \Omega_2)$$

$$h e_{13} = \frac{1}{2} (U_1 - x_2 \Omega_3 + h \xi \Omega_2) - \frac{1}{4} \Omega_2 h \xi (1 - 4\xi^2) - h^2 \rho^{-2} \xi \partial \theta^\circ / \partial x_1$$

$$h e_{23} = \frac{1}{2} (U_2 + x_1 \Omega_3 - h \xi \Omega_1) + \frac{1}{4} \Omega_1 h \xi (1 - 4\xi^2) - h^2 \rho^{-2} \xi \partial \theta^\circ / \partial x_2$$

$$h e_{33} = \frac{3}{2} (U_3 + x_2 \Omega_1 - x_1 \Omega_2) (1 - 4\xi^2) - \frac{1}{2} \theta^\circ h (1 - 12\xi^2)$$

$$\sigma_{33} = (K^{-2} / {}_3G) \theta^\circ + 2G e_{33}, \quad \sigma_{i3} = 2G e_{i3}$$

$$F_i^\pm = \pm \int_S \sigma_{i3} dx_1 dx_2 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad M_3^\pm = \pm \int_S (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2$$

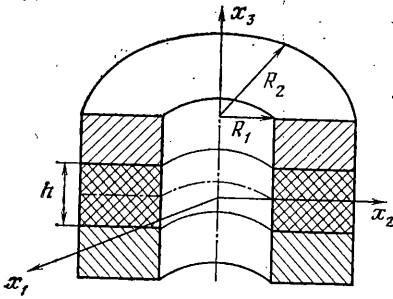
$$M_1^\pm = \pm \left[\int_S x_2 \sigma_{33} dx_1 dx_2 - \frac{h}{2} F_2^\pm \right],$$

$$M_2^\pm = \pm \left[- \int_S x_1 \sigma_{33} dx_1 dx_2 + \frac{h}{2} F_1^\pm \right]$$

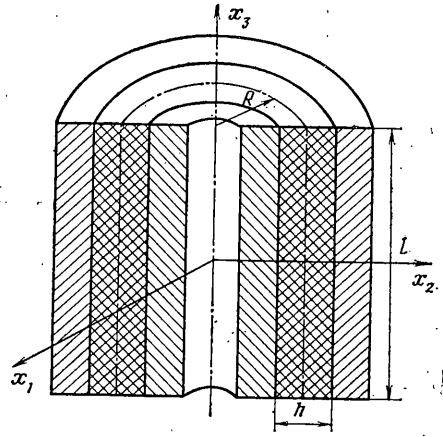
Согласно (1.22), (1.23), при достаточно больших значениях совмещенного параметра ξ :

$$\sigma_{33} = K\theta^\circ, \quad \sigma_{i3} \approx 0; \quad F_i^\pm \approx 0, \quad F_3^\pm = \pm K \int_S \theta^\circ dx_1 dx_2 \quad (2.3)$$

$$M_1^\pm = \pm K \int_S x_2 \theta^\circ dx_1 dx_2, \quad M_2^\pm = \mp K \int_S x_1 \theta^\circ dx_1 dx_2, \quad M_3^\pm \approx 0$$



Фиг. 4



Фиг. 5

3. Рассмотрим плоский имитатор, имеющий в плане форму длинного прямоугольника (фиг. 3). Напряженно-деформированное состояние не зависит от x_2 , так что $\partial/\partial x_2=0$, $\Omega_1=0$. Согласно (2.1), разрешающая краевая задача принимает вид ($p=0$):

$$\partial^2 \theta^\circ / (\partial x_1)^2 - 6\rho^2 h^{-2} \theta^\circ = -6\rho^2 h^{-3} (U_3 - x_1 \Omega_2), \quad \theta^\circ|_{x_1=\pm a/2} = 0$$

Решением этой задачи является функция

$$\theta^\circ = \frac{U_3}{h} \left[1 - \frac{\text{ch}(\sqrt{6}\rho x_1/h)}{\text{ch}(\sqrt{6}\rho a/2h)} \right] - \frac{\Omega_2}{h} \left[x_1 - \frac{a \text{sh}(\sqrt{6}\rho x_1/h)}{2 \text{sh}(\sqrt{6}\rho a/2h)} \right]$$

Подставляя полученное выражение в соотношения (2.3), для верхней лицевой поверхности (плюс) получаем ($\xi = \sqrt{3/2}\rho(a/h)$):

$$B_{33} = F_3/U_3 = B_{33}^\infty (1 - 1/\xi \text{th } \xi), \quad B_{33}^\infty = Ka/h \quad (3.1)$$

$$B_{55} = M_2/\Omega_2 = B_{55}^\infty [1 - 3/\xi (\text{cth } \xi - 1/\xi)], \quad B_{55}^\infty = 1/12 Ka^3/h$$

где B_{33}^∞ , B_{55}^∞ — жесткости на сжатие и изгиб для бесконечно широкого имитатора; множители $(1 - 1/\xi \text{th } \xi) = B_{33}/B_{33}^\infty$ и $[1 - 3/\xi (\text{cth } \xi - 1/\xi)] = B_{55}/B_{55}^\infty$ показывают влияние ширины слоя.

4. Рассмотрим плоский кольцевой имитатор (фиг. 4). В цилиндрических координатах r , φ , z разрешающая задача (2.1) примет вид ($p=0$):

$$\frac{\partial^2 \theta^\circ}{(\partial r)^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta^\circ}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta^\circ}{(\partial \varphi)^2} - 6\rho^2 h^{-2} \theta^\circ = -6\rho^2 h^{-3} (U_3 + r \sin \varphi \Omega_1 - r \cos \varphi \Omega_2), \quad \theta^\circ|_{r=R_1} = 0, \quad \theta^\circ|_{r=R_2} = 0$$

Ее решением является функция

$$\theta^\circ = U_3/h [1 + a_1 I_0(kr) + a_2 K_0(kr)] + (\Omega_1 \sin \varphi - \Omega_2 \cos \varphi) [r/h + b_1/h I_1(kr) + b_2/h K_1(kr)]$$

где $I_i(kr)$, $K_i(kr)$ — модифицированные функции Бесселя

$$\frac{a_1}{K_0(\xi_1) - K_0(\xi_2)} = \frac{a_2}{I_0(\xi_2) - I_0(\xi_1)} = \frac{1}{I_0(\xi_1)K_0(\xi_2) - I_0(\xi_2)K_0(\xi_1)}$$

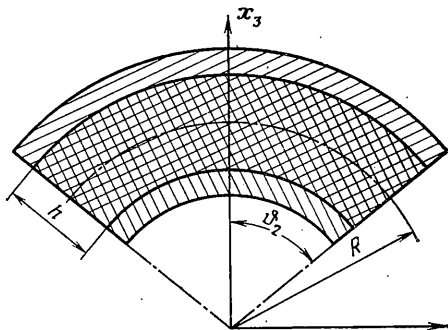
$$\frac{b_1}{R_2 K_1(\xi_1) - R_1 K_1(\xi_2)} = \frac{b_2}{R_1 I_1(\xi_2) - R_2 I_1(\xi_1)} = \frac{1}{I_1(\xi_1)K_1(\xi_2) - I_1(\xi_2)K_1(\xi_1)}$$

Подставляя полученное решение в записанные в полярных координатах выражения (2.3), находим

$$\begin{aligned}
 B_{33} &= \frac{F_3}{U_3} = B_{33}^\infty \left\{ 1 + \frac{2}{\xi_2^2 - \xi_1^2} [a_1(\xi_2 I_1(\xi_2) - \xi_1 I_1(\xi_1)) - \right. \\
 &- a_2(\xi_2 K_1(\xi_2) - \xi_1 K_1(\xi_1))] \left. \right\}, \quad B_{33}^\infty = KS/h; \quad B_{3+i, 3+i} = M_i/\Omega_i = \\
 &= B_{3+i, 3+i}^\infty \left\{ 1 + \frac{4}{\xi_2^4 - \xi_1^4} [b_1(\xi_2^2 I_2(\xi_2) - \xi_1^2 I_2(\xi_1)) - b_2(\xi_2^2 K_2(\xi_2) - \right. \\
 &- \xi_1^2 K_2(\xi_1))] \left. \right\}, \quad B_{3+i, 3+i}^\infty = KI_{ii}/h, \quad S = \pi(R_2^2 - R_1^2) \\
 I_{11} &= \frac{1}{4}\pi(R_2^4 - R_1^4)
 \end{aligned}$$

Решение для кругового плоского имитатора находится из приведенного выше при $R_1=0$ ($\xi_1=0$). При этом $B_{33}=B_{33}^\infty [1-2I_1(\xi)/\xi I_0(\xi)]$, $B_{3+i, 3+i}=B_{3+i, 3+i}^\infty [1-4I_2(\xi)/\xi I_1(\xi)]$, ($R_2=R$ ($\xi_2=\xi$)).

Ранние работы по сжатию плоских тонкослойных резинометаллических элементов подробно освещены в [6]. Из более поздних следует, прежде всего, упомянуть работу [7]¹. В ней методом однородных решений с использованием асимптотического подхода задача определения напряженно-деформированного состояния при сжатии плоских тонкослойных резинометаллических элементов сведена к решению краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. Разрешающая функция задачи — функция гидростатического давления. Полученные результаты для плоских имитаторов, имеющих в сечении форму длинного прямоугольника, круга, кольца, при сжатии совпадают с решениями из [7].



Фиг. 6

5. Рассмотрим цилиндрический имитатор (фиг. 5). В качестве криволинейных координат примем цилиндрические $\alpha^1=\varphi$, $\alpha^2=z$, $\xi=(r-R)/h$. При этом $\mathbf{r}=R \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R \sin \varphi \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3$, $\mathbf{n}=\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$, $\mathbf{r}_1=R^2 \mathbf{r}^1=-R \sin \varphi \mathbf{e}_1 + R \cos \varphi \mathbf{e}_2$, $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}^2=-\mathbf{e}_3$, $a^{11}=R^{-2}$, $a^{22}=1$, $a^{12}=0$, $c_{11}=c_{22}=0$, $c_{12}=-c_{21}=R$, $b_{11}=-R$, $b_{12}=b_{21}=-b_{22}=0$, $\nabla_1=\partial/\partial \varphi$, $\nabla_2=\partial/\partial z$, $\nabla_1 \nabla_1=\partial^2/(\partial \varphi)^2$, $\nabla_1 \nabla_2=\partial^2/\partial \varphi \partial z$, $\nabla_2 \nabla_2=\partial^2/(\partial z)^2$. Разрешающая задача Дирихле (1.17) с учетом этих соотношений принимает вид ($p=0$):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta^\circ}{(\partial \varphi)^2} + \frac{\partial^2 \theta^\circ}{(\partial z)^2} - 6\rho^2 h^{-2} \theta^\circ &= -6\rho^2 h^{-3} [U_1 \cos \varphi + U_2 \sin \varphi - \\
 - \Omega_1 z \sin \varphi + \Omega_2 z \cos \varphi], \quad \theta^\circ|_{z=\pm l/2} &= 0 \quad (U_i = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i, \Omega_i = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_i)
 \end{aligned}$$

Решением этой задачи является функция

$$\begin{aligned}
 \theta^\circ &= \frac{6\rho^2 h^{-2} R^2}{1+6\rho^2 h^{-2} R^2} \left\{ \left(\frac{U_1}{h} \cos \varphi + \frac{U_2}{h} \sin \varphi \right) \left[1 - \frac{\text{ch}(\sqrt{6\rho^2 h^{-2} + R^{-2}} z)}{\text{ch}(\sqrt{6\rho^2 h^{-2} + R^{-2}} l/2)} \right] + \right. \\
 &+ (\Omega_2 \cos \varphi - \Omega_1 \sin \varphi) \left[\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \frac{l}{h} \frac{\text{sh}(\sqrt{6\rho^2 h^{-2} + R^{-2}} z)}{\text{sh}(\sqrt{6\rho^2 h^{-2} + R^{-2}} l/2)} \right] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

¹ См. также: Малый В. И. Асимптотический по сжимаемости метод решения задач для слоя слабосжимаемого материала. Всес. Научн.-техн. конф. по методам расчета изделий из высокоэластичных материалов. Тез. докл. Рига: Изд-е Риж. политехн. ин-та, 1980, с. 59.

Для достаточно больших значений совмещенных параметров находим из (1.23) жесткостные характеристики цилиндрического имитатора ($\zeta_1 = \sqrt{6\rho R h^{-1}}$, $\zeta_2 = \sqrt{6\rho l h^{-1}}$):

$$B_{ii} = \frac{F_i}{U_i} = B_{ii}^\infty \frac{\zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} \left[1 - \frac{2\zeta_1}{\zeta_2 \sqrt{1 + \zeta_1^2}} \operatorname{th} \left(\frac{\zeta_2 \sqrt{1 + \zeta_1^2}}{2\zeta_1} \right) \right], \quad B_{ii}^\infty = \frac{1}{2} \frac{KS}{h} \quad (5.1)$$

$$B_{3+i, 3+i} = \frac{M_i}{\Omega_i} = B_{3+i, 3+i}^\infty \frac{\zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} \left[1 - \frac{6\zeta_1}{\zeta_2 \sqrt{1 + \zeta_1^2}} \operatorname{cth} \left(\frac{\zeta_2 \sqrt{1 + \zeta_1^2}}{2\zeta_1} \right) \right],$$

$$B_{3+i, 3+i}^\infty = \frac{1}{12} \frac{\pi R l^3}{h}$$

6. Рассмотрим сферический имитатор кругового очертания (фиг. 6). В качестве криволинейных координат примем сферические $\alpha^1 = \vartheta$, $\alpha^2 = \varphi$, $\xi = (r - R)/h$. В них $\mathbf{r} = R\mathbf{n} = R(\sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{r}_1 = -R^2 \mathbf{r}_1 = R(\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_2 - \sin \vartheta \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{r}_2 = R^2 \sin^2 \vartheta \mathbf{r}_2 = R(-\sin \vartheta \cdot \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_2)$, $a^{11} = R^{-2}$, $a^{22} = (R \sin \vartheta)^{-2}$, $a^{12} = a^{21} = 0$, $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = -c_{21} = R^2 \sin \vartheta$, $B_{11} = -R$, $b_{22} = -R \sin^2 \vartheta$, $b_{12} = b_{21} = 0$, $\nabla_1 = \partial/\partial \vartheta$, $\nabla_2 = \partial/\partial \varphi$, $\nabla_1 \nabla_1 = \partial^2/(\partial \vartheta)^2$, $\nabla_1 \nabla_2 = \partial^2/\partial \vartheta \partial \varphi - \operatorname{ctg} \vartheta \partial/\partial \varphi$, $\nabla_2 \nabla_2 = \partial^2/(\partial \varphi)^2 + \sin \vartheta \cos \vartheta \partial/\partial \vartheta$.

Разрешающая задача Дирихле (1.17) с учетом выписанных соотношений примет вид ($p=0$):

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta^\circ}{(\partial \vartheta)^2} + \frac{1}{(R \sin \vartheta)^2} \left[\frac{\partial^2 \theta^\circ}{(\partial \varphi)^2} + \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial \theta^\circ}{\partial \vartheta} \right] - 6\rho^2 h^{-2} \theta^\circ =$$

$$= -6\rho^2 h^{-3} (\sin \vartheta \cos \varphi U_1 + \sin \vartheta \sin \varphi U_2 + \cos \vartheta U_3),$$

$$\theta^\circ|_{\vartheta=\vartheta_2} = 0 \quad (U_i = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i \quad (i=1, 3))$$

Ее решением является функция

$$\theta^\circ = \frac{6\rho^2 h^{-2} R^2}{2 + 6\rho^2 h^{-2} R^2} \left\{ \left[1 - \frac{\sin \vartheta_2 P_\nu^1(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta P_\nu^1(\cos \vartheta_2)} \right] \left(\sin \vartheta \cos \varphi \frac{U_1}{h} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sin \vartheta \sin \varphi \frac{U_2}{h} \right) + \left[1 - \frac{\cos \vartheta_2 P_\nu^0(\cos \vartheta)}{\cos \vartheta P_\nu^0(\cos \vartheta_2)} \right] \cos \vartheta \frac{U_3}{h} \right\}$$

где $P_\nu^\mu(\cos \vartheta)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода, $\nu = -1/2 + i\lambda = -1/2 + i(6\rho^2 h^{-2} R^2 - 1/4)^{1/2}$.

Для достаточно больших значений совмещенного параметра жесткостные характеристики рассматриваемого сферического имитатора определяются по формулам (1.23) и имеют вид

$$B_{33} = \frac{F_3}{U_3} = K \frac{S}{h} \left\{ \frac{6\rho^2 h^{-2} R^2}{2 + 6\rho^2 h^{-2} R^2} \left[\frac{1}{3} (1 + \cos \vartheta_2 + \cos^2 \vartheta_2) - \frac{\cos \vartheta_2 (\cos^2 1/2 \vartheta_2 + \kappa_1)}{1 + \kappa_2} \right] \right\} \quad (6.1)$$

$$B_{ii} = \frac{F_i}{U_i} = K \frac{S}{h} \left\{ \frac{6\rho^2 h^{-2} R^2}{2 + 6\rho^2 h^{-2} R^2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cos \vartheta_2 (1 + \cos \vartheta_2) - \frac{\sin \vartheta_2 \kappa_3}{\operatorname{ctg} 1/2 \vartheta_2 \kappa_4} \right] \right\}$$

$$\kappa_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k-1/2} \vartheta_2 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} \sin^{2-1/2} \vartheta_2 \right) \prod_{l=1}^k \frac{4\lambda^2 + (2l-1)^2}{(2l)^2}$$

$$\kappa_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k-1/2} \vartheta_2 \prod_{l=1}^k \frac{4\lambda^2 + (2l-1)^2}{(2l)^2}$$

$$\kappa_3 = \sum_{k=1}^{\infty} k \sin^{2k-1/2} \vartheta_2 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \sin^{2-1/2} \vartheta_2 \right) \prod_{l=1}^k \frac{4\lambda^2 + (2l-1)^2}{(2l)^2}$$

$$\kappa_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k \sin^{2k-1/2} \vartheta_2 \prod_{l=1}^k \frac{4\lambda^2 + (2l-1)^2}{(2l)^2}, \quad S = 2\pi R^2 (1 - \cos \vartheta_2)$$

7. Приведенными случаями, по-видимому, исчерпываются возможности получения точных эталонных решений краевой задачи (1.17). Для практического использования необходим достаточно простой метод. В качестве такового примем вариационный подход.

Можно показать, что вариационная задача

$$\delta \Pi(\theta^\circ) \text{ при } \theta^\circ|_g = -p/K \quad (7.1)$$

для функционала

$$\Pi(\theta^\circ) = \int_S \{ 1/2 a^{\mu\nu} \nabla_\mu \theta^\circ \nabla_\nu \theta^\circ + 3\rho^2 h^{-2} (\theta^\circ)^2 - 6\rho^2 h^{-3} [U_n + c_{\alpha\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^\gamma) \Omega^\alpha] \theta^\circ \} dS \quad (7.2)$$

эквивалентна краевой задаче (1.17). Решение задачи (7.1) будем искать в виде

$$\theta^\circ = \theta_0^\circ + \sum_{k=1}^N c_k \theta_k^\circ, \quad \delta \theta^\circ = \sum_{k=1}^N \delta c_k \theta_k^\circ \quad (7.3)$$

$$\theta_0^\circ(\alpha^1, \alpha^2)|_g = -p/K, \quad \theta_k^\circ(\alpha^1, \alpha^2)|_g = 0$$

Получены приближенные решения при удержании в представлении (7.3) одной и двух координатных функций для имитаторов, рассмотренных при нахождении точных решений. Найденные приближенные решения сопоставляются с эталонными точными.

Так, для плоского имитатора, имеющего в плане форму длинного прямоугольника (фиг. 3), решение разыскиваем ($p=0$) в виде $\theta^\circ = \theta^{(N)\circ} = \sum c_k^N (x_1^2 - 1/4 a^2)^k$ ($k=1, 2, \dots, N$). Подстановка выписанных соотношений при $N=1$ и $N=2$ в (7.1) и (7.2) приводит после интегрирования и использования формул (1.23) к следующим выражениям жесткости на сжатие:

$$B_{33}^1 = 0,833K \frac{a\zeta^2}{h(\zeta^2 + 2,5)}, \quad B_{33}^2 = 0,933K \frac{a(\zeta^4 + 22,5\zeta^2)}{h(\zeta^4 + 28\zeta^2 + 63)} \quad (7.4)$$

Сравнение полученных приближенных выражений с точным (3.1) приведено в табл. 1, из которой следует, что относительные погрешности δ^1 и δ^2 решений (7.4) увеличиваются с ростом величины смещенного параметра и достигают (при $\zeta \sim \infty$) максимальной величины 16,7 и 6,7% соответственно. При реальных значениях параметра ($1 \leq \zeta \leq 10$) относительные погрешности не превышают 10 и 1,5% соответственно.

Таблица 1

ξ	$(B_{33}/B_{33}^{\infty}) \cdot 10$	$(B_{33}^1/B_{33}^{\infty}) \cdot 10$	$(B_{33}^2/B_{33}^{\infty}) \cdot 10$	$\delta^1, \%$	$\delta^2, \%$
2	5,180	5,126	5,178	0,17	0,04
4	7,502	7,204	7,493	3,96	0,11
6	8,333	7,789	8,301	6,53	0,39
8	8,750	8,017	8,679	8,38	0,81
10	9,000	8,127	8,885	9,70	1,27
100	9,900	8,330	9,325	15,86	5,81
∞	1,000	8,330	9,330	16,70	6,70

Таблица 2

ξ_2	$(B_{33}/B_{33}^{\infty}) \cdot 10$	$(B_{33}^1/B_{33}^{\infty}) \cdot 10$	$(B_{33}^2/B_{33}^{\infty}) \cdot 10$	$\delta^1, \%$	$\delta^2, \%$
2	0,762	0,757	0,757	0,69	0,67
4	4,011	3,946	3,964	1,62	1,16
6	6,095	5,950	6,051	2,38	0,72
8	1,174	6,918	7,142	3,57	0,45
10	7,795	7,415	7,766	4,88	0,38
100	9,797	8,322	9,309	15,06	4,98
∞	10,000	8,330	9,330	16,70	6,70
6	0,758	0,757	0,757	0,08	0,07
8	3,971	3,946	3,964	0,64	0,17
10	6,060	5,950	6,051	1,82	0,16
100	9,788	8,321	9,307	14,99	4,92
∞	10,000	8,330	9,330	16,70	6,70

Для плоского кольцевого имитатора (фиг. 4), принимая ($p=0$) $\theta^\circ = \theta^{\circ(N)} = \sum c_k^N [(r-R_1)(r-R_2)]^k$ ($k=1, 2, \dots, N$), получаем следующие выражения жесткости на сжатие:

$$B_{33}^1 = 0,833K \frac{S(\xi_2 - \xi_1)^2}{h[(\xi_2 - \xi_1)^2 + 10]} \quad (7.5)$$

$$B_{33}^2 = 0,933K \frac{S[(\xi_2 - \xi_1)^4 + 90(\xi_2 - \xi_1)^2]}{h[(\xi_2 - \xi_1)^4 + 112(\xi_2 - \xi_1)^2 + 1008]}$$

Сопоставление приближенных выражений (7.5) с точным (4.1) приведено в табл. 2 (для первых семи строк параметр $\xi_1=1$, а для последних пяти $\xi_1=5$), из которой видно, что погрешности приближенных решений δ^1 и δ^2 в рассматриваемых интервалах значений совмещенных параметров достигают максимальной величины 16,7 и 6,7% (при $\xi_2 \sim \infty$). При реальных значениях совмещенных параметров ($1 \leq \xi_1 \leq 5$, $2 \leq \xi_2 \leq 10$) относительные погрешности не превышают 5 и 1,5% соответственно.

Для цилиндрического имитатора (фиг. 5), принимая (при $p=0$) $\theta^\circ = \theta^{\circ(N)} = \sum c_k^N (z^2 - 1/4l^2)^k \cos \varphi$ ($k=1, 2, \dots, N$), находим при $N=1$ и $N=2$:

$$B_{11}^1 = 0833K \frac{S\xi_1^2\xi_2^2}{2h(\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^2 + 10\xi_1^2)} \quad (7.6)$$

$$B_{11}^2 = 0933K \frac{S(\xi_1^4\xi_2^4 + \xi_1^2\xi_2^4 + 90\xi_1^4\xi_2^2)}{2h(\xi_1^4\xi_2^4 + 2\xi_1^2\xi_2^4 + \xi_2^4 + 112\xi_1^4\xi_2^2 + 112\xi_1^2\xi_2^2 + 1008\xi_1^4)}$$

Сравнение приближенных выражений (7.6) с точным (5.1) приведено в табл. 3 (параметр ξ_1 имеет прежние значения), из которой следует, что относительные погрешности приближенных выражений (7.6) δ^1, δ^2 в рассматриваемых интервалах значений совмещенных параметров увели-

Таблица 3

ξ_2	$(B_{ii}^1/B_{ii}^\infty) \cdot 10$	$(B_{ii}^1/B_{ii}^\infty) \cdot 10$	$(B_{ii}^2/B_{ii}^\infty) \cdot 10$	$\delta^1, \%$	$\delta^2, \%$
2	1,859	1,851	1,858	0,43	0,04
4	3,245	3,173	3,243	2,19	0,05
6	3,822	3,657	3,817	4,31	0,13
8	4,116	3,863	4,103	5,23	0,32
10	4,293	3,967	4,267	7,59	0,61
100	4,929	4,163	4,660	15,54	5,46
∞	5,000	4,165	4,665	16,70	6,70
6	6,486	6,321	6,483	2,54	0,05
8	7,260	6,963	7,251	4,08	0,12
10	7,730	7,307	7,711	5,47	0,25
100	9,427	8,002	8,952	15,12	5,04
∞	9,615	8,010	8,971	16,70	6,70

Таблица 4

$R \cdot 10^2$	ϑ_2	$\frac{B_{33}h}{KS} \cdot 10$	$\frac{B_{33}^1h}{KS} \cdot 10$	$\frac{B_{33}^2h}{KS} \cdot 10$	$\delta^1, \%$	$\delta^2, \%$
6,1	1,140	2,892	2,675	2,891	7,53	0,06
8,9	0,956	3,799	3,446	3,785	9,29	0,36
11,7	0,864	4,462	3,990	4,429	10,59	0,73

чиваются с ростом ξ_2 и достигают (при $\xi_2 \sim \infty$) максимальных величин 16,7 и 6,7%. При реальных значениях совмещенных параметров ($1 \leq \xi_1 \leq 5$, $2 \leq \xi_2 \leq 10$) δ^1 и δ^2 не превышают 8 и 1% соответственно.

Для сферического имитатора кругового очертания (фиг. 6), принимая (при $p=0$) $\theta^\circ = \theta^{(N)} = \sum c_k^N (\theta - \vartheta_2)^k$ ($k=1, 2, \dots, N$), получаем

$$B_{33}^1 = K \frac{S3\rho^2 h^{-2} R^2 D}{h32A(1 - \cos \vartheta_2)} \quad (7.7)$$

$$B_{33}^2 = K \frac{S3\rho^2 h^{-2} R^2 (1/4 D^2 B - DFC + F^2 A)}{h8(AB - C^2)(1 - \cos \vartheta_2)}$$

$$A = 1 - \cos \vartheta_2 + 6\rho^2 (R/h)^2 [2(\cos \vartheta_2 - 1) + \vartheta_2^2], \quad D = \sin 2\vartheta_2 - 2\vartheta_2$$

$$B = 4[2(\cos \vartheta_2 - 1) + \vartheta_2^2] + 6\rho^2 (R/h)^2 [\vartheta_2^2 (\vartheta_2^2 - 12) - 24(\cos \vartheta_2 - 1)]$$

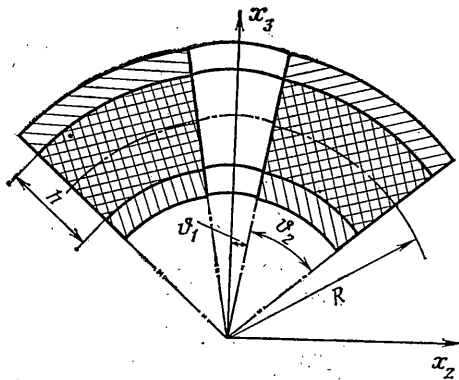
$$C = 2(\sin \vartheta_2 - \vartheta_2) - 6\rho^2 (R/h)^2 [6(\sin \vartheta_2 - \vartheta_2) + \vartheta_2^3], \quad F = \vartheta_2^2 - \sin^2 \vartheta_2$$

В табл. 4 полученные приближенные выражения (7.7) сопоставляются с точным (6.2) для трех реальных имитаторов при $K=2,5 \cdot 10^9$ Н/м², $G=13,4 \cdot 10^5$ Н/м², $h=2 \cdot 10^{-3}$ м (радиус R дан в м, угол ϑ_2 — в рад).

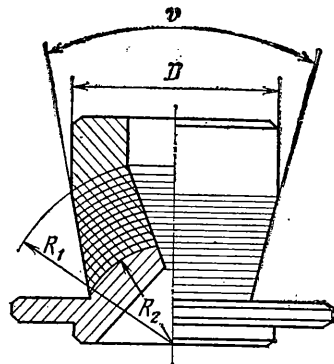
Сравнение всех полученных приближенных решений с точными эталонными убеждает в том, что при разумном выборе координатных функций приемлемая для практических целей точность достигается в одно- либо двухконстантном представлении разрешающей функции.

8. Рассмотрим сферический имитатор кольцевого очертания (фиг. 7). Разыскивая решение вариационной задачи (7.1) для функционала (7.2) в виде ($p=0$) $\theta^\circ = \theta^{(1)} = c_1^1 (\theta - \vartheta_1) (\theta - \vartheta_2)$, получаем следующее выражение для сжимающей силы: $P = K(\Delta/h)SA$, где $A = \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \rho^2 (R/h)^2 a^2 / [b(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)]$, $S = 2\pi R^2 (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)$, $a = (\vartheta_2 - \vartheta_1) (\sin 2\vartheta_1 + \sin 2\vartheta_2) - (\cos 2\vartheta_1 - \cos 2\vartheta_2)$, $b = [(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 - 8] (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) + 4(\vartheta_2 - \vartheta_1) (\sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_1) - 12\rho^2 (R/h)^2 \{[(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 - 12] (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) + 6(\vartheta_2 - \vartheta_1) (\sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_1)\}$.

Имея выражение для жесткости на осевое сжатие одного слоя, можно подсчитать жесткость тонкослойного сферического резинометаллического подшпигника, состоящего из N резиновых слоев (фиг. 8). Считая, что сила



Фиг. 7



Фиг. 8

P передается через все слои без изменений, а полная осадка подшипника подсчитывается как суммарная по слоям $\Delta = \sum \Delta_i$ ($i=1, 2, \dots, N$), получаем $P=K(\Delta/h) \sum (S_i A_i)^{-1}$.

Расчет 17-слояного сферического подшипника с параметрами, приведенными в [8], дал при вертикальной осадке $\Delta=1 \cdot 10^{-3}$ м значение сжимающей силы, равное $86 \cdot 10^3$ Н, при экспериментальном ее значении — порядка $90 \cdot 10^3$ Н.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусятинская Н. С. Применение тонкослойных резинометаллических элементов (ТРМЭ) в станках и других машинах. М.: НИИмаш, 1975. 82 с.
2. Черных К. Ф., Миллякова Л. В. Тонкие резинометаллические элементы. — Вестн. ЛГУ, 1981, № 19, вып. 4, с. 88–96.
3. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Л.: Изд-во ЛГУ, 1962, ч. 1. 274 с.; 1964, ч. 2. 395 с.
4. Черных К. Ф., Шубина И. М. Об учете сжимаемости резины. — В кн.: Механика эластомеров. Краснодар: Изд-е Кубанск. гос. ун-та, 1978, т. 2, с. 56–62.
5. Малый В. И., Гусятинская Н. С. Об экспериментальном определении упругих характеристик резины. — В кн.: Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1980, вып. 36, с. 181–184.
6. Миллякова Л. В. Жесткость на сжатие плоского имитатора. — В кн.: Механика эластомеров. Краснодар: Изд-е Краснодар. политехн. ин-та, 1981, с. 76–79.
7. Малый В. И. Асимптотическое решение задачи о сжатии слоя слабосжимаемого материала. — В кн.: Механика эластомеров. Материалы 3-й выезд. сессии. Краснодар: Изд-е Краснодар. политехн. ин-та, 1983, с. 38–44.
8. Лейканд М. А., Лавендел Э. Э., Львов С. В., Хричикова В. А., Левин Г. А., Тарновский Г. И. Тонкослойные сферические эластомерные подшипники. — В кн.: Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1980, вып. 36, с. 169–180.

Ленинград

Поступила в редакцию
21.IX.1983