

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

ПРОХОРОВ В. П.

Необходимость в исследовании системы твердых тел произвольной структуры обусловлена развитием манипуляторов, роботов, шагающих аппаратов, специальных ферм для раскрытия солнечных панелей [1] и антенн космических кораблей, механики человека и других биологических систем. Публикуемая работа является развитием идей и методов, изложенных в [2-4]. Построен общий формализм для описания строения, геометрии и кинетики системы твердых тел произвольной структуры. Для описания структуры используется теория графов [5], а для описания движений применяется винтовое исчисление [6], теория поверхностных полос [7] и матрицы третьего порядка с дуальными элементами [8]. Предложен алгоритм перехода к аналитической модели реальной системы тел. Делается заключение о возможности перехода к частным системам тел путем конкретизации задачи исследования и структуры системы. Процесс перехода может быть автоматизирован.

Рассмотрим пространственную систему n твердых тел S_j (или S_k) с номерами $j, k=0, 1, \dots, n$ ($j < k$), содержащую μ пар p_q (p_{jk}) тел S_j, S_k с номерами $q=1, 2, \dots, \mu$, образующих голономные контактные связи в m_q точках M_{jkv} с номерами $v=1, 2, \dots, m_q$.

При геометрическом представлении структура системы определяется помеченным (S, p) -графом, содержащим S_1, S_2, \dots, S_n перенумерованных вершин — твердых тел и p_1, p_2, \dots, p_μ перенумерованных ребер — кинематических соединений. Каждому ребру графа приписываются отличительные цифры, соответствующие числу степеней свободы соединения и конструктивному исполнению контактных поверхностей тел. Если S_j и S_k соединены ребром p_q , то S_j и S_k — смежные вершины, а вершина S_j и ребро p_q , так же как и S_k и p_q , инцидентны друг другу [5], т. е. ребро p_q выходит из вершины S_j и входит в вершину S_k .

При аналитическом описании структура системы тел определяется прямоугольной $(S \times p)$ -матрицей инцидентий, элементы которой $b_{jq}=1$, если S_j и p_q инцидентны, и $b_{jq}=0$ в противном случае (здесь j — номер строки матрицы, q — номер столбца).

Таким образом, структура системы тел полностью определяется ее графом, а граф определяется матрицей инцидентий с точностью до изоморфизма. Две системы тел структурно эквивалентны, если их графы изоморфны. Такое матричное представление позволяет при решении конкретных задач исследования и оптимизации автоматизировать процесс генерирования структур.

Пусть движениям тел S_j и S_k относительно нулевого неподвижного тела соответствуют мгновенные винты $U_j^* = \varphi_j^* + \epsilon u_j^*$ и $U_k^* = \varphi_k^* + \epsilon u_k^*$. Здесь и далее ϵ — дуальный символ Клиффорда ($\epsilon^2=0$), φ_j, u_j — угловое и линейное перемещения j -го (k -го) тела вокруг и вдоль винтовой оси; точка над параметром означает его производную по времени t .

Положение точки контакта M_{jkv} на контактной поверхности F_{jk} j -го тела относительно нулевого определим системой взаимосвязанных последовательно ортогональных винтов $A_{ijkv} = E_{ijkv}(\alpha_{ijkv} + \epsilon a_{ijkv})$, где $i=1, 2, \dots, 8$ — номер винта, E_{ijkv} — единственный винт, имеющий свойство $E_{ijkv} = e_{ijkv} + \epsilon \cdot 0$, $e_{ijkv}^2 = 1$; винт $A_{i+1, jkv}$ — комплексный угол между A_{ijkv} и $A_{i+2, jkv}$; винты $E_{1jkv} = A_{1jkv}$, E_{2jkv} , $-E_{1jkv} \times E_{2jkv}$ совпадают для всех j, k, v и образуют базис S_0 -го тела; A_{2jkv} , A_{3jkv} — винты положения оси j -го тела; A_{4jkv} совпадает с винтовой осью j -го тела; A_{6jkv} совпадает с мгновенной винтовой осью относительного движения тел S_j, S_k ; A_{5jkv} определяет кратчайшее расстояние и угол между A_{4jkv} и A_{6jkv} ; A_{8jkv} совпадает с контактной нормалью в точке M_{jkv} ; A_{7jkv} определяет кратчайшее расстояние и угол между A_{6jkv} и A_{8jkv} , причем $A_{6jkv} = A_{6kjv}$, $A_{7jkv} = A_{7kjv}$, $a_{8jkv} = a_{8kjv}$.

Поместим в точку M_{jkv} вершину ортонормированного базиса с единичными винтами E_{8jkv} , E_{9jkv} , $E_{10jkv} = E_{8jkv} \times E_{9jkv}$, в котором E_{9jkv} — единственный винт касательной к траектории M_{jkv} на F_{jk} . В результате кинематической интерпретации производных формул поверхностных полос [7], выделенных на F_{jk} вдоль траекторий точки M_{jkv} , винт скоростей этого базиса определим через инварианты полосы в виде

$$T_{jkv} = v_{jkv} \left[1 + \epsilon k_{9jkv} \left(\sum_{h=8}^{10} k_{hjkv} \right)^{-1} \right] \sum_{h=8}^{10} E_{hjkv} k_{hjkv} \quad (1)$$

Здесь v_{jkv} — скорость M_{jkv} по F_{jk} , $h=8, 9, 10$ — индекс оси базиса полосы, k_{8jkv} — геодезическая кривизна, k_{9jkv} — геодезическое кручение, k_{10jkv} — нормальная кривизна на поверхностной полосе.

С другой стороны, винт T_{jkv} можно представить как геометрическую сумму производных винтов A_{ijkv} по времени

$$T_{jkv} = \sum_{i=2}^s E_{ijkv} A_{ijkv} - E_{4jkv} U_j^* \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), получим

$$v_{jkv} \left[1 + \epsilon k \left(\sum_{h=8}^{10} k_{hjkv} \right)^{-1} \right] \sum_{h=8}^{10} E_{hjkv} k_{hjkv} = \sum_{i=2}^8 E_{ijkv} A_{hjkv} - E_{4jkv} U_j^* \quad (3)$$

Спроектируем (3) на оси сопровождающего точки M_{jkv} базиса с учетом $v_{jkv} E_{8jkv} = v_{jkv} E_{10jkv} = 0$. Аналогичные операции выполним для контактной точки M_{hjv} на поверхности F_{hj} k -го тела, сопряженного с j -м телом. В результате получим систему шести скалярных дифференциальных уравнений в комплексной форме

$$v_{9jkv} k_{hjkv} + \epsilon v_{hjv} = \sum_{i=2}^8 (\alpha_{ijkv} + \epsilon a_{ijkv}) E_{hjkv} E_{ijkv} - (\varphi_j^* + \epsilon u_j^*) E_{hjv} E_{4jkv}$$

$$v_{9hjv} k_{hjkv} + \epsilon v_{hjv} = \sum_{i=2}^8 (\alpha_{ikhv} + \epsilon a_{ikhv}) E_{hjv} E_{ikhv} - (\varphi_k^* + \epsilon u_k^*) E_{hjv} E_{4hjv} \quad (4)$$

в которых скалярные произведения $E_{hjkv} E_{4jkv}$ представляют собой косинусы комплексных углов между единичными винтами базиса полосы и E_{ijkv} (дуальные элементы винтовых матриц соответствующих перемещений базиса полосы).

Установим все независимые дополнительные связи между параметрами системы (4). Известно [6], что при заданных параметрах абсолютных движений тел S_j и S_k (параметры $a_{2jkv}, \alpha_{2jkv}, a_{3jkv}, \alpha_{3jkv}, \varphi_j^*, u_j^*$ и $a_{2jkv}, \alpha_{2jkv}, a_{3jkv}, \alpha_{3jkv}, \varphi_k^*, u_k^*$) можно однозначно определить параметры их относительного движения. Для этого рассмотрим замкнутый контур $a_{2jkv} - a_{2jkv}, a_{3jkv}, a_{4jkv}, a_{5jkv} - a_{5jkv}, a_{4jkv}, a_{3jkv}$. Поместим в произвольную вершину контура начало ортонормированного базиса и рассмотрим его перемещения из исходного положения по обоим направлениям до совмещения в некотором конечном положении. Приравнявая соответствующие элементы матриц этих перемещений, получим три независимых уравнения связей в комплексной форме для определения параметров $a_{4jkv}, \alpha_{4jkv}, a_{5jkv}^0 = a_{5jkv} - a_{5jkv}$ — межосевое расстояние, $\alpha_{5jkv}^0 = \alpha_{5jkv} - \alpha_{5jkv}$ — межосевой угол, a_{4jkv}, α_{4jkv} в виде

$$\cos(\alpha_{5jkv}^0 + \epsilon a_{5jkv}^0) = \cos[(\alpha_{2hjv} + \epsilon a_{2hjv}) - (\alpha_{2jkv} + \epsilon a_{2jkv})] \sin(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) \times$$

$$\times \sin(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) + \cos(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) \cos(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv})$$

$$\cos(\alpha_{4jkv} + \epsilon a_{4jkv}) = [\cos(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) \cos(\alpha_{5jkv}^0 + \epsilon a_{5jkv}^0) -$$

$$- \cos(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv})] [\sin(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) \sin(\alpha_{5jkv}^0 + \epsilon a_{5jkv}^0)]$$

$$\sin(\alpha_{4jkv} + \epsilon a_{4jkv}) = \sin[(\alpha_{2hjv} + \epsilon a_{2hjv}) -$$

$$- (\alpha_{2jkv} + \epsilon a_{2jkv})] \sin(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) \sin^{-1}(\alpha_{5jkv}^0 + \epsilon a_{5jkv}^0)$$

$$\cos(\alpha_{4jkv} + \epsilon a_{4jkv}) = [\cos(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) -$$

$$- \cos(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) \cos(\alpha_{5jkv}^0 + \epsilon a_{5jkv}^0)] \sin^{-1}(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) \sin^{-1}(\alpha_{5jkv}^0 + \epsilon a_{5jkv}^0)$$

$$\sin(\alpha_{4jkv} + \epsilon a_{4jkv}) = \sin[(\alpha_{2hjv} + \epsilon a_{2hjv}) -$$

$$- (\alpha_{2jkv} + \epsilon a_{2jkv})] \sin(\alpha_{3jkv} + \epsilon a_{3jkv}) \sin^{-1}(\alpha_{5jkv}^0 + \epsilon a_{5jkv}^0) \quad (5)$$

Из винтового треугольника относительного движения $U_{jk}^* = U_j^* - U_k^*$ тел S_j и S_k для параметров $a_{5jkv}, \alpha_{5jkv}, a_{5jkv}, \alpha_{5jkv}$ получим

$$\operatorname{tg}(\alpha_{5jkv} + \epsilon a_{5jkv}) = (\varphi_k^* + \epsilon u_k^*) \sin(\alpha_{5jkv} + \epsilon a_{5jkv}) \times$$

$$\times [(\varphi_k^* + \epsilon u_k^*) \cos(\alpha_{5jkv} + \epsilon a_{5jkv}) - (\varphi_j^* + \epsilon u_j^*)]^{-1}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_{5jkv} + \epsilon a_{5jkv}) = (\varphi_j^* + \epsilon u_j^*) \sin(\alpha_{5jkv} + \epsilon a_{5jkv}) [(\varphi_k^* + \epsilon u_k^*) -$$

$$- (\varphi_j^* + \epsilon u_j^*) \cos(\alpha_{5jkv} + \epsilon a_{5jkv})]^{-1} \quad (6)$$

Уравнения (4) имеют место для всех m_q точек M_{jkv} , а уравнения (5), (6) — для всех μ пар p_q . Выделяя действительные и моментные части уравнений (4)–(6), получим систему $b = 12 \sum m_q + 10 \mu$ скалярных уравнений, содержащую в общем случае $c = 6n + 10 \mu + 15 \sum m_q$ ($q = 1, 2, \dots, \mu$) параметров. В частности, при $n = 2, \mu = 1, m_q = 1$ (соединение двух тел одной голономной связью) система (4)–(6) включает шесть параметров абсолютного движения j -го тела: $a_{2jkv}, \alpha_{2jkv}, a_{3jkv}, \alpha_{3jkv}, \varphi_j^*, u_j^*$; шесть параметров абсолютного движения k -го тела: $a_{2jkv}, \alpha_{2jkv}, a_{3jkv}, \alpha_{3jkv}, \varphi_k^*, u_k^*$; десять

параметров относительного движения: $a_{4jkv}, \alpha_{4jkv}, a_{5jkv}, \alpha_{5jkv}, a_{4kjh}, \alpha_{4kjh}, a_{5kjh}, \alpha_{5kjh},$
 a_{5jkh}, α_{5jkh} (все эти параметры равны для всех m_q точек пары p_{jk} и пятнадцать па-
 раметров, соответствующих каждой v -й точке M_{jkv} : $a_{6jkv}, \alpha_{6jkv}, a_{7jkv}, \alpha_{7jkv}, a_{8jkv}, \alpha_{8jkv},$
 $a_{9jkv}, \alpha_{9jkv}, k_{10jkv}, \alpha_{10jkv}, u_{kjh}, k_{8kjh}, k_{9kjh}, k_{10kjh}$. Для соединения двух тел с линей-
 ным или поверхностным касанием контактных поверхностей F_{jk} и F_{kj} при дискрет-
 ном представлении этой линии или поверхности множеством конечного числа z то-
 чек ($n=2, \mu=1, m_q=z$) получим: $b=12z+10, c=15z+22$.

Уравнения (4)–(6) описывают аналитическую модель идеальной системы твер-
 дых тел произвольной структуры. Для корректности постановки задач анализа или
 проектирования механической системы и единственности решения системы (4)–(6)
 нужно задать необходимые для ее замкнутости независимые параметры или дополни-
 тельные связи между ними. Очевидно, что число этих параметров и дополнительных
 связей составляет $g=6n+3\sum m_q$ ($q=1, 2, \dots, \mu$).

Заметим, что не любые g из c параметров в (4)–(6) являются независимыми,
 т. е. между некоторыми из них существуют связи, которые легко установить путем
 следующих рассуждений. Для параметра r_{jk} относительного движения тел S_j, S_k
 можно записать

$$r_{jk} = a_{7jkh} \operatorname{tg} \alpha_{7jkh} \quad (7)$$

а из кинематики относительного винтового движения следует

$$r_{jk} = \{ \varphi_j^2 r_j + \varphi_k^2 r_k + \varphi_j \cdot \varphi_k \cdot [a_{5jkh} \sin \alpha_{5jkh} - (r_j + r_k) \cos \alpha_{5jkh}] \} \times \\ \times (\varphi_j^2 + \varphi_k^2 - 2\varphi_j \cdot \varphi_k \cdot \cos \alpha_{5jkh})^{-1} \quad (8)$$

В этих уравнениях $r_j = u_j \cdot \varphi_j^{-1}$, $r_k = u_k \cdot \varphi_k^{-1}$ — параметры винтов абсолютных дви-
 жений тел.

Приравнявая (7) и (8), получим аналитическую связь $a_{7jkh} = f(\alpha_{7jkh}, a_{5jkh}, \alpha_{5jkh}, u_j,$
 $\varphi_j, u_k, \varphi_k)$. Следовательно, при известных $u_j, \varphi_j, u_k, \varphi_k, a_{5jkh}, \alpha_{5jkh}$ параметры
 a_{7jkh} и α_{7jkh} не могут быть заданы произвольно.

Для повышения степени адекватности и расширения области применения моде-
 ли на реальные системы тел, содержащие ошибки параметров, к параметрам моде-
 ли (4)–(6) идеальной системы тел необхо-
 димо добавить соответствующие этим ошиб-
 кам суммарные отклонения $\Sigma \varepsilon$. В резуль-
 тате получим аналитическую модель реаль-
 ной системы тел произвольной структуры,
 число уравнений которой равно числу
 уравнений модели идеальной системы, но
 число ее параметров вдвое больше, так как
 к каждому параметру добавлено отклоне-
 ние $\Sigma \varepsilon$. Суммарное отклонение в общем слу-
 чае включает ряд слагаемых, число кото-
 рых определяется степенью детализации
 описания системы тел. Отсюда следует множество аналитических моделей, описы-
 вающих реальные системы тел с различной степенью адекватности.

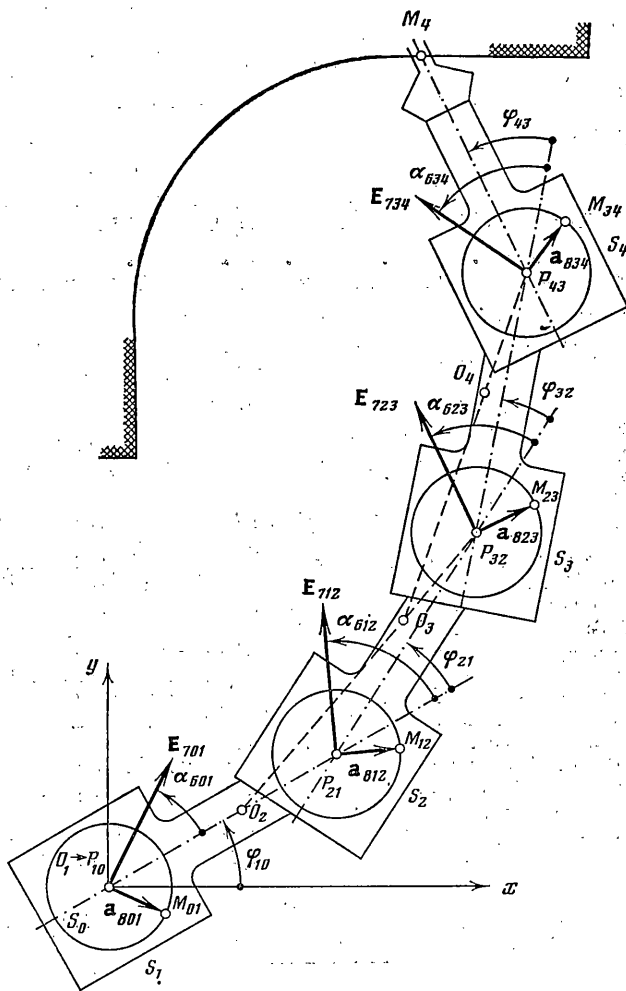
Предложенный общий формализм описания системы твердых тел произвольной
 структуры имеет высокую степень адаптивности, так как для его применения к лю-
 бой частной системе требуется лишь конкретизация задачи исследования и струк-
 туры системы. Формализм может быть применен для оптимизации с использованием
 аналитических или численных методов. Эффективность использования изложенного
 формализма для систем трех тел с точечным и линейным контактом показана в [4].

Рассмотрим задачу анализа (определения характеристик) плоской разомкнутой
 одноконтурной системы тел, ориентированный граф структуры которой показан на
 фиг. 1, а матрица инцидентий имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Система тел S_0, \dots, S_4 предназначена для реализации траектории точки M_4 тела
 S_4 в неподвижной системе O_1, x, y (фиг. 2). Она включает $\mu=4$ соединения p_{01}, \dots, p_{34}
 с цилиндрическими контактными поверхностями F_{jk}, F_{kj} . На фиг. 2 O_1, \dots, O_4 —
 мгновенные центры абсолютных скоростей, а $p_{10} \rightarrow O_1, p_{21}, \dots, p_{43}$ — мгновенные цент-
 ры скоростей относительных движений.

Аналитическая модель рассматриваемой механической системы ($n=5; \mu=4;$



Фиг. 2

$m_q=4$) в общем случае содержит 88 уравнений, включающих 130 параметров. Пусть абсолютные движения тел заданы в виде $u_k=0$, $\varphi_k = \sum \varphi_{kj}(t)$, где $\varphi_{kj}(t)$ — угловое перемещение k -го тела относительно j -го ($k=j+1$), а точка контакта M_{jk1} ($v=1$) в каждом соединении располагается на пересечении R_{jk} с вектором R_{jk} силы реакции тел в соединении p_{jk} . При этом полагаем, что R_{jk} и, следовательно, $\alpha_{6jk} = \alpha_{6kj}$ определены из кинестатического расчета.

С учетом принятых ограничений на основании фиг. 2 и модели (4)–(6) для рассматриваемой системы тел получим следующие 30 параметров абсолютных движений:

$$a_{2jk} = a_{2kj} = 0, \quad \alpha_{3jk} = \alpha_{3kj} = 0, \quad u_k^* = 0, \quad \varphi_k^* = \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_{kj}^*$$

$$\sin(\alpha_{2kj} - \alpha_{2j,j-1}) = a_{5jk}^{0-1} a_{3kj}^{-1} \sin \alpha_{4kj}$$

$$a_{3kj} = [a_{3j,j-1}^2 + (a_{5jk}^0)^2 + 2a_{3j,j-1} a_{5jk}^0 \cos \alpha_{4jk}]^{1/2} \quad (j, k=0, \dots, 4)$$

40 параметров относительных движений:

$$a_{4jk} = a_{4kj} = 0, \quad \alpha_{5jk} = \alpha_{5kj} = 0, \quad \alpha_{5jk}^0 = 0$$

$$\sin(\alpha_{4jk} - \alpha_{4j,j-1}) = l_j a_{5jk}^{-1} \sin(\varphi_{j-1,j-2} + \varphi_{j,j-1} - \alpha_{4,j-1,j})$$

$$\sin \alpha_{4kj} = a_{3j,j-1} a_{3kj}^{-1} \sin \alpha_{4jk}$$

$$a_{5jk} = O_j P_{kj} = [a_{5j,j-1}^2 + l_j^2 + 2a_{5j,j-1} l_j \cos(\varphi_{j-1,j-2} + \varphi_{j,j-1} - \alpha_{4,j-1,j})]^{1/2}$$

$$a_{5kj} = O_k P_{kj} = \varphi_j^* \varphi_k^* a_{5kj}, \quad a_{5jk}^0 = O_j O_k = \varphi_{kj}^* \varphi_k^* a_{5jk}, \quad l_j = P_{j,j-1} P_{j+1,j}$$

и 60 параметров точек контакта M_{jk} в соединениях p_{jk} :

$$a_{6jk} = a_{6kj} = 0, \quad \alpha_{6jk} = \alpha_{6kj}, \quad a_{7jk} = a_{7kj} = 0$$

$$\alpha_{7jk} = \alpha_{7kj} = 1/2\pi, \quad a_{8jk} = a_{8kj} = \rho_{jk} = \rho_{kj}$$

где ρ_{kj} , ρ_{jk} — радиусы цилиндрических контактных поверхностей; $\alpha_{8jk} = \alpha_{8kj} = 0$, $k_{8jk} = k_{8kj} = k_{9jk} = k_{9kj} = 0$, $k_{10jk} = k_{10kj} = \rho_{jk}^{-1}$,

$$v_{jk} = (\alpha_{6jk} + \alpha_{4,j-1,j} - \alpha_{4,j,j-1} + \alpha_{4jk} - \varphi_{j-1,j-2} - \varphi_{j,j-1}) \rho_{jk},$$

$$v_{kj} = (\alpha_{6kj} + \alpha_{4,j-1,j} - \alpha_{4,j,j-1} + \alpha_{4jk} - \varphi_{j-1,j-2} - \varphi_{j,j-1} - \varphi_{kj}) \rho_{kj}.$$

Из полученных выражений легко определить все критерии, необходимые для оценки данной системы. В частности, для скорости скольжения и удельного скольжения контактных поверхностей в точке M_{jkh} имеем

$$v_{jk}^{ch} = v_{jk} - v_{kj} = \varphi_{kj} \rho_{kj}, \quad \lambda_{jk} = v_{jk}^{ch} v_{jk}^{-1}$$

Отсюда получим $R_{jk} v_{jk}$ и $R_{jk} \lambda_{jk}$ — характеристики, необходимые для оценки параметров смазки в соединениях и износа контактных поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
2. Артоболевский И. И., Генкин М. Д., Сергеев В. И., Статников Р. Б., Фролов К. В. Постановка и решение задач оптимального проектирования машин. — Машиноведение, 1977, № 5, с. 15—23.
3. Ленский М. Ф. Система дифференциальных уравнений пространственной кинематической пары с голономной связью. — Прикл. механика, 1973, т. 9, вып. 4, с. 93—96.
4. Прохоров В. П., Прохорова Н. И. Об относительном движении звеньев пространственного зацепления. — Машиноведение, 1978, № 5, с. 36—41.
5. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
6. Диментберг Ф. М. Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 327 с.
7. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М.: ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1935. 330 с.
8. Кислицын С. Г. Тензорный метод в теории пространственных механизмов. Тр. семинара по теории механизмов и машин. М.: АН СССР, 1954, т. 14, вып. 54, с. 51—75.

Владимир

Поступила в редакцию
23.V.1984