МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1986

УДК 539.376

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН НА НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩЕМ ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

ЖУХОВИЦКИЙ Д. М.

Установлены условия устойчивости вязкоупругих неоднородностареющих пластин круглой и кольцевой формы с произвольным ядром ползучести, лежащих на однослойных вязкоупругих основаниях, материал которых обладает свойством неоднородного старения. Найден вид условий устойчивости в зависимости от поверхностных усилий. Работа продолжает исследования [1–3]. Библиографию работ по устойчивости однородных вязкоупругих систем можно найти, например, в [1, 4–6].

1. Модель основания. Рассмотрим трехмерное вязкоупругое основание толщиной H, расположенное на несжимаемом подстилающем слое. Предположим, что материал этого основания обладает свойством неоднородного старения. Выберем цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$ с плоскостью $Or\varphi$, параллельной верхней плоскости основания и на расстоянии $h/2$ выше нее, и осью z, направленной в тело основания. Обозначим через $\sigma=(\sigma_{ij})$, $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$, i, $j=r$, φ, z тензоры напряжений и деформаций в момент времени $t\geqslant 0$. Согласно модели неоднородно-стареющих тел [1], компоненты тензоров σ и ε связаны соотношениями

$$\sigma_{ij}=E_g(1+\nu)(I-N_g)\varepsilon_{ij}+3E_g\nu_g[(1+\nu_g)(1-2\nu_g)]^{-1}[1+ \\ +(1-2\nu_g)(3\nu_g)^{-1}N_g-(1+\nu_g)(3\nu_g)^{-1}N_{1g}]\delta_{ij}\varepsilon \tag{1.1}$$

Здесь индекс g означает принадлежность величин к материалу основания, E_g — постоянный модуль упругомгновенной деформации, ν_g — постоянный коэффициент Пуассона, δ_{ij} — символы Кронекера, $\varepsilon=\varepsilon_{ij}/3$, I — единичный оператор, N_g, N_{1g} — операторы объемной и сдвиговой релаксаций (n_g, n_{1g} — ядра релаксации):

$$Ix=x(t),\qquad Nx=\int_{\tau_0}^{t} n(t+\rho,\tau+\rho)x(\tau)d\tau \tag{1.2}$$

$\rho(r,\varphi,z)$ — функция неоднородного старения, характеризующая закон изменения возраста материала, τ_0 — момент приложения нагрузки.

Предполагается, что функции $n_g(t,\tau)$, $n_{1g}(t,\tau)$ положительные, кусочнонепрерывные по t и непрерывные по $0\leqslant\tau\leqslant t$, а функция $\rho(r,\varphi,z)$ кусочно-непрерывная и ограниченная.

Пусть на основание действует внешняя нагрузка, компоненты которой в направлении осей r, φ, z являются соответственно функциями $p(r,\varphi,z)$, $g(r,\varphi,z)$ и $q(r,\varphi,z)$. Перемещения $u(t,r,\varphi,z)$, $v(t,r,\varphi,z)$, $w(t,r,\varphi,z)$ произвольной точки (r,φ,z) основания в момент времени t будем считать положительными в том случае, когда их направления совпадают с положительными направлениями соответствующих координатных осей. Компоненты тензора деформаций по этим перемещениям определяются следующим образом [7]:

$$\varepsilon_{rr}=\partial_r u,\qquad \varepsilon_{r\varphi}={}^1/{}_2(r^{-1}\partial_\varphi u+\partial_r v-r^{-1}v) \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}=r^{-1}\partial_\varphi v+r^{-1}u,\qquad \varepsilon_{rz}={}^1/{}_2(\partial_z u+\partial_r w)$$

$$\varepsilon_{zz}=\partial_z w,\qquad \varepsilon_{\varphi z}={}^1/{}_2(r^{-1}\partial_\varphi w+\partial_z v)$$

(∂ — частная производная по одной из пространственных переменных, указанной в индексе).

Определим функции перемещений u, v и w, считая известными внешние нагрузки p, g, q. Следуя [8], представим искомые перемещения в форме конечных разложений

$$u(t, r, \varphi, z) = u_i(t, r, \varphi)\varkappa_i(z) \qquad (i=1,\ldots,l) \tag{1.4}$$

$$v(t, r, \varphi, z) = v_j(t, r, \varphi)\chi_j(z) \qquad (j=1,\ldots,m)$$

$$w(t, r, \varphi, z) = w_s(t, r, \varphi)\psi_s(z) \qquad (s=1,\ldots,n)$$

По повторяющимся индексам ведется суммирование. Функции $\varkappa_i(z)$, $\chi_j(z)$, $\psi_s(z)$ характеризуют распределение горизонтальных и вертикальных перемещений по высоте основания, выбираются заранее как безразмерные линейно независимые функции и в этом смысле считаются заданными. Функции $u_i(t, r, \varphi)$, $v_j(t, r, \varphi)$, $w_s(t, r, \varphi)$, имеющие размерность прогиба, считаются искомыми.

Умножим уравнения равновесия объемного элемента в цилиндрических координатах [7]:

$$\partial_r\sigma_{rr}+r^{-1}\partial_\varphi\sigma_{r\varphi}+\partial_z\sigma_{rz}+r^{-1}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})+p=0$$

$$\partial_r\sigma_{r\varphi}+r^{-1}\partial_\varphi\sigma_{\varphi\varphi}+\partial_z\sigma_{\varphi z}+2r^{-1}\sigma_{\varphi r}+g=0$$

$$\partial_r\sigma_{rz}+r^{-1}\partial_\varphi\sigma_{z\varphi}+\partial_z\sigma_{zz}+r^{-1}\sigma_{zr}+q=0$$

соответственно, первое на $\varkappa_\alpha(z)$, второе на $\chi_\beta(z)$ и третье на $\psi_\gamma(z)$ ($\alpha=1,\ldots,l$; $\beta=1,\ldots,m$; $\gamma=1,\ldots,n$) и проинтегрируем результат по z в пределах от $h/2$ до $H+h/2$. Полагая для простоты изложения $N_g=N_{1g}$, а функцию старения однородной по z, с учетом (1.1), (1.3) и (1.4) получим уравнения равновесия цилиндра со сторонами dr, $rd\varphi$, H в обобщенных перемещениях u_i, v_j, w_s. Уравнения эти имеют громоздкий вид, поэтому выпишем только третье уравнение, которое далее будем использовать

$$\begin{gathered}
{}^1/_2(1-\nu_0)\partial_r[(I-N_g)(u_ib_{i\gamma}+e_{s\gamma}\partial_rw_s)]+ \\
+{}^1/_2(1-\nu_0)r^{-1}\partial_\varphi[(I-N_g)(e_{s\gamma}r^{-1}\partial_\varphi w_s+v_jd_{j\gamma})]+ \\
+(I-N_g)[{}^1/_2(1-\nu_0)e_{s\gamma}r^{-1}\partial_rw_s-f_{s\gamma}w_s+{}^1/_2(1-\nu_0)b_{i\gamma}r^{-1}u_i- \\
-\nu_0a_{i\gamma}(\partial_ru_i+r^{-1}u_i)-\nu_0c_{j\gamma}r^{-1}\partial_\varphi v_j]+E_0^{-1}(1-\nu_0^2)q_\gamma=0, \qquad (\gamma=1,\ldots,n) \\
E_0=E_g(1-\nu_g^2)^{-1}, \qquad \nu_0=\nu_g(1-\nu_g)^{-1}
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах, указанных в (1.4), и введены обозначения (производная по z отмечена штрихом, пределы интегрирования $h/2$ и $H+h/2$):

$$a_{i\gamma}=\int\varkappa_i\psi_\gamma'\,dz, \qquad b_{i\gamma}=\int\varkappa_i'\psi_\gamma\,dz, \qquad d_{j\gamma}=\int\chi_j'\psi_\gamma\,dz$$

$$c_{j\gamma}=\int\chi_j\psi_\gamma'\,dz, \qquad e_{s\gamma}=\int\psi_s\psi_\gamma\,dz, \qquad f_{s\gamma}=\int\psi_s'\psi_\gamma'\,dz$$

$$q_\gamma=\int q(r,\varphi,z)\psi_\gamma(z)\,dz \tag{1.6}$$

Система уравнений (1.5) (вместе с невыписанными первыми двумя типами уравнений) дает приближенное решение для толстой изотропной плиты. Это решение будет тем более точным, чем большее количество членов принято в разложениях (1.4). Вместе с тем можно считать [8], что полной системой (1.5) определяется некоторая обобщенная пространственная модель основания, свойства которой зависят от количества членов в разложенях (1.4) и характера функций $\varkappa_i(z)$, $\chi_j(z)$, $\psi_s(z)$. Выбирая для ограниченного числа функций $\varkappa_i$, χ_j, ψ_s различные выражения, будем получать различные расчетные схемы основания, в большей или меньшей степени соответствующие действительности.

Согласно [8], функции $\varkappa_i$, χ_j, ψ_s следует вводить в соответствии с конкретными условиями рассматриваемой задачи, например по закону, являющемуся результатом экспериментальных исследований. При этом уже простейшие модели вязкоупругого основания, получаемые при минимальном количестве функций $\varkappa_i$, χ_j, ψ_s, будут более верно отражать действительность, чем основание, построенное на гипотезе о существовании коэффициента постели.

Пусть к рассматриваемому основанию приложена внешняя нагрузка в виде поверхностной силы $q_1(r, \varphi)$, направленной вдоль оси z. Тогда интеграл (1.6) следует рассматривать как интеграл Стилтьеса [9]. Естественно предположить в этом случае, что горизонтальные перемещения в основании существенно меньше вертикальных и ими можно пренебречь по сравнению с последними. Положим, далее, что вертикальные перемещения определяются выражением $w(t, r, \varphi, z)=w(t, r, \varphi)\psi(z)$, где $\psi(z)$ — функция поперечного распределения перемещений, выбираемая заранее в соответствии с физическими условиями задачи.

Введем обозначения

$$w_1=\partial_r w, \quad w_2=r^{-1}\partial_\varphi w, \quad w_{11}=\partial_{rr}{}^2 w, \quad w_{12}=\partial_r(r^{-1}\partial_\varphi w)$$

$$w_{22}=r^{-1}\,\partial_r w+r^{-2}\partial_{\varphi\varphi}{}^2 w, \quad d\omega=r\,dr\,d\varphi, \quad H=\iint w\Delta\Delta w\,d\omega$$

$$\|w\|_2{}^2=\iint(w_{11}{}^2+2w_{12}{}^2+w_{22}{}^2)\,d\omega, \quad \|w\|_{2-i}^2=\iint(w_1{}^2+w_2{}^2)^i\,d\omega \quad (i=1, 2)$$

$$\|w\|^2=\iint w^2\,d\omega, \quad \|\sigma^\circ\|^2=\iint(\sigma_r{}^\circ+2\sigma_{r\varphi}{}^\circ+\sigma_\varphi{}^\circ)\,d\omega, \quad \Delta=\partial_{rr}{}^2+r^{-1}\partial_r+r^{-2}\partial_{\varphi\varphi}{}^2$$

(интегрирование ведется по области $\Omega=[R_0, R]\times[0, 2\pi]$).

Интеграл (1.6) примет вид $q_0=q_1(r, \varphi)\psi(h/2)$ ($\psi(h/2)$ — значение функции на поверхности рассматриваемого массива), а от системы (1.5) останется уравнение

$$2e\{[(I-N_g)w_1]_1+[(I-N_g)w_2]_2+(I-N_g)r^{-1}w_1\}- \qquad (1.7)$$
$$-f(I-N_g)w+q_0=0$$

$$e={}^1/_4E_0e_{11}(1+\nu_0)^{-1}, \quad f=E_0f_{11}(1-\nu_0{}^2)^{-1}$$

Интегро дифференциальное уравнение (1.7) описывает осадку основания w под действием поверхностных сил q_1. Коэффициент e характеризует работу основания на сдвиг, а f определяет работу основания на сжатие и в этом смысле аналогичен коэффициенту постели.

2. Постановка задачи. Поместим на описанное основание кольцевую пластину, изготовленную из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала. Будем предполагать, что силы трения и сцепления между пластиной и поверхностью основания отсутствуют.

Найдем достаточные условия устойчивости рассматриваемой пластины в постановке задачи [3], т. е. изучим асимметричную деформацию кольца толщиной h, с внутренним радиусом R_0 и внешним R. В момент времени $\tau_0=0$ к недеформированной пластине прикладывается стационарная внешняя нагрузка, состоящая из поперечной нагрузки $q(r, \varphi)$ и сжимающих усилий постоянной величины p_0 вдоль внутренней кромки пластины и p — вдоль внешней. Прогиб пластины обозначим через w, как и осадку основания. Это возможно в силу того, что пластина плотно лежит на основании.

Все выкладки проведем для жестко защемленной по обеим кромкам пластины

$$w(t, r, \varphi)=\partial_r w(t, r, \varphi)=0 \quad \text{при} \quad r=R_0, R, \quad \forall\varphi\in[0, 2\pi] \qquad (2.1)$$

Сжимающие усилия дадут следующие условия:

$$\sigma_r{}^\circ(t, R_0, \varphi)=-p_0, \; \sigma_r{}^\circ(t, R, \varphi)=p, \quad \forall\varphi\in[0, 2\pi] \qquad (2.2)$$
$$\sigma_{r\varphi}{}^\circ(t, r, \varphi)=0 \quad \text{при} \quad r=R_0, R, \quad t\geqslant 0$$

Здесь градусом обозначено основное (невозмущенное) состояние пластины (когда возмущения $q(r,\varphi)=0$).

Определение. Пластина называется устойчивой, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что из неравенства $|q(r,\varphi)|<\delta$ вытекает оценка $|w(t,r,\varphi)|<\varepsilon$.

3. Общие условия устойчивости. Для обобщенного плоского напряженного состояния, реализуемого в пластине, соотношения (1.1) в [3] были преобразованы к виду

$$\sigma_r=E(1-\nu^2)^{-1}[(1-\nu)(I-N)\varepsilon_r+\nu(I-K)(\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi)] \tag{3.1}$$

$$\sigma_\varphi=E(1-\nu^2)^{-1}[(1-\nu)(I-N)\varepsilon_\varphi+\nu(I-K)(\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi)]$$

$$\sigma_{r\varphi}=E(1+\nu)^{-1}(I-N)\varepsilon_{r\varphi}$$

$$K=N-(I-N)(1+\nu)(1-2\nu)[3\nu(1-\nu)]^{-1}(L-L_1)[I+(1+\nu)(3-3\nu)^{-1}L]^{-1}$$

Все величины без индекса g относятся к материалу пластины. Операторы N, N_1, L, L_1 имеют вид (1.2), их ядра — функции $n(t,\tau)$, $n_1(t,\tau)$, $l(t,\tau)$, $l_1(t,\tau)$ положительные, кусочнонепрерывные по t и непрерывные по $0\leqslant\tau\leqslant t$.

При условии, что выполнены гипотезы Кирхгофа [7], удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей, а квадраты поворотов малы по сравнению с удлинениями и сдвигами, из уравнений равновесия элемента пластины в [3] в силу (3.1) и (1.3) было получено интегро дифференциальное уравнение для прогиба w. Это уравнение будет описывать функцию прогибов $w(t,r,\varphi)$ и в рассматриваемой задаче, если в нем заменить q на $q+q_1$. Учитывая (1.7) и соотношение $q_0=q_1\psi(h/2)$, будем иметь

$$\Delta\Delta w-2\varkappa^2\Delta w+\chi^4 w= \tag{3.2}$$
$$=G(N,K,w)+\Phi(N_g,w)+D^{-1}q+D^{-1}F(\sigma^\circ,w)$$

$$G(N,K,w)=(1-\nu)[(\partial_{rr}{}^2+2r^{-1}\partial_r)Nw_{11}+2(r^{-1}\partial_{r\varphi}{}^2+r^{-2}\partial_\varphi)Nw_{12}+$$
$$+(r^{-2}\partial_{\varphi\varphi}{}^2-r^{-1}\partial_r)Nw_{22}+\nu\Delta K\Delta w$$

$$\Phi(N_g,w)=-2\varkappa^2[(N_g w_1)_1+(N_g w_2)_2+N_g r^{-1}w_1]+\chi^4 N_g w$$

$$F(\sigma^\circ,w)=h[(\sigma_r{}^\circ w_1+\sigma_{r\varphi}{}^\circ w_2)_1+(\sigma_{r\varphi}{}^\circ w_1+\sigma_\varphi{}^\circ w_2)_2+$$
$$+r^{-1}(\sigma_r{}^\circ w_1+\sigma_{r\varphi}{}^\circ w_2)]$$

$$\varkappa^2=e[D\psi(h/2)]^{-1},\qquad \chi^4=f[D\psi(h/2)]^{-1},\qquad D=Eh^3[12(1-\nu^2)]^{-1}$$

Запишем вариационные задачи

$$\lambda_0=\inf_w Hw\|w\|_0{}^{-1},\qquad \lambda=\inf_w Hw\|w\|^{-2},\qquad \lambda_1=\inf_w\|w\|_1{}^2\|w\|^{-2} \tag{3.3}$$

Здесь инфимумы берутся по всем функциям $w\neq0$, удовлетворяющим краевым условиям (2.1).

Теорема 1. Если существуют такие функции $m_g(t,\tau)$, $m(t,\tau)$, что для всех $0\leqslant\tau\leqslant t$, $(r,\varphi)\in\Omega$ справедливы неравенства

$$0\leqslant n_g(t+\rho_g(r,\varphi),\ \tau+\rho_g(r,\varphi))\leqslant m_g(t,\tau) \tag{3.4}$$

$$0\leqslant n(t+\rho,\tau+\rho),\quad k(t+\rho,\tau+\rho)\leqslant m(t,\tau),\qquad \rho=\rho(r,\varphi)$$

$$|m_g|=\sup_t\int_0^t m_g(t,\tau)\,d\tau<1,\qquad |m|<1$$

и имеет место оценка

$$\|\sigma^\circ\|<\lambda_0 Dh^{-1}[1-|m|+(2\varkappa^2\lambda_1+\chi^4)(1-|m_g|)\lambda^{-1}] \tag{3.5}$$

то описанная выше пластина устойчива.

Доказательство. Умножим уравнение (3.2) на $w(t, r, \varphi)$ и проинтегрируем по области Ω. Интегрируя по частям с учетом граничных условий (2.1), получим

$$\|\Delta w\|^2+2\varkappa^2\|w\|_1^2+\chi^4\|w\|^2=(1-\nu)\iint(w_{11}Nw_{11}+2w_{12}Nw_{12}+w_{22}Nw_{22})\,d\omega+$$
$$+\nu\iint(w_{11}+w_{22})K(w_{11}+w_{22})\,d\omega+2\varkappa^2\iint(w_1N_gw_1+w_2N_gw_2)\,d\omega+$$
$$+\chi^4\iint wN_gw\,d\omega+D^{-1}\iint wq\,d\omega+hD^{-1}\iint(-\sigma_r{}^\circ w_1{}^2-2\sigma_{r\varphi}{}^\circ w_1w_2-\sigma_\varphi{}^\circ w_2{}^2)\,d\omega$$

Отсюда, согласно [10] для оценки последнего слагаемого правой части и в силу неравенств (3.4), Коши – Буняковского [9] и Бернштейна [11], аналогично [3] вытекает неравенство

$$\begin{gathered}\|\Delta w\|^2+2\varkappa^2\|w\|_1^2+\chi^4\|w\|^2\leqslant\|\Delta w\|\int_0^t m(t,\tau)\,\|\Delta w\|d\tau+\\+2\varkappa^2\|w\|_1\int_0^t m_g(t,\tau)\,\|w\|_1\,d\tau+\chi^4\|w\|\int_0^t m_g(t,\tau)\,\|w\|d\tau+\\+D^{-1}\|w\|\,\|q\|+hD^{-1}\|\sigma^\circ\|\,\|w\|_0\end{gathered}\tag{3.6}$$

в правой части которого все величины заменим их максимальными значениями по $t\geqslant0$. От получившегося соотношения возьмем супремум по t. В результате, учитывая, что соотношения (3.3) при условиях (2.1) дают оценки $\|w\|_0\leqslant\lambda_0^{-1}\|\Delta w\|^2$; $\|w\|^2\leqslant\lambda^{-1}\|\Delta w\|^2$, $\|w\|^2\leqslant\lambda_1^{-1}\|w\|_1^2$, получим

$$[\lambda(1-|m|)-\lambda\lambda_0^{-1}D^{-1}h|\sigma^\circ|_s+(2\varkappa^2\lambda_1+\chi^4)(1-|m_g|)]|w|_s\leqslant D^{-1}\|q\|\tag{3.7}$$
$$|\sigma^\circ|_s=\sup_t\|\sigma^\circ\|,\qquad |w|_s=\sup_t\|w\|$$

На основании (3.7), (3.5) имеем оценку $|w|_s\leqslant C\|q\|$ ($0<C$ – постоянная). Кроме того [12], $\max_\Omega|w|\leqslant C(\Omega)$ ($0<C(\Omega)$ – константа, зависящая только от области интегрирования). Последние оценки и доказывают устойчивость рассматриваемой пластины.

Для вывода условий устойчивости в терминах сжимающих усилий воспользуемся оценкой основного (невозмущенного) напряженного состояния σ° через p_0 и p, полученного в [3] при выполнении условий (2.2):

$$\begin{gathered}\|\sigma^\circ\|\leqslant P=\sqrt{2}\pi(1+\nu)(1+|m|)[(1-\nu)(1-\\-|m|)]^{-1}(p\sqrt{R^2-R_0{}^2}+|p-p_0|R_0)\end{gathered}\tag{3.8}$$

Применяя эту оценку к последнему слагаемому правой части неравенства (3.6), убеждаемся, что справедлива

Теорема 2. Если выполнены условия (3.4) теоремы 1, а также неравенство

$$P<\lambda_0Dh^{-1}[1-|m|+(2\varkappa^2\lambda_1+\chi^4)(1-|m_g|)\lambda^{-1}]\tag{3.9}$$

то кольцевая пластина будет устойчивой.

4. Некоторые обобщения. Условия устойчивости (3.5), (3.9), установленные при довольно слабых ограничениях на ядра $n(t,\tau)$ и $k(t,\tau)$, являются довольно жесткими. Менее жесткие условия устойчивости получаются в предположении, что существует такая функция $n_0(t,\tau)$, что равномерно по $t\geqslant t_0$:

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^t\sup_\Omega[\,|n(t+\rho,\tau+\rho)-n_0(t,\tau)|+|k(t+\rho,\tau+\rho)-n_0(t,\tau)|\,]dt\to0,\quad t_0\to\infty\\\rho=\rho(r,\varphi),\qquad |n_0|<1\end{gathered}\tag{3.10}$$

Обозначая N_0 оператор с ядром n_0, L_0 — оператор, определяемый из соотношения $I-N_0=(I+L_0)^{-1}$, аналогично [3] получим, что справедлива

Теорема 3. Если выполняется условие (3.10), то теоремы 1, 2 верны при замене правых частей неравенств (3.5), (3.9) на выражение вида

$$\lambda_0 Dh^{-1}[1-|n_0|+(2\varkappa^2\lambda_1+\chi^4)(1-|m_g|)(1+|l_0|)\lambda^{-1}]$$

Рассмотрим круглую пластину с защемленными центром и краем. Теоремы 1—3 для такой пластины также будут справедливы, если положить $R_0=0$, $p_0=0$.

Условия устойчивости, установленные в теоремах 1—3, сохраняют свой вид и для других типов опирания круглых и кольцевых пластин. В них надо лишь заменить параметры λ_0, λ, λ_1, определяемые формулами (3.3), на новые значения, соответствующие типу опирания.

Замечания. 1. Положительность параметров λ_0, λ_1, λ показана в [3] с использованием теорем вложения [12].

2. Рассмотренная модель основания содержит некоторые известные модели: при $m_g\equiv0$ это однослойное упругое, а при $\varkappa=0$ — упругое основание Винклера. При различных соотношениях между $\varkappa$, χ и m_g полученные условия устойчивости дадут условия устойчивости пластин на разных основаниях. В частности, если $\varkappa=\chi=0$ (нет основания), то получаются результаты [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.— 336 с.
2. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 177—187.
3. *Жуховицкий Д. М.* Устойчивость кольцевых пластин из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.— ПММ, 1985, т. 49, в. 1, с. 148—155.
4. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел.— М.: Наука, 1977.— 383 с.
5. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести.— М.: Стройиздат, 1968.— 416 с.
6. *Куршин Л. М.* Устойчивость при ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3, с. 125—160.
7. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1948.— 212 с.
8. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании.— М.: Физматгиз, 1960.— 491 с.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.— 543 с.
10. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.— 512 с.
11. *Кошелев А. И.* Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем.— Успехи мат. наук АН СССР, 1958, т. 13, в. 4, с. 29—88.
12. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи в математической физике.— М.: Наука, 1973.— 407 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.IX.1984