МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИБРАЦИОННОГО МЕХАНИЗМА С ИНЕРЦИОННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

НГУЕН ЧЫОНГ

Рассматривается плоскопараллельное движение вибрационного механизма, состоящего из абсолютно твердой виброизолированной платформы, на которой расположен дебалансный двухвальный вибровозбудитель направленного действия [1]. Решается задача об устойчивости стационарных колебаний механизма с поступательным движением платформы. Изложена общая процедура исследования устойчивости. Получена формула для вычисления характеристических показателей и определена область устойчивости для случая, когда некоторые из характеристических чисел принимают критические значения. Доказана неустойчивость рассматриваемого стационарного режима для случая, когда частота возбуждения равна удвоенному значению одной из собственных частот колебаний системы. Определена область значений параметров, где рассматриваемый режим устойчив. Вопросы, связанные с расчетом параметров вибрационного механизма, обеспечивающих стационарный режим колебаний с поступательным движением платформы, изучались в [2].

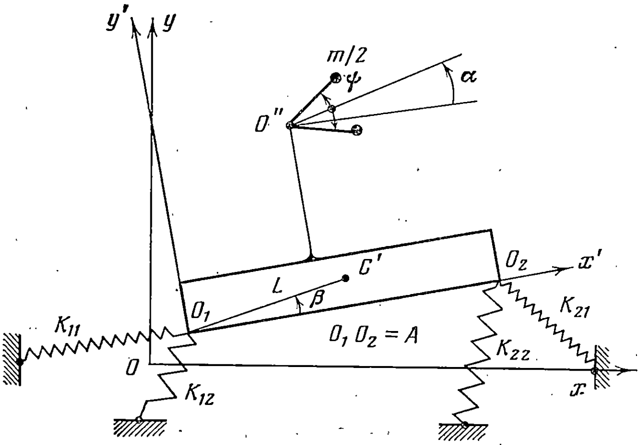
1. Рассматривается плоскопараллельное движение абсолютно твердой платформы, на которой расположен дебалансный двухвальный возбудитель направленного действия [1]. Платформа связана с неподвижным основанием посредством упругих элементов (пружин) с линейной характеристикой. Ось вращения роторов вибровозбудителя перпендикулярна плоскости движения. Введем инерциальную систему координат Oxy и подвижную систему $O_1x'y'$, связанную с платформой; ось O_1x' проходит через точки O_1, O_2 крепления пружин к платформе (фигура). Оси Ox, Oy направлены соответственно по гроизонтали и вертикали. Обе системы координат совпадают в положении платформы, отвечающем недеформированному состоянию всех пружин.

Обозначим через x, y координаты точки O_1 в системе координат Oxy; ξ, η и a, b — координаты соответственно центра масс C' платформы и центра вращения O'' роторов в системе координат $O_1x'y'$; φ — угол поворота платформы; α — направление возбуждающей силы относительно оси O_1x'; $\pm\psi$ — углы поворота роторов (дебалансов), синхронно вращающихся в противоположные стороны; $m/2$ — масса каждого ротора, l — расстояние от центров масс дебалансов до оси вращения; $\omega=\text{const}$ — угловая скорость вращения дебалансов; $A=|O_1, O_2|$ — длина платформы; M_* — масса платформы; K_{ij} — жесткость пружины, прикрепленной к точке O_j ($j=1$, 2) и оказывающей сопротивление движению в горизонтальном ($i=1$) или в вертикальном ($i=2$) направлениях.

Введем безразмерные переменные, приняв за единицы измерения массы, длины и времени значения параметров M_*, A и $1/\omega$ соответственно. Тогда в уравнениях движения безразмерных переменных следует положить $M_*=1$, $A=1$, $\omega=1$, а ускорение силы тяжести g заменить безразмерной величиной $g(A\omega^2)^{-1}$. Обозначим

$$\omega_{ji}^2=\frac{K_{ji}}{M_*\omega^2},\qquad \omega_i^2=\sum_{j=1}^{2}\frac{K_{ji}}{(m+M_*)\omega^2} \tag{1.1}$$

Величины ω_i^2 характеризуют суммарную жесткость пружин, оказы-



вающих сопротивление движению в горизонтальном ($i=1$) или в вертикальном ($i=2$) направлениях. Из (1.1) вытекает, что

$$\omega_i^2=\sum_{j=1}^{2}\omega_{ji}^2/(1+m) \tag{1.2}$$

Уравнения движения [2] в векторно-матричной форме такие:

$$[M+\varepsilon M_B(t)]\chi^{\cdot\cdot}+\varepsilon M_D(t)\chi^{\cdot}+[K+\varepsilon K_B(t)]\chi=\varepsilon B_1+B_2,\quad \varepsilon=ml \tag{1.3}$$

Отметим, что безразмерный параметр ε обычно мал ($\varepsilon\ll 1$).

Матрицы и векторы в (1.3) имеют вид (символ T обозначает транспонирование):

$$\chi=[x,\ y,\ \varphi]^T$$

$$M=\begin{Vmatrix}1+m & 0 & -H_2\\ 0 & 1+m & H_1\\ -H_2 & H_1 & J+ma_1^2\end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

$$H_1=\xi+ma=L\cos\beta+ma,\qquad H_2=\eta+mb=L\sin\beta+mb \tag{1.5}$$

$$a_1^2=\rho_B^2+a^2+b^2 \tag{1.6}$$

$$M_B(t)=\begin{Vmatrix}0 & 0 & -\sin\alpha\\ 0 & 0 & \cos\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 2(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\end{Vmatrix}\cos t \tag{1.7}$$

$$M_D(t)=\begin{Vmatrix}0 & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 0 & -\cos\alpha\\ 0 & 0 & -2(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\end{Vmatrix}\sin t \tag{1.8}$$

$$K=\begin{Vmatrix}(1+m)\omega_1^2 & 0 & 0\\ 0 & (1+m)\omega_2^2 & \omega_{22}^2\\ 0 & \omega_{22}^2 & \omega_{22}^2-gH_2\end{Vmatrix} \tag{1.9}$$

$$K_{B_{\text{м}}}(t)=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -g\sin\alpha\end{Vmatrix}\cos t \tag{1.10}$$

$$B_1=[\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ (a\sin\alpha-b\cos\alpha)-g\cos\alpha]^T\cos t$$

$$B_2=[0,\ -(1+m)g,\ -gH_1]^T$$

В (1.4)—(1.10) использованы обозначения: $L=O_1C'$; β — угол между O_1C' и O_1x'; J — момент инерции платформы относительно оси, проходящей через точку O_1 и перпендикулярной плоскости движения; ρ_B — радиус инерции двух роторов вибровозбудителя относительно оси вращения.

Если режим работы механизма не близок к резонансному, т. е. $\omega_i^2\neq 1$,

$\omega_2^2 \neq 1$, то порядки малости величин x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, ε одинаковы [2]. Пренебрегая в (1.3) величинами более высокого порядка малости, чем ε, получим уравнение с постоянными коэффициентами $M\ddot{\chi}+K\chi=\varepsilon B_1+B_2$. Для существования стационарного режима работы механизма с поступательным колебательным движением платформы ($\varphi=0$) необходимо и достаточно, чтобы $\omega_1^2 \neq 1$ $\omega_2^2 \neq 1$ и параметры системы удовлетворяли следующим равенствам [2]:

$$H_1=\omega_{22}^2/\omega_2^2 \tag{1.11}$$

$$-\left[\frac{H_2}{\omega_1^2-1}+(1+m)(b+g)\right]\cos\alpha=\left[\frac{H_1-\omega_{22}^2}{\omega_2^2-1}+(1+m)a\right]\sin\alpha \tag{1.12}$$

2. Исследуем устойчивость полученного в [2] стационарного режима при учете возмущающих членов εM_B, εM_D, εK_B в уравнении (1.3). Составим уравнение в вариациях Δx, Δy, δ, где

$$\check{x}=x+\Delta x,\quad \check{y}=y+\Delta y,\quad \check{\varphi}=+\delta \tag{2.1}$$

галочка над буквами обозначает возмущенное движение. Для удобства записи обозначим

$$x_*=[\Delta x,\ \Delta y,\ \delta]^T \tag{2.2}$$

Уравнение для переменной x_* (2.2) имеет вид

$$[M+\varepsilon M_B(t)]\ddot{x}_*+\varepsilon M_D(t)\dot{x}_*+[K+\varepsilon K_B(t)]x_*=0 \tag{2.3}$$

Приведем уравнение (2.3) к нормальной форме Коши. Для этого надо вычислить матрицу $(M+\varepsilon M_B)^{-1}$. Сначала преобразуем возмущающие члены εM_B, εM_D, εK_B к более удобному виду. Вместо малого параметра $\varepsilon=ml$ будем пользоваться малым параметром $\check{\varepsilon}$:

$$\check{\varepsilon}=2|a_{33}|\varepsilon \tag{2.4}$$

$$a_{33}=a\cos\alpha+b\sin\alpha \tag{2.5}$$

Тогда получим

$$\begin{gathered}\varepsilon M_B=\check{\varepsilon}\check{M}_B=\check{\varepsilon}\frac{1}{2|a_{33}|}M_B\\ \varepsilon M_D=\check{\varepsilon}\check{M}_D=\check{\varepsilon}\frac{1}{2|a_{33}|}M_D,\qquad \varepsilon K_B=\check{\varepsilon}\check{K}_B=\check{\varepsilon}\frac{1}{2|a_{33}|}K_B\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$M_B^{\vee}=\frac{1}{2|a_{33}|}M_B=\begin{Vmatrix}0 & 0 & -\dfrac{\sin\alpha}{2|a_{33}|}\\ 0 & 0 & \dfrac{\cos\alpha}{2|a_{33}|}\\ -\dfrac{\sin\alpha}{2|a_{33}|} & \dfrac{\cos\alpha}{2|a_{33}|} & \operatorname{sign}a_{33}\end{Vmatrix}\cos t \tag{2.7}$$

После этих преобразований уравнение (2.3) принимает вид

$$(M+\check{\varepsilon}\check{M}_B)\ddot{x}_*+\check{\varepsilon}\check{M}_D\dot{x}_*+(K+\check{\varepsilon}\check{K}_B)x_*=0 \tag{2.8}$$

В дальнейшем используется только уравнение (2.8), галочка опускается. Вычислим матрицу $(M+\varepsilon M_B)^{-1}$ при помощи метода возмущений [3]. Разложим матрицу $(M+\varepsilon M_B)^{-1}$ в ряд по степеням ε:

$$(M+\varepsilon M_B)^{-1}=M^{-1}+\varepsilon B_1+\ldots \tag{2.9}$$

Из равенства $(M+\varepsilon M_B)^{-1}(M+\varepsilon M_B)=E$ (где E — единичная матрица) получим

$$B_1=-M^{-1}M_BM^{-1} \tag{2.10}$$

Умножая (2.8) справа на (2.9) и пренебрегая при этом членами, содержащими параметр ε в степени выше первой, имеем

$$\ddot{x}_*=-M^{-1}Kx_*-\varepsilon[(M^{-1}K_B+B_1K)x_*+M^{-1}M_D\dot{x}_*] \tag{2.11}$$

Перепишем уравнение (2.11) в виде

$$y^{\bullet}=[B+\varepsilon D(t)]y, \quad y_1=x_*, \quad y_2=x_*^{\bullet}, \quad y=[y_1, y_2]^T \tag{2.12}$$

$$B=\begin{Vmatrix} 0 & E \\ -V & 0 \end{Vmatrix}, \quad D(t)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ M^{-1}M_BV-M^{-1}K_B & -M^{-1}M_D \end{Vmatrix}, \quad V=M^{-1}K \tag{2.13}$$

Уравнение (2.12) — линейное, с 2π-периодическими коэффициентами, поэтому оно должно иметь по крайней мере одно решение вида [4, 5]:

$$y^{(k)}(t)=e^{\rho_j t}\varphi^{(k)}(t) \tag{2.14}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $y^{(k)}(t)=[y_1^{(k)}(t),\ldots$ $\ldots,y_6^{(k)}(t)]^T$, $\varphi^{(k)}(t)$ — периодическая матрица-столбец периода 2π: $\varphi^{(k)}(t)=[\varphi_1^{(k)}(t),\ldots,\varphi_6^{(k)}(t)]^T$, $\varphi^{(k)}(t+2\pi)=\varphi^{(k)}(t)$; ρ_j — постоянное число (характеристический показатель).

Известно, что решения систем линейных дифференциальных уравнений либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы [4], так что для исследования устойчивости системы (2.12) достаточно исследовать устойчивость решения (2.14). Представим ρ_j в виде [5]:

$$\rho_j=\lambda_{0j}+\bar{\alpha}_j(\varepsilon) \tag{2.15}$$

где λ_{0j} — характеристические показатели уравнения (2.12) при $\varepsilon=0$, т. е. уравнения $y^{\bullet}=By$. Слагаемое $\bar{\alpha}_j(\varepsilon)$ считается малым порядка ε [5]. Полагая $\bar{\alpha}_j(\varepsilon)=\varepsilon\bar{\lambda}_1(\varepsilon)$ и делая в уравнении (2.12) замену переменных

$$y(t)=\exp([\lambda_{0j}+\varepsilon\bar{\lambda}_1(\varepsilon)]t)z(t) \tag{2.16}$$

имеем преобразованную систему:

$$z^{\bullet}(t)=[B-\lambda_{0j}E]z(t)+\varepsilon[D(t)-\bar{\lambda}_1E]z(t) \tag{2.17}$$

Из теоремы Флоке [4, 6] известно, что $z(t)$ должно быть периодическим. Из этого условия определим $\bar{\lambda}_1(\varepsilon)$. Устойчивость решения будем исследовать, рассматривая значения λ_{0j} и $\bar{\lambda}_1(\varepsilon)$.

Рассмотрим сначала величину λ_{0j}, которая является характеристическим числом системы $y^{\bullet}=By$, т. е. корнем уравнения

$$\det(B-\lambda_0E)=0 \tag{2.18}$$

Обозначим матрицу $B-\lambda_0E$ через $f(\lambda_0)$. Эта матрица элементарными преобразованиями приводится к нормальной блочно-диагональной форме:

$$f(\lambda_0)\equiv B-\lambda_0E\equiv\begin{Vmatrix} -\lambda_0E & E \\ -V & -\lambda_0E \end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & V+\lambda_0^2E \end{Vmatrix}$$

Используя эту форму, получим эквивалентное (2.18) уравнение для определения корней λ_{0j}, учитывая при этом, что $V=M^{-1}K$ (2.13):

$$\det(M\lambda_0^2+K)=0 \tag{2.19}$$

Так как M, K — симметричные матрицы (1.4), (1.9), причем M — знакоопределенная, то по известной теореме линейной алгебры все корни $\lambda^{\vee}$ характеристического уравнения $\det(M\lambda^{\vee}+K)=0$ вещественны, при этом всегда найдется такая неособенная матрица Q, что [7]: $Q^TMQ=E$, $Q^TKQ=$ $=\mathrm{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]=\Gamma$. Тогда

$$\det(M\lambda_0^2+K)=0=\det Q^T\det(M\lambda_0^2+K)\det Q=$$
$$=\det(Q^TMQ\lambda_0^2+Q^TKQ)=\det(\lambda_0^2E+\Gamma) \tag{2.20}$$

Отсюда можно сделать вывод: для того, чтобы корни $\lambda^{\vee}=\lambda_0^2$ уравнения (2.19) были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы элементы матрицы $\Gamma=\mathrm{diag}[\gamma_i]$ были положительными, т. е. матрица K должна быть положительно-определенной, что влечет за собой выполнение критерия

Сильвестра для матрицы K (1.9):

$$\omega_{12}^2\omega_{22}^2/(\omega_{12}^2+\omega_{22}^2)>gH_2 \tag{2.21}$$

где $H_2=\eta+mb$ (1.5). Условие (2.21) и есть условие отрицательности λ_{0j}^2 (или мнимости λ_{0j}).

Переходим к рассмотрению величины $\bar{\lambda}_1(\varepsilon)$. Будем определять $\bar{\lambda}_1(\varepsilon)$, исходя из условия периодичности решения $z(t)$ уравнения (2.17), применяя при этом метод последовательных приближений [5]; ν-е приближение $z^{(\nu)}(t)$ величины $z(t)$ есть периодическое решение уравнения:

$$z^{\cdot(\nu)}(t)=[B-\lambda_{0i}E]z^{(\nu)}(t)+\varepsilon[D(t)-\lambda_1^{(\nu)}(\varepsilon)E]z^{(\nu-1)}(t) \tag{2.22}$$

где $\lambda_1^{(\nu)}$ —ν-е приближение величины $\bar{\lambda}_1$ (при этом полагается $\lambda_1^{(0)}=0$ при $\nu=0$). За нулевое приближение $z^{(0)}(t)$ величины $z(t)$ $(\nu=0)$ принимаем периодическое решение уравнения

$$z^{\cdot(0)}(t)=(B-\lambda_{0i}E)z^{(0)}(t) \tag{2.23}$$

Найдем аналитическое выражение решения $z^{(0)}(t)$ уравнения (2.23) вида

$$z^{(0)}(t)=\mu e^{\lambda t} \tag{2.24}$$

где μ — постоянная матрица-столбец (6×1). Характеристическое уравнение системы (2.23) имеет вид $\det[B-(\lambda_{0j}+\lambda)E]=0$.

Это уравнение можно записать в эквивалентной форме

$$\det[M(\lambda_{0j}+\lambda)^2+K]=0 \tag{2.25}$$

Обозначая $\beta=\lambda_{0j}+\lambda$ и сравнивая уравнение (2.25) с уравнением (2.19), видим, что множества их корней (λ_0, β) совпадают.

Разобьем столбец μ (2.24) на два подстолбца μ_{I}, μ_{II}:

$$\mu=[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_6]^T=[\mu_{\mathrm{I}}, \mu_{\mathrm{II}}]^T, \quad \mu_{\mathrm{I}}=[\mu_1, \mu_2, \mu_3]^T, \tag{2.26}$$
$$\mu_{\mathrm{II}}=[\mu_4, \mu_5, \mu_6]^T$$

Эти подстолбцы определяются из матричного уравнения $[B-\beta E]=0$, которое можно представить в виде

$$-\beta\mu_{\mathrm{I}}+\mu_{\mathrm{II}}=0, \quad -V\mu_{\mathrm{I}}-\beta\mu_{\mathrm{II}}=0 \tag{2.27}$$

Из первого уравнения следует, что

$$\mu_{\mathrm{II}}=\beta\mu_{\mathrm{I}} \tag{2.28}$$

Подстолбец μ_{I} определяется из второго уравнения (2.27) после подстановки в него μ_{II} из (2.28):

$$[V+\beta^2E]\mu_{\mathrm{I}}=0, \quad \det[V+\beta^2E]=0 \tag{2.29}$$

Каждому корню $\beta_k^2=(\lambda_{0j}+\lambda)_k^2=-\alpha_k^2$ $(k=1, 2, 3)$ уравнения (2.29) соответствуют два характеристических числа λ уравнения (2.23):

$$\lambda_{2k-1}=+i\alpha_k-\lambda_{0j}=i(\alpha_k-\alpha_j), \quad \lambda_{2k}=-i\alpha_k-\lambda_{0j}=-i(\alpha_k+\alpha_j) \tag{2.30}$$

Здесь, в силу совпадения множества корней (β и λ_0), в качестве λ_{0j} берется один из корней β_k, $\lambda_{0j}=i\alpha_j$ (корень $-i\alpha_j$ дает то же решение для уравнения (2.23) [5]). Этим двум числам (2.30) соответствуют одинаковые подстолбцы μ_{I}:

$$\mu_{\mathrm{I}}^{(2k-1)}=\mu_{\mathrm{I}}^{(2k)}=\begin{Vmatrix}\mu_{\mathrm{I}}^{(k)}\\ \mu_2^{(k)}\\ \mu_3^{(k)}\end{Vmatrix}=\mu_{\mathrm{I}}^{(\,)}$$

Из (2.28) и равенства $\beta_k=\pm i\alpha_k$ вытекает, что каждому значению k

соответствуют два собственных вектора:

$$\mu^{(2k-1)} = \begin{Vmatrix} \mu_{\mathrm{I}}^{(k)} \\ i\alpha_k \mu_{\mathrm{I}}^{(k)} \end{Vmatrix}, \quad \mu^{(2k)} = \begin{Vmatrix} \mu_{\mathrm{I}}^{(k)} \\ -i\alpha_k \mu_{\mathrm{I}}^{(k)} \end{Vmatrix} \tag{2.31}$$

Полагая $k=1, 2, 3$, получим модальную матрицу $[\mu]$ порядка (6×6) и общее решение систем (2.23): $z^{(0)}(t)=[X(t)]C$, где $[X(t)]$ — фундаментальная матрица решений системы

$$[X(t)] = [\mu][e^{\lambda t}], \quad [e^{\lambda t}] = \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_6 t} \end{Vmatrix}$$

где $C=[C_1, C_2, \dots, C_6]^T$ — постоянная матрица-столбец с элементами C_i, определяемыми начальными условиями.

Перенумеровав индексы характеристических чисел так, что в первых m столбцах в $[X(t)]$ стоят периодические векторы-решения, соответствующие числам λ вида $\pm pi$ $(p=0, 1, 2, \dots)$, получим периодическую матрицу $[X_m(t)]$ порядка $(6\times m)$ и периодическое решение периода 2π уравнения (2.23):

$$z_m^{(0)}(t)=[X_m(t)]C^*, \quad C^*=[C_1, \dots, C_m]^T, \quad m\leqslant 6 \tag{2.32}$$

Система, сопряженная с (2.23):

$$w^{\cdot}(t) = -(B-\lambda_{0j}E)^T w(t) \tag{2.33}$$

имеет характеристические числа $\bar\lambda$, отличающиеся от λ из (2.23) только знаком. Поэтому $\bar\beta_k=\beta_k$ (где $\bar\beta_k=\lambda_{0j}-\bar\lambda$). Проделывая процедуру, аналогичную процедуре определения $[\mu]$, имеем: $w=\gamma e^{\bar\lambda t}$, $\gamma_{\mathrm{I}}=[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$, $\gamma_{\mathrm{II}}=[\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6]^T$, $\gamma_{\mathrm{I}}=\bar\beta\gamma_{\mathrm{II}}$, где γ_{II} определяется из уравнения $(\bar\beta_k^2 E+V^T)\gamma_{\mathrm{II}}=0$.

Каждому значению k $(k=1, 2, 3)$ соответствуют один подстолбец $\gamma_{\mathrm{II}}^{(k)}$ и два собственных вектора, относящихся к $\bar\lambda_{2k-1}$ и $\bar\lambda_{2k}$:

$$\gamma^{(2k-1)} = \begin{Vmatrix} i\alpha_k \gamma_{\mathrm{II}}^{(k)} \\ \gamma_{\mathrm{II}}^{(k)} \end{Vmatrix}, \quad \gamma^{(2k)} = \begin{Vmatrix} -i\alpha_k \gamma_{\mathrm{II}}^{(k)} \\ \gamma_{\mathrm{II}}^{(k)} \end{Vmatrix} (k=1, 2, 3) \tag{2.34}$$

Выделяя в фундаментальной матрице решений $W(t)=[\gamma][e^{\lambda t}]$ системы (2.33) m периодических столбцов и переставляя их по порядку, согласованному с порядком в $[X_m(t)]$, получим периодическую матрицу $[W_m(t)]$ порядка $(6\times m)$.

Уравнение (2.22) при $\nu=1$ имеет вид

$$z^{\cdot(1)}(t)=(B-\lambda_{0j}E)z^{(1)}(t)+\varepsilon[D(t)-\lambda_1^{(1)}E][X(t)]C \tag{2.35}$$

Для того чтобы система (2.35) имела 2π-периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее неоднородная часть удовлетворяла следующему условию [5]:

$$\int_0^{2\pi} W_m{}^T\{\varepsilon[D(t)-\lambda_1^{(1)}E][X_m(t)]C^*\}dt=0 \tag{2.36}$$

Так как не все элементы столбца C^* одновременно равны нулю, для удовлетворения условия (2.36) необходимо, чтобы

$$\det\left\{\int_0^{2\pi} W_m{}^T[D(t)-\lambda_1^{(1)}E][X_m(t)]dt\right\}=0 \tag{2.37}$$

Уравнение (2.37) позволяет определить $\lambda_1^{(1)}$. По полученным значениям λ_{0j} из (2.19) и $\lambda_1^{(1)}$ можно сделать выводы относительно устойчивости решения (2.14) в первом приближении.

3. Рассмотрим некоторые особые случаи:

1. характеристические числа уравнения нулевого приближения (2.23) принимают критические значения вида $\pm i$ при $\lambda_{0j}=i\alpha_j\neq 0,5i$;

2. $\lambda_{0j}=0,5i$, т. е. когда частота внешнего воздействия вдвое больше одной из частот собственных колебаний. В первом случае для определенности возьмем $\lambda_{0j}=i\alpha_2$.

Согласно (2.30), имеем два следующих критических характеристических числа уравнения (2.23), соответствующих различным значениям k:

$$k=1,\quad \lambda_{2k-1}=\lambda_1=i(\alpha_1-\alpha_2)=i,\quad k=2,\quad \lambda_{2k-1}=\lambda_3=i(\alpha_2-\alpha_2)=0 \tag{3.1}$$

Значения характеристических чисел, не равные критическим, в данном случае не рассматриваются.

Представим матрицы $[D(t)-\lambda_1^{(1)}E]$, $X_2(t)$, $W_2(t)$ в подынтегральном выражении (2.36) в блочной записи:

$$[D(t)-\lambda_1^{(1)}E]=\begin{Vmatrix} -\lambda_1^{(1)}E & 0 \\ C_1\cos t & C_2\sin t-\lambda_1^{(1)}E \end{Vmatrix} \tag{3.2}$$

$$C_1=(M^{-1}M_BV-M^{-1}K_B)/\cos t,\qquad C_2=-(M^{-1}M_D)/\sin t$$

$$X_2(t)=\begin{Vmatrix} \mu_{\mathrm{I}}^{(1)}e^{it} & \mu_{\mathrm{I}}^{(2)} \\ i\alpha_1\mu_{\mathrm{I}}^{(1)}e^{it} & i\alpha_2\mu_{\mathrm{I}}^{(2)} \end{Vmatrix} \tag{3.3}$$

$$W_2(t)=\begin{Vmatrix} i\alpha_1\gamma_{\mathrm{II}}^{(1)}e^{-it} & i\alpha_2\gamma_{\mathrm{II}}^{(2)} \\ \gamma_{\mathrm{II}}^{(1)}e^{-it} & \gamma_{\mathrm{II}}^{(2)} \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

Пользуясь блочной записью матриц (3.2), (3.3), (3.4), из уравнения (2.37) получим

$$(\lambda_1^{(1)})^2=-\frac{N_1}{16\alpha_1\alpha_2[(\gamma_{\mathrm{II}}^{(1)})^T\mu_{\mathrm{I}}^{(1)}][(\gamma_{\mathrm{II}}^{(2)})^T\mu_{\mathrm{I}}^{(2)}]} \tag{3.5}$$

$$N_1=\alpha_1(\gamma_{\mathrm{II}}^{(2)})^T(C_2\mu_{\mathrm{I}}^{(1)})+\alpha_2(\gamma_{\mathrm{II}}^{(1)})^T(C_2\mu_{\mathrm{I}}^{(2)})-$$

$$-[(\gamma_{\mathrm{II}}^{(2)})^T(C_1\mu_{\mathrm{I}}^{(1)})-(\gamma_{\mathrm{II}}^{(1)})^T(C_1\mu_{\mathrm{I}}^{(2)})]$$

Область устойчивости рассматриваемого режима определяется неравенством: $[(\gamma_{\mathrm{II}}^{(1)})^T\mu_{\mathrm{I}}^{(1)}][(\gamma_{\mathrm{II}}^{(2)})^T\mu_{\mathrm{I}}^{(2)}]N_1>0$, а ее граница — $N_1=0$.

Применим полученный здесь результат для исследования устойчивости стационарного поступательного колебательного движения виброплощадки для объемного формования железобетонных изделий с типичными числовыми характеристиками, приведенными в [2]: $M_*=20$ т — масса платформы, $m=24$ кг — суммарная масса дебалансов, $\omega=50\,\pi c^{-1}$, $K_{12}=K_{22}=1,98\cdot 10^8$ Н/м, $K_{11}+K_{21}=3,96\cdot 10^8$ Н/м, $l=0,165$ м, $A=10$ м, $h=0,70$ м, $\xi=5$ м, $\eta=0,35$ м, $a=5$ м, $b=1,78$ м, $\alpha=0$. Корни характеристических уравнений (2.19) (λ_{0j}) и (2.25) (β_k) равны $\lambda_{01}^2=\beta_1^2=-\alpha_1^2=-2,73=[\pm i(1,66)]^2$; $\lambda_{02}^2=\beta_2^2=-\alpha_2^2=-0,45\approx[\pm i(0,66)]^2$; $\lambda_{03}^2=\beta_3^2=-2,52\cdot 10^{-2}\approx[\pm i(0,16)]^2$.

При всевозможных комбинациях индексов k и j в (2.30) имеем критические значения корней только при $j=2$ и $k=1, 2$, т. е. $k=1$, $\lambda_{2k-1}=i(\alpha_k-\alpha_j)=i(\alpha_1-\alpha_2)=i=\lambda_1$; $k=2$, $\lambda_{2k-1}=i(\alpha_2-\alpha_2)=0=\lambda_3$.

По формуле (3.5) имеем $(\lambda_1^{(1)})^2=-0,62$, $\lambda_1^{(1)}=\pm i\cdot 0,79$. Следовательно, рассматриваемый режим движения виброплощадки в первом приближении устойчив.

Рассмотрим теперь второй случай. Для определенности возьмем $\lambda_{0j}=i\alpha_1=0,5i$. Тогда при $k=1$ имеем $\beta_1^2=(\lambda_{0j}+\lambda)_1^2=-\alpha_1^2=-0,25$; $\lambda_{2k-1}=\lambda_1=0$, $\lambda_{2k}=\lambda_2=-i$, а при $k=2$ и $k=3$ выполнены равенства $\lambda_{2k-1}\neq pi$, $\lambda_{2k}\neq pi$ ($p=0, 1, 2, \ldots$). Матрицы $X_2(t)$ и $W_2(t)$ имеют вид (см. 2.31) и (2.34)):

$$X_2(t)=\begin{Vmatrix} \mu_{\mathrm{I}}^{(1)} & \mu_{\mathrm{I}}^{(1)}e^{-it} \\ 0,5\,i\mu_{\mathrm{II}}^{(1)} & -0,5\,i\mu_{\mathrm{I}}^{(1)}e^{-it} \end{Vmatrix},\qquad W_2(t)=\begin{Vmatrix} 0,5\,i\gamma_{\mathrm{II}}^{(1)} & -0,5\,i\gamma_{\mathrm{II}}^{(1)}e^{it} \\ \gamma_{\mathrm{II}}^{(1)} & \gamma_{\mathrm{II}}^{(1)}e^{it} \end{Vmatrix}$$

Разрешив в рассматриваемом случае уравнение (2.37) относительно $(\lambda_{\mathrm{I}}^{(1)})^2$, получим

$$(\lambda_1^{(1)})^2 = \frac{\{(\gamma_{\mathrm{II}}^{(1)})^T[(C_1\mu_{\mathrm{I}}^{(1)}) - 0{,}5(C_2\mu_{\mathrm{I}}^{(1)})]\}^2}{4[(\gamma_{\mathrm{II}}^{(1)})^T\mu_{\mathrm{I}}^{(1)}]^2} > 0 \tag{3.6}$$

что свидетельствует о неустойчивости стационарного режима. Чтобы избежать этого случая, характеристическое уравнение (2.19) не должно иметь корня $\lambda_0^2=-0{,}25$. Это равносильно тому, что остаток деления полинома $\det(M\lambda_0^2+K)$ на $(\lambda_0^2+0{,}25)$ должен быть отличным от нуля, что приводит к условию:

$$d_1^2 - d_0 d_2 < 0 \tag{3.7}$$

$$d_1 = 8\omega_1^2\omega_2^4[(1+m)-4\omega_2^2] - 2(1+m)\omega_2^4(1-4\omega_2^2)$$

$$d_2 = 8\omega_2^2(8\omega_2^4 - 2\omega_2^2 + 1) + 4\omega_1^2(1-8\omega_2^2) - 1$$

$$d_0 = 4\omega_2^6\{H_2(4mg+H_2) - (1-4\omega_1^2)[4gH_2 + (1+m)I_s]\} +$$
$$+\omega_2^4\{(1-4\omega_1^2)(1+m)(4gH_2+I_s) - H_2^2\}$$

Здесь $I_s=J+ma_1^2$ (см. (1.6)). Условие (3.7) дает область значений параметров, при которых рассматриваемый стационарный режим устойчив.

Автор выражает свою благодарность Л. Д. Акуленко и Н. Н. Болотнику за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти т. Т. 4. Вибрационные процессы и машины. М.: Машиностроение, 1981. 509 с.
2. *Болотник Н. Н., Нгуен Чыонг.* О выборе параметров вибрационных машин с инерционным возбуждением.– Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 1, с. 59–66.
3. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
6. *Булгаков Б. В.* Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 892 с.
7. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз. 1960. 656 с.

Ханой, Вьетнам

Поступила в редакцию
5.V.1985