

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ АППАРАТА В ПОЛЕТЕ

АЛЕКСЕЕВ К. Б., ЗЛОДЫРЕВА О. В., СИНИЛЬНИКОВ О. В.

Рассмотрены способы определения направлений главных центральных осей инерции аппарата и значений моментов инерции относительно них с использованием приложенных к аппарату пробных воздействий со стороны системы гироскопов. Указанные способы основаны на законе сохранения кинетического момента механической системы: корпус аппарата — электромеханические исполнительные органы. Показано, что решение задачи идентификации характеристик аппарата может быть упрощено при использовании информации о вероятных направлениях его главных осей инерции.

Управление вращательным движением космического аппарата с помощью бортовой цифровой вычислительной машины предполагает знание его динамических характеристик. Поскольку эти характеристики могут изменяться в процессе полета, возникает необходимость в их экспериментальном определении, что возлагает на бортовую цифровую вычислительную машину дополнительные функции.

В настоящее время известен способ определения тензора инерции с помощью пробных воздействий на аппарат со стороны двигателей-маховиков [1]. Для краткого изложения его сущности введем в рассмотрение жестко связанную с аппаратом прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами i_s ($s=1, 2, 3$), начало которой совмещено с центром масс механической системы: корпус аппарата — электромеханические исполнительные органы (двигатели-маховики). Для управления используются три двигателя-маховика, оси вращения которых, неподвижные по отношению к корпусу, совпадают с осями связанной системы координат. Обозначим кинетический момент корпуса аппарата, рассматриваемого как абсолютно твердое тело, через $K_k = I\omega$ и кинетический момент системы двигателей-маховиков через $H = I_M\Omega$, здесь $I = \|I_{ij}\|$; $i, j=1, 2, 3$ — тензор инерции корпуса аппарата при заторможенных маховиках, $\omega = \|\omega_1, \omega_2, \omega_3\|^T$ — вектор угловой скорости корпуса аппарата, $I_M = \text{diag } J_M$, где J_M — одинаковый для всех маховиков осевой момент инерции, $\Omega = \|\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\|^T$ — результирующий вектор угловой скорости маховиков относительно корпуса. Физической основой данного способа является закон сохранения кинетического момента K механической системы: корпус аппарата — электромеханические исполнительные органы (двигатель-маховики) (T — время управления) $K(t) = K_k(t) + H(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Организация пробных воздействий осуществляется последовательным разгоном каждого маховика до заданной угловой скорости и последующим торможением до нулевой скорости. Измерение угловых скоростей аппарата и маховиков осуществляется при помощи датчиков. В результате проведения трех экспериментов ($j=1, 2, 3$) составляем матричное уравнение $I\omega = -H_d$, $\omega = \|\omega_{ij}\|$ ($i=1, 2, 3$), $H_d = \text{diag } H$, из которого имеем $I = -H_d\omega^{-1}$.

Полученное матричное уравнение позволяет определить тензор инерции аппарата в связанной с ним системе координат по формулам

$$J_{jk} = -\frac{H}{\omega_j \omega_k N_{jk}} \left(\alpha_i - \frac{\alpha_j \alpha_k}{\omega_i} \right), \quad J_{jj} = \frac{H}{\omega_i N_{jj}} \left(1 - \frac{\alpha_i^2}{\omega_j \omega_k} \right)$$

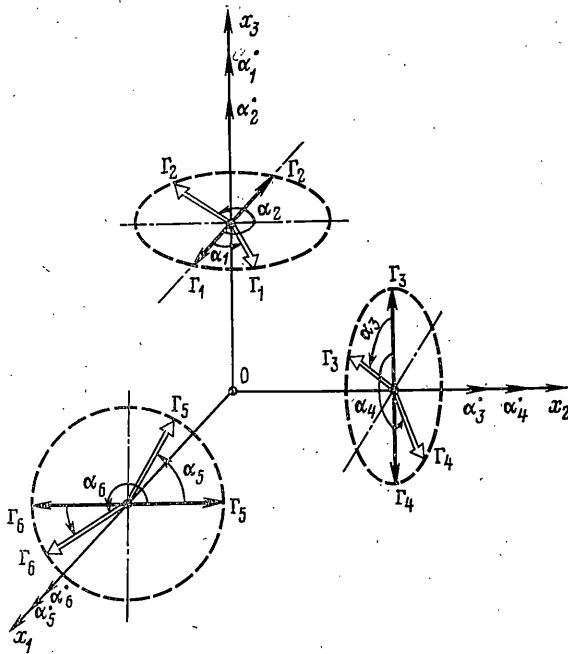
$$N_{jk} = 1 + 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} - \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2}{\omega_j \omega_k}$$

$$i, j, k=1, 2, 3; \quad i \neq j \neq k, \quad \omega_i = \omega_{ii}, \quad \alpha_i = \omega_{i2} = \omega_{21}$$

$$\alpha_2 = \omega_{13} = \omega_{31}, \quad \alpha_3 = \omega_{23} = \omega_{32}, \quad N_{jj} = N_{jk} \quad (j=k)$$

Во избежание накопления абсолютной ошибки приложении пробных воздействий к корпусу желательно производить при нулевых значениях абсолютной угловой скорости корпуса аппарата.

В последние годы широкое применение в качестве исполнительных органов систем ориентации получили силовые двухстепенные гироскопы (гиросины). Поэтому представляет практический интерес рассмотрение применения их для идентификации динамических параметров аппарата. При этом будем исходить из принятой выше модели аппарата и сохраним принятые ранее обозначения. Гироскопические исполнительные органы представляют собой избыточную кратную систему гироскопов, состоящую из трех коллинеарных групп, каждая из которых включает по два гироскопа, оси подвеса которых попарно параллельны осям связанной системы координат (фиг. 1). Предполагается, что система гироскопов, расположенная известным образом по отношению к системе координат $Ox_1x_2x_3$, имеет суммарный начальный кинетический момент, равный нулю. Организация пробных воздействий осуществляется изменением суммарного вектора кинетического момента системы гироскопов в произвольном направлении. Свяжем с этим направлением единичный вектор e_H (фиг. 2) аппарат приобретает угловую скорость ω , проекция которой на связанные оси ω_i ($i=1, 2, 3$) измеряются, что позволяет определить направление вектора этой скорости, которое задаем ортом e_{ω^i} , где верхний индекс соответствует номеру экспе-



Фиг. 1.

риента. В общем случае орты e_{ω}^r и e_H^r не совпадают, причем угол между ними $\sigma^r = \arccos(e_H^r \cdot e_{\omega}^r)$. Затем в плоскости, определяемой векторами e_H^r и e_{ω}^r под углом $\delta^{r+1} = \sigma^r/n$ к вектору e_H^r (фиг. 2), где n – положительное число, представляющее собой шаг итерации, создается кинетический момент величины H , направление которого задается ортом e_H^{r+1} , и также измеряется угловая скорость аппарата. Ее направление теперь будет задаваться ортом e_{ω}^{r+1} . Угол σ^{r+1} между e_H^{r+1} и e_{ω}^{r+1} определяется по аналогии с предыдущим шагом. Если $\sigma^{r+1} > \sigma^r$, то в плоскости $e_{\omega}^{r+1} O e_H^{r+1}$ создается кинетический момент H , направление которого задается вектором e_H^{r+2} , который составляет с ортом e_H^{r+1} угол $\delta^{r+2} = \sigma^{r+1}/n$, причем последний откладывается в сторону, противоположную той, в которую откладывался угол δ^{r+1} в плоскости $e_H^r O e_{\omega}^r$. Если же $\sigma^{r+1} < \sigma^r$, то угол δ^{r+2} откладывается в том же направлении, что и угол δ^{r+1} , только в другой плоскости. Процесс повторяется до тех пор пока вектора e_H^{r+1} и e_{ω}^{r+1} не совместятся с заданной наперед точностью. На каждом шаге итерационного процесса m ($r \leq m \leq r+l$) вектор e_H^m определяется из уравнения плоскости $[e_{\omega}^{m-1} \times e_H^{m-1}] \cdot e_H^m = 0$, из выражения, определяющего угол между векторами e_H^m , e_{ω}^{m-1}

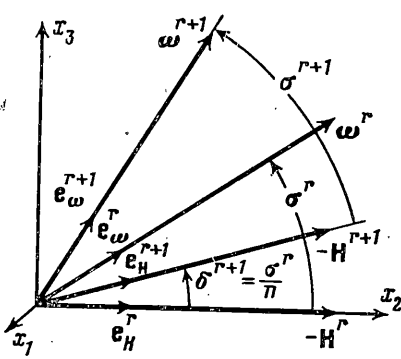
$$e_H^m \cdot e_{\omega}^{m-1} = \cos(\sigma^{m-1} \pm \delta^m)$$

и очевидного кинематического равенства (при $e_H^m = \sum_{s=1}^3 \alpha_s^m e_s$):

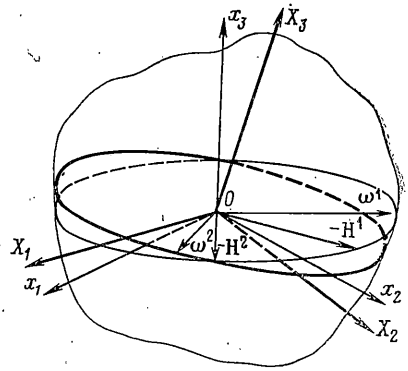
$$(\alpha_1^m)^2 + (\alpha_2^m)^2 + (\alpha_3^m)^2 = 1$$

Полученная система трех уравнений сводится к квадратному уравнению, записанному относительно одной из проекций орта e_H^m на i -ю ось связанной системы координат. Это означает, что в плоскости, определяемой векторами e_H^{m-1} и e_{ω}^{m-1} , можно под углом δ^m к вектору e_H^{m-1} провести два вектора e_H^m . Рассмотренный алгоритм позволяет выбрать вектор e_H^m , приводящий к уменьшению угла между векторами e_H^m и e_{ω}^m . Из приведенной процедуры следует, что выбор направления первого шага $\delta^{r+1} = \sigma^r/n$ принципиального значения не имеет. За условие совмещения векторов e_H^{r+l} , e_{ω}^{r+l} принимается $|e_H^{r+l} \times e_{\omega}^{r+l}| \leq \varepsilon$, в котором

ε – устанавливаемая точность совмещения векторов e_H^{r+l} и e_{ω}^{r+l} . Цифровое моде-



Фиг. 2



Фиг. 3

лирование показало, что данный алгоритм сходится и его работа характеризуется признаками, которые следуют из основных положений механики твердого тела: по мере приближения направления пробного воздействия к главной центральной оси инерции тела с наименьшим значением момента инерции энергия, потребляемая исполнительным органом, уменьшается и на этой оси достигается минимального значения, а кинетическая энергия корпуса аппарата при этом увеличивается; по мере приближения направления вектора пробного воздействия к главной центральной оси инерции тела с наибольшим значением момента инерции имеют место обратные соотношения.

Простота расчетного алгоритма в данном случае связана со значительными трудностями его технического осуществления ввиду большого количества итераций и необходимостью задействования для каждого пробного воздействия всех гидродинамических систем. Эти трудности можно обойти используя априорную информацию о динамической асимметрии аппарата. Как правило, дифференциальные уравнения, описывающие его поведение в динамике, известны вплоть до приближенных значений моментов инерции. Данное обстоятельство часто сводит задачу идентификации к уточнению текущих значений моментов инерции. Поэтому для случаев незначительных вариаций моментов инерции можно предложить более простой способ: с помощью системы гидродинамов создавать изменение вектора кинетического момента \mathbf{H} в координатной плоскости, например x_1Ox_2 (Фиг. 3), в окрестности которой вероятно расположение осей с минимальным и максимальным значениями моментов инерции. При этом одновременно производятся измерения угловых скоростей корпуса аппарата по связанным осям ω_i ($i=1, 2, 3$). Тогда фиксирование положений вектора \mathbf{H} с максимальным и минимальным значениями модуля угловой скорости аппарата будет определять проекции на выбранную координатную плоскость направлений осей главных центральных моментов инерции аппарата. Очевидно, что при вращении вектора \mathbf{H} из зафиксированных положений в плоскостях, перпендикулярных координатной, в направлении знаков соответствующих (перпендикулярных первоначально выбранной координатной плоскости) значений скоростей аппарата в результате поиска экстремальных значений модулей угловых скоростей будут получены направления искомого главных центральных осей инерции аппарата в жестко связанной с ним системе координат и значения соответствующих им главных центральных моментов инерции

$$J_k = \sqrt{\sum_{i=1}^3 H_i^2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^3 \omega_i^2} \right)^{-1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

(k — номер соответствующей главной центральной оси инерции аппарата). Зная две оси, из условия правосторонности прямоугольной системы нетрудно определить направление и третьей искомой оси, а вычисление соответствующего ей момента инерции произвести расчетным путем. Для этого составим систему трех уравнений, записанных в системе координат $OX_1X_2X_3$, образуемой главными центральными осями инерции, на основании проведения одного эксперимента создания кинетического момента величины H по одной из связанных осей и измерения соответствующих значений проекций ω_i ($i=1, 2, 3$) угловой скорости аппарата ω на связанные оси, которая в матричном виде представляется следующим образом (знак «минус» опущен):

$$A\mathbf{H} = I_x A \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

в котором $A = \|a_{ij}\|$ — матрица направляющих косинусов ($i, j=1, 2, 3$). Из этой системы имеем

$$a_{11}H = J_1(a_{11}\omega_1^{(1)} + a_{12}\omega_2^{(1)} + a_{13}\omega_3^{(1)})$$

$$a_{21}H = J_2(a_{21}\omega_1^{(1)} + a_{22}\omega_2^{(1)} + a_{23}\omega_3^{(1)})$$

$$a_{31}H = J_3(a_{31}\omega_1^{(1)} + a_{32}\omega_2^{(1)} + a_{33}\omega_3^{(1)})$$

Здесь верхний индекс (1) при ω_i означает, что это значения скоростей при создании кинетического момента по оси Ox_1 . Из записанной системы уравнений очевидно, что значение любого главного центрального момента инерции J_k ($k=1, 2, 3$) может быть определено расчетным путем при уже известной матрице направляющих косинусов A и значений ω_i одного эксперимента по формуле

$$J_k = a_{k1}H / (a_{k1}\omega_1^{(1)} + a_{k2}\omega_2^{(1)} + a_{k3}\omega_3^{(1)})$$

Вращение вектора кинетического момента в координатной плоскости можно осуществить при помощи системы гиродинов с осями подвеса попарно параллельными осям жестко связанной с аппаратом системы координат (фиг. 1). Предложенный алгоритм может быть реализован и в другом виде. Например, можно поддерживать постоянной величину угловой скорости аппарата и искать экстремальные значения потребляемой при этом исполнительными органами мощности на борту аппарата, что вполне осуществимо при измерении тока и напряжения от источника питания, а их произведение даст затрачиваемую работу. При этом, очевидно, целесообразно измерять приращения указанных величин, а не сами эти величины.

На основании тех же положений может быть предложен еще один — третий расчетно-экспериментальный алгоритм идентификации, заключающийся в численном решении на бортовую цифровую вычислительную машину нелинейной системы 12 уравнений, первые шесть из которых имеют вид (1) и составляют на основании проведения двух экспериментов создания пробных воздействий величины H_j по двум любым связанным осям и измерения при этом соответствующих значений угловых скоростей корпуса аппарата ω_i^j ($i=1, 2, 3; j=1, 2$), а вторые шесть уравнений представляют собой известные соотношения ортогональности элементов матрицы направляющих косинусов A . В результате численного решения этой системы уравнений методом Ньютона — Рафсона получаются девять значений направляющих косинусов и три значения главных центральных моментов инерции.

Сравнение трех способов идентификации проводилось для матрицы моментов инерции

$$I = \| J_{ij} \| = \begin{vmatrix} 100 & -8 & -10 \\ -8 & 120 & -6 \\ -10 & -6 & 160 \end{vmatrix}$$

и следующих значений основных параметров: $\varepsilon=0,001$; $n=2$; $H=10$ Нмс.

В результате получены значения для первого алгоритма

$$I_x = \begin{vmatrix} 95,1749 & 0 & 0 \\ 0 & 122,676 & 0 \\ 0 & 0 & 162,149 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} X_1 = \{ 0,9242; & 0,3399; & 0,1740; \} \\ X_2 = \{ -0,3538; & 0,9337; & 0,05528; \} \\ X_3 = \{ -0,1437; & -0,1127; & 0,9832; \} \end{matrix}$$

Ошибка по первому инварианту матрицы моментов инерции составляет 0,00002%.

Для второго алгоритма ошибка по первому инварианту составляет 0,00323%. Минимальное значение энергии аппарата равно 0,308 Дж, а максимальное — 0,525 Дж. Значения главных центральных моментов инерции отличаются от значений, полученных по первому алгоритму на 0,0134; 0,0212; 0,0006% соответственно. А направления главных центральных осей инерции аппарата различаются на величину примерно 1,25 град. или 0,0218 рад.

Для третьего алгоритма ошибка по первому инварианту составляет 0,0025%. А направления главных центральных осей инерции аппарата отличаются от найденных по первому алгоритму на величину порядка 1 град.

Из проведенного сравнения видно, что все рассмотренные алгоритмы идентификации близки по обеспечиваемым точностным показателям, но второй более прост по сравнению с первым при практической реализации. Третий алгоритм отличается простотой организации пробных воздействий, но требует большого числа сложных расчетных операций по сравнению с двумя другими способами.

Сравнение предложенных способов идентификации с известным [1] показывает, что все они обеспечивают одинаковую точность определения значений моментов инерции при равном числе экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Г. М., Алексеев К. Б., Киселев М. И. Об определении тензора инерции космического аппарата в полете. — Космич. исследования, 1978, т. 16, № 3, с. 456—459.

Москва

Поступила в редакцию
3.V.1984