МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 534.1

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА АКТИВНЫХ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ

НИКОЛЬСКИЙ В. А.

Устанавливается понятие $K(E)$-преобразования для случайных функций непрерывного времени с известными вероятностными характеристиками (математическими ожиданиями и автокорреляционными функциями). Рассматривается применение данного оператора для синтеза виброзащитных систем. Синтез связан с определением $K(E)$-фильтров, которые удовлетворяют требованиям конечного времени переходного процесса, несмещенности фильтрации, физической реализуемости. При соблюдении предыдущих условий обеспечивается минимальное значение дисперсии статистической ошибки фильтрации в установившемся режиме.

В настоящее время широкое распространение получают системы активной виброзащиты. В реальных условиях работы системы активной виброзащиты подвержены действию случайных возбуждений. Поэтому возникает задача их проектирования с учетом стохастического характера изменения воздействий. В [1, 2] аналитическое конструирование систем активной виброзащиты сводится к задаче определения оптимального линейного фильтра. Синтез фильтра связан с решением интегрального уравнения Винера – Хопфа. Решение данного уравнения является непростой задачей. Кроме того, возникают затруднения с условиями реализуемости.

Другим возможным подходом к синтезу линейных виброзащитных систем может служить применение $K(D)$- и $K(E)$-преобразований. Использование оператора $K(D)$ ограничено непрерывными воздействиями [3]. Метод $K(E)$-преобразования разработан главным образом для фильтрации возмущений в системах с дискретным временем [4]. Примечательной особенностью метода является то, что синтез сводится к выполнению алгебраических операций. В этой связи представляет практический интерес расширение области применения $K(E)$-преобразования для систем с непрерывным временем. В [5] устанавливается понятие $K(E)$-преобразования для воздействий, представляющих собой амплитудно-модулированные последовательности импульсов конечной длительности и определенной формы. В публикуемой статье рассматриваются случайные возбуждения, которые могут быть как непрерывными, так и импульсными функциями времени.

Теоретической основой $K(E)$-преобразования для математических ожиданий $\varphi(t)$ является общее свойство их представимости решениями линейных однородных разностных уравнений вида $K(E)\varphi(t)=0$ $(E\varphi(t)\equiv\varphi(t+T))$, где $K(E)$ – многочлен от оператора сдвига E с постоянными коэффициентами. Для вибраций $\varphi(t)$, представляющих собой центрированный эргодический стационарный (в широком смысле) случайный процесс, оператор $K(E)$ определяется при нахождении прогнозного значения $\varphi(t+T)$ $(T>0)$ на основе информации о процессе, предшествующем моменту t и заданном на конечном интервале. При этом используются результаты, полученные ранее для дискретных случайных функций [4]. Решение задачи синтеза системы активной виброзащиты сводится к нахождению $K(E)$-фильтров, которые характеризуются конечным временем переходного процесса, несмещенностью фильтрации, физической реализуемостью. При соблюдении предыдущих условий обеспечивается минимальное значение дисперсии статистической ошибки фильтрации в установившемся режиме.

В тех случаях, когда вибрации содержат кроме непрерывной импульсную компоненту, возможно совместное использование $K(E)$- и $K(D)$-преобразований. Тип оператора и их сочетание устанавливается видом внешнего воздействия, а также соображениями простоты технической реализации и аналитического исследования.

Таким образом, в основе развиваемого в статье операторного метода синтеза активных виброзащитных систем лежит $K(E)$-преобразование.

1. $K(E)$-преобразование функций. Рассмотрим предварительно понятие $K(E)$-преобразования для детерминированных функций (математических ожиданий). Для широкого класса внешних воздействий можно записать

$$\varphi(t)=f(t)q(t) \tag{1.1}$$

где закон изменения $f(t)$ считается известным, $q(t)$ – произвольная T-периодическая функция. Вид оператора $K(E)$ определяется при этом однородным разностным уравнением с непрерывным аргументом, решением которого является функция $\varphi(t)$.

Обратимся к уравнению ($L[\varphi(t)]$ — линейный разностный оператор)

$$L[\varphi(t)]=\sum_{k=0}^{m} a_k\varphi(t+kT)=0 \qquad (a_0, a_m\neq 0) \tag{1.2}$$

Допустим, что $f(t)$ — некоторое решение уравнения (1.2). Тогда выражение (1.1) также удовлетворяет этому решению. Действительно: $L[\varphi(t)]=q(t)L[f(t)]=0$, что и требовалось.

Введем оператор сдвига $e^{TD}\psi(t)\overset{\text{def}}{=}\psi(t+T)$, где $D=d/dt$ — оператор дифференцирования. Для сокращения записи обозначим $E=e^{TD}$. При этом соотношение (1.2) примет вид

$$K(E)\varphi(t)=0 \tag{1.3}$$

$$K(E)=a_mE^m+a_{m-1}E^{m-1}+\ldots+a_1E+a_0$$

Представление уравнения (1.2) в компактном виде (1.3) имеет важное прикладное значение. Оно указывает на существование линейного оператора $K(E)\neq 0$, для которого $K(E)\varphi(t)=0$. Это свойство оператора положено в последующем в основу синтеза систем активной виброзащиты с нулевой ошибкой управления в установившемся режиме. Многочлен $K(E)$ будем называть аннулирующим оператором или $K(E)$-преобразованием функции $\varphi(t)$.

Значения $K(E)$-преобразований для типовых воздействий приведены ниже ($q(t)$ — произвольная T-периодическая функция, $a^0=e^{\alpha T}$, $\alpha>0$, $b=\cos\beta T$):

$q(t)$	$E-1$
$q(t)e^{\alpha t}$	$E-a^0$
$q(t)t$	$(E-1)^2$
$q(t)t^2$	$(E-1)^3$
$q(t)\sin\beta T$	$E^2-2bE+1$

Допустим теперь, что $\varphi(t)$ — непрерывная эргодическая стационарная случайная функция. Разобьем $\varphi(t)$ на участки ограниченной длительности T. Начало участка соответствует nT, конец — $(n+1)T$, где n — целые числа. Изменения $\varphi(t)$ в пределах каждого участка представим функцией $\varphi(nT+\varepsilon T)$ $(0\leqslant\varepsilon\leqslant 1)$. Для каждого локального времени $\varepsilon^\circ T$ получаем дискретный случайный процесс $\varphi[nT+\varepsilon^\circ T]$. В силу инвариантности вероятностных характеристик стационарного процесса относительно сдвига значения автокорреляционной функции при различных значениях параметра ε одинаковы. Это позволяет при отыскании $K(E)$-преобразования для непрерывного стационарного случайного процесса использовать известные результаты для случайных дискретных функций [4]. Тогда для оператора $K(E)$ можно записать

$$K(E)=1-\sum_{k=1}^{l} b_kE^{-k} \tag{1.4}$$

Коэффициенты b_k находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{l} b_i r[(k-i)T]=r[kT] \qquad (k=1,\ldots,l) \tag{1.5}$$

где $r[kT]$ — автокорреляционная функция.

В отличие от дискретных процессов, E^{-1} в (1.4) представляет собой оператор непрерывного запаздывания. Значения $K(E)$-преобразований стационарных случайных воздействий с типовыми корреляционными функциями приведены ниже ($\delta(\omega)$ — дельта-функция):

$r(\tau)$	$K(E)$	$S(\omega)$
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$E-a$	$2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$
$^1/_2 A^2\cos\beta\tau$	$E^2-2bE+1$	$\pi A^2/2\,[\delta(\omega-\beta)+\delta(\omega+\beta)]$
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\cos\beta\tau$	$E^2+l_1E+l_2$	$\dfrac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\omega^2\beta^2}$
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}(1+\alpha\lvert\tau\rvert)$	$E^2+m_1E+m_2$	$4\alpha^3/(\alpha^2+\omega^2)^2$
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\cos\beta\tau+\dfrac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\cdot\sin\beta\lvert\tau\rvert$	$E^2+n_1E+n_2$	$\dfrac{4\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$

$$l_1=\frac{ab[(2b^2-1)a^2-1]}{1-a^2b^2},\qquad l_2=\frac{a^2d^2}{1-a^2b^2}$$

$$m_1=\frac{a(1+c)[(1+2c)a^2-1]}{1-a^2(1+c)^2},\qquad m_2=\frac{a^2c^2}{1-a^2(1+c)^2}$$

$$n_1=\frac{a(b+\alpha d/\beta)[2a^2b(b+\alpha d/\beta)-a^2-1]}{1-a^2(b+\alpha d/\beta)^2}$$

$$n_2=\frac{a^2[1-b^2+(\alpha d/\beta)^2]}{1-a^2(b+\alpha d/\beta)^2},\qquad c=\alpha T,\qquad t=\sin\beta T$$

Иногда на практике случайные вибрационные воздействия носят импульсный характер. При этом в (1.1) $f(t)$ — непрерывный стационарный случайный процесс с автокорреляционной функцией $r_f(\tau)$, $q(t)$ — T-периодическая последовательность импульсов произвольной формы длительности h. Применяя к (1.1) операцию математического ожидания, получим

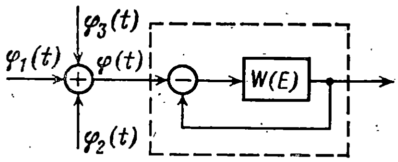
$$r_\varphi(\tau,t)=q(t)\,q(t+\tau)\,r_f(\tau) \tag{1.6}$$

Положим $q(t)=H(t)$, где $H(t)$ — последовательность прямоугольных импульсов единичной амплитуды, длительности h и периода следования T. Разложим функцию $H(t)$ в ряд Фурье и ограничимся в разложении двумя первыми членами. Тогда, после усреднения (1.6) по времени, найдем

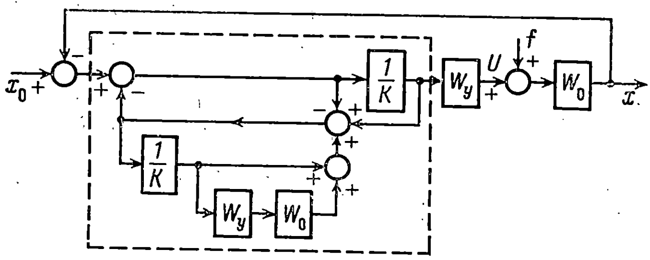
$$\langle r_\varphi(\tau,t)\rangle=\left(\frac{h^2}{T^2}+\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi h}{T}\cos\frac{2\pi}{T}\tau\right)r_f(\tau)$$

Выполнив стационаризацию импульсного случайного процесса, значение $K(E)$-преобразования определяется в соответствии с (1.4) и (1.5).

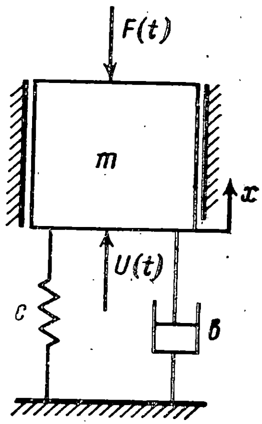
2. $K(E)$-фильтры. Возмущения, действующие на виброзащитную систему, обычно нельзя представить в виде аддитивной связи полезного сигнала и помехи. Все компоненты динамических воздействий должны быть отфильтрованы системой. Поэтому классическая задача фильтрации, связанная с выделением полезного сигнала на фоне помехи, как правило, при синтезе систем активной виброзащиты не возникает. Однако имеется несколько классов виброзащитных устройств, для которых проблема фильтрации является актуальной. Примером могут служить системы виброзащиты приборов, предназначенных для измерения тех или иных параметров движения оснований, на которых они установлены [2]. Поэтому рассмотрим методику синтеза передаточной функции системы активной виброзащиты ($K(E)$-фильтра), учитывающую более общую постановку задачи. Потребуем от системы виброзащиты выполнение следующих условий: конечное время переходного процесса; нулевое отклонение объекта виброзащиты в установившемся (вынужденном) режиме, вызываемое детерминированными компонентами воздействий; минимальное установившееся значение дисперсии статистической ошибки фильтрации. Все эти требования не противоречивы и могут быть осуществлены при синтезе фильтров (виброзащитных систем) путем объединения установ-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ленных свойств $K(E)$-преобразования и условий конечной длительности переходного процесса [4]. Фильтры, удовлетворяющие перечисленным требованиям, будем называть $K(E)$-фильтрами.

Структурная схема $K(E)$-фильтра приведена на фиг. 1. Как видно из схемы, фильтр представляет собой следящее устройство. Не нарушая общности, примем, что на вход поступает воздействие, состоящее из трех компонент: $\varphi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\varphi_3(t)$, где $\varphi_1(t)$ — центрированный стационарный случайный полезный сигнал, имеющий $K(E)$-преобразование вида $K_{\varphi_1}(E)$, $\varphi_2(t)$ — детерминированная составляющая полезного сигнала, для которой установлен оператор $K_{\varphi_2}(E)$, $\varphi_3(t)$ — центрированная стационарная шумовая компонента с оператором $K_{\varphi_3}(E)$. Передаточная функция $W(E)$ имеет вид

$$W(E)=K_{\varphi_3}(E)M_1(E)/[K_{\varphi_1}(E)K_{\varphi_2}(E)M_2(E)] \tag{2.1}$$

В выражении (2.1) операторы $K_{\varphi_1}(E)$ и $K_{\varphi_2}(E)$ вводятся в $W(E)$ для воспроизведения на выходе следящей системы полезного воздействия; оператор $K_{\varphi_3}(E)$ включен для сглаживания шумовой компоненты. Сомножитель

$$\frac{M_1(E)}{M_2(E)}=\frac{b_sE^s+b_{s-1}E^{s-1}+\ldots+b_1E+b_0}{E^r+a_{r-1}E^{r-1}+\ldots+a_1E+a_0}$$

служит для выполнения условий конечной длительности переходного процесса.

Пусть i, j и k — порядки операторов $K_{\varphi_1}(E)$, $K_{\varphi_2}(E)$ и $K_{\varphi_3}(E)$. Тогда при $i+j\leqslant k$ степень оператора $M_1(E)$ равна $s=i+j-1$, а оператора $M_2(E)$ — $r=s+k-1$. При $i+j>k$ соответственно имеем $s=i+j-1$, а $r=s+k-1$. Искомый оператор фильтра определяется соотношением

$$\Phi(E)=W(E)/(1+W(E)) \tag{2.2}$$

Важным частным случаем является синтез фильтра при отсутствии воздействий $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. При этом операторы $K(E^{-1})$ определяют оптимальную передаточную функцию систем активной виброзащиты, имеющих минимальное значение времени переходного процесса и дисперсии ошибки фильтрации в установившемся режиме. Системы, обладающие перечисленными свойствами, будем называть минимальными прототипами.

$K(E)$-фильтры для вибраций с некоторыми типовыми корреляционными функциями приведены ниже (σ^2 — дисперсия ошибки фильтрации, $a=e^{-\alpha T}$, $\alpha>0$):

$r(\tau)$	$K(E^{-1})$	σ^2
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$1-aE^{-1}$	$1-a^2$
$^1/_2 A^2\cos\beta\tau$	$1-2bE^{-1}+E^{-2}$	0
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\cos\beta\tau$	$1+l_1E^{-1}+l_2E^{-2}$	$\dfrac{1-2a^2b^2+a^4(2b^2-1)}{1-a^2b^2}$
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}(1+\alpha\lvert\tau\rvert)$	$1+m_1E^{-1}+m_2E^{-2}$	$\varkappa_1$
$\varkappa_2$	$1+n_1E^{-1}+n_2E^{-2}$	$\varkappa_3$

$$\varkappa_1=\frac{1-2a^2(1+c)^2+a^4(4c^3+6c^2+4c+1)}{1-a^2(1+c)^2}$$

$$\varkappa_2=e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau+\alpha/\beta e^{-\alpha|\tau|}\sin\beta|\tau|$$

$$\varkappa_3=1+\frac{a^2(b+\alpha d/\beta)^2[2a^2b(b+\alpha d/\beta)-a^2-1]}{1-a^2(b+\alpha d/\beta)^2}+$$
$$+\frac{a^4[1-b^2(\alpha d/\beta)^2](2b^2-1+2\alpha db/\beta)}{1-a^2(b+\alpha d/\beta)^2}$$

В реальных системах данные фильтры реализуются на основе элементов запаздывания.

Применение $K(E)$-фильтров внутри замкнутых систем управления показано на фиг. 2, где приняты следующие обозначения: W_0, W_y — передаточные функции объекта и управляющего устройства, W_k — оператор корректирующего фильтра, для которого

$$W_k=(W_0W_y+K-1)/(W_0W_yK) \tag{2.3}$$

Передаточная функция для возмущения

$$\Phi=KW_0/(1+W_0W_y) \tag{2.4}$$

Подобную структурную схему можно поставить в соответствие достаточно широкому классу активных виброзащитных систем.

3. *Пример*. Применим полученные соотношения для синтеза системы активной виброзащиты объекта массы m с одной степенью свободы, связанного с основанием упругим элементом жесткостью c и демпфером с коэффициентом сопротивления b (фиг. 3). Предположим, что к объекту приложено силовое возбуждение $F(t)$, содержащее две компоненты: детерминированную $F_1(t)=AH(t)$, $A=\mathrm{const}$ и случайную $F_2(t)$ со спектральной плотностью мощности $S(\omega)=2\alpha\sigma^2/(\alpha^2+\omega^2)$. Определим закон изменения управления $U(t)$, при котором абсолютное перемещение $x(t)$, вызываемое воздействием $F_1(t)$ в установившемся режиме, равно нулю и осуществляется фильтрация стационарной случайной составляющей $F_2(t)$. Для простоты будем считать, что $x_0=0$, $W_y(D)=k_y$. Передаточная функция объекта $W_0(D)=(mD^2+bD+c)^{-1}$. Из [3] и п. 1 имеем $K(D,E)=(D+\alpha)(E-1)$. Согласно структурной схеме (фиг. 2), управление $U(t)$ определяется соотношением

$$U(t)=-\frac{W_0(D)W_y(D)-K(D,E)+1}{W_0(D)K(D,E)}x(t) \tag{3.1}$$

Покажем, что управление (3.1) удовлетворяет сформулированным требованиям. Из выражения (2.4) имеем

$$(mD^2+bD+c+k_y)x(t)=(D+\alpha)(E-1)F_1(t) \tag{3.2}$$

Применяя к (3.2) преобразование Лапласа, получим

$$(ms^2+bs+c+k_y)sx(s)=A(s+\alpha)[e^{Ts}-\exp((T-h)s)] \tag{3.3}$$

Перепишем уравнение (3.3) в виде

$$(T_0s^2+2\zeta T_0s+1)sx(s)=k(s+\alpha)[e^{Ts}-\exp((T-h)s)] \tag{3.4}$$

$$k=A/(k_y+c),\ \zeta=b/2\sqrt{m(k_y+c)},\ T_0=\sqrt{m/(k_y+c)}$$

Примем для определенности $\zeta=1$. Переходя от (3.4) к оригиналу, получим $x(t)=e^{-t/T_0}[ke^{-T/T_0}(t+T)/T_0^2-\alpha ke^{-T/T_0}(t+T+T_0)/T_0+\alpha k\exp((h-T)/T_0)(t-h+T+T_0)/$ $/T_0-k\exp((h-T)/T_0)(t+T-h)/T_0^2$. Отсюда установившееся значение выхода системы будет

$$x_* = \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{3.5}$$

Найдем спектральную плотность для случайной составляющей выходной величины системы активной виброзащиты $S_x(\omega)=\Phi(j\omega)\Phi(-j\omega)S_f(\omega)=2k^2\alpha(1-\cos\omega T)/$ $/(1+T_0^2\omega^2)^2$.

Тогда дисперсия выхода системы будет определяться выражением

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_x(\omega)\,d\omega = 0{,}5\alpha\sigma^2\frac{k^2}{T_0}\left(1-\frac{T}{T_0}e^{-T/T_0}-e^{-T/T_0}\right) \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.5) и (3.6) непосредственно следует эффективность управления по закону (3.1).

Отметим, что когда вибрации носят случайный характер и не содержат импульсной компоненты, параметр T следует считать варьируемым. При этом его величину целесообразно выбирать из условия соответствия дисперсии ошибки фильтрации желаемому значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фролов К. В., Фурман Ф. А.* Прикладная теория виброзащитных систем. М.: Машиностроение, 1980. 279 с.
2. *Коловский М. З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 319 с.
3. *Уланов Г. М.* Оптимизация систем автоматического регулирования и теория $K(D)$-изображений.— Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 6, с. 1249–1250.
4. *Никольский В. А., Севастьянов Н. П.* Метод фильтрации в дискретных системах на основе $K(E)$-преобразования.— В кн.: Теория инвариантности и ее применение. Тр. V Всес. совещ. Киев: Наук. думка, 1979, ч. 1, с. 337–346.
5. *Никольский В. А.* Компенсация импульсных возмущений в линейных динамических системах.— Машиноведение, 1982, № 3, с. 12–16.

Рига

Поступила в редакцию
4.I.1985