МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 531.8

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОТИВОУДАРНЫХ АМОРТИЗАТОРОВ

БАЛАНДИН Д. В., МАРКОВ А. А.

Рассматриваются однокритериальные и двухкритериальная задачи оптимизации параметров некоторого класса нелинейных противоударных амортизаторов. Подобные задачи, но для иного вида характеристик амортизатора рассмотрены в [1–3]. Для ряда амортизаторов со степенными характеристиками приводится численное решение задач.

1. Однокритериальные задачи оптимизации. Рассмотрим уравнения движения системы противоударной амортизации

$$x^{\cdot}=y,\quad y^{\cdot}=-f(qy)-\varphi(kx)$$
$$x(0)=0,\quad y(0)=b \tag{1.1}$$

Здесь f, φ — характеристики демпфирующего и упругого элементов амортизатора, q, $k\geqslant0$ — параметры. Относительно функций $f(\xi)$, $\varphi(\xi)$ будем предполагать, что они определены и непрерывны на R^1 и дифференцируемы всюду в области определения, кроме, быть может, $\xi=0$, а также

$$f(\xi)=-f(-\xi),\quad \varphi(\xi)=-\varphi(-\xi)$$
$$df/d\xi>0,\quad d\varphi/d\xi>0 \tag{1.2}$$

Сформулируем задачи оптимизации параметров противоударного амортизатора. Для заданных характеристик f, φ найти q^0, k^0, такие, что (задача 1):

$$G(q^0,k^0)=\min_{q,k\geqslant0} G(q,k),\qquad S(q^0,k^0)\leqslant S_0$$

(задача минимизации максимальной перегрузки при ограничении на ход амортизации), или такие, что (задача 2):

$$S(q^0,k^0)=\min_{q,k\geqslant0} S(q,k),\qquad G(q^0,k^0)\leqslant G_0$$

(задача минимизации хода амортизации при ограничении на максимальную перегрузку), где

$$G(q,k)=\max_{t\in[0,\infty)}|y^{\cdot}(t,q,k)|,\qquad S(q,k)=\max_{t\in[0,\infty)}|x(t,q,k)|$$

где $x(t,\ q,\ k)$, $y(t,\ q,\ k)$ — решение задачи Коши для системы (1.1), S_0, $G_0\geqslant0$ — заданные величины.

Из соотношений (1.2) по аналогии с результатом [1] будем иметь

$$S(q,k)=x(T,q,k),\qquad G(q,k)=\max_{t\in[0,T]}|y^{\cdot}(t,q,k)| \tag{1.3}$$

где T — момент достижения функцией $x(t,\ q,\ k)$ первого локального экстремума.

Из соотношений (1.2) также следует, что без ограничения общности можно считать $b>0$.

Отметим теперь некоторые особенности поведения функций $S(q,\ k)$ и

$G(q, k)$. Из непрерывности и нечетности функций f, φ следует, что $f(0)=\varphi(0)=0$. Таким образом $S(q, k)\to\infty$, $G(q, k)\to 0$ при $q, k\to 0$.

Рассмотрим отдельно поведение функции $S(q, k)$ при $q\neq 0$ и $k\to 0$. При $k=0$, интегрируя (1.1), получим выражение для первого интеграла

$$x+\int_b^y \frac{\eta\, d\eta}{f(q\eta)}=0$$

Если интеграл

$$J(q)=\int_0^{qb} \frac{\xi\, d\xi}{f(\xi)} \tag{1.4}$$

с подынтегральной функцией, имеющей особенность в нуле, сходится, то

$$S(q,\ 0)\equiv\sigma(q)=J(q)/q^2 \tag{1.5}$$

причем из анализа $\sigma(q)$ следует, что

$$\lim_{q\to\infty}\sigma(q)=0,\qquad \lim_{q\to 0}\sigma(q)=\infty,\qquad \frac{d\sigma}{dq}<0$$

Если интеграл (1.4) расходящийся, то

$$\lim_{k\to 0} S(q, k)=\infty \tag{1.6}$$

Пусть $f(\xi)\to\infty$, $\varphi(\xi)\to\infty$ при $\xi\to\infty$, тогда

$$\lim_{q,k\to\infty} G(q, k)=\infty,\qquad \lim_{q,k\to\infty} S(q, k)=0$$

Вследствие непрерывной зависимости решения системы (1.1) от параметров $G(q, k)$ является непрерывной функцией q, $k\geqslant 0$, $S(q, k)$ — непрерывная функция, причем если справедливо (1.5), то всюду при q, $k\geqslant 0$, кроме точки $q=0$, $k=0$, а если справедливо (1.6), то при $q\geqslant 0$ $k>0$. Кроме того, вследствие дифференцируемости решения системы (1.1) по параметрам и с учетом (1.3) $S(q, k)$ является дифференцируемой в области, где она непрерывна. В силу (1.2) аналогично [2] будем иметь

$$\partial S(q,\ k)/\partial q<0,\qquad \partial S(q,\ k)/\partial k<0 \tag{1.7}$$

Отметим, что $G(q, k)$, вообще говоря, не является дифференцируемой функцией при q, $k\geqslant 0$.

Для исследования задач оптимизации сформулируем следующую лемму.

Лемма. Если $q>q_1>0$, $k>k_1>0$ и $q^2/k=q_1^2/k_1$, то $G(q, k)>G(q_1, k_1)$; если $q>q_1>0$, то $G(q, 0)>G(q_1, 0)$; если $k>k_1>0$, то $G(0, k)>G(0, k_1)$.

Доказательство. Путем замены переменных $x_1=kx$, $y_1=qy$, $t_1=qt$ преобразуем систему (1.1) к виду

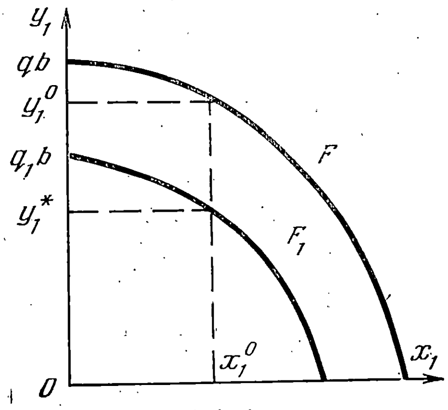
$$\frac{dx_1}{dt_1}=\frac{k}{q^2}y_1,\qquad \frac{dy_1}{dt_1}=-f(y_1)-\varphi(x_1) \tag{1.8}$$

1. Пусть $q>q_1>0$, $k>k_1>0$ и $q^2/k=q_1^2/k_1$, тогда параметрам q, k и q_1, k_1 соответствует одна и та же система (1.8), но с различными начальными условиями для y_1. Обозначим кусок фазовой траектории в первом квадранте плоскости $\{x_1, y_1\}$ системы (1.8), соответствующий параметрам q, k, через F, параметрам q_1, k_1 — через F_1 (фиг. 1). Тогда для любой точки x_1^0, $y_1^0\in F$ существует x_1^0, $y_1^*\in F_1$, причем $y_1^*<y_1^0$. Значит, в силу (1.2) имеем $f(y_1^0)+\varphi(x_1^0)>f(y_1^*)+\varphi(x_1^0)$.

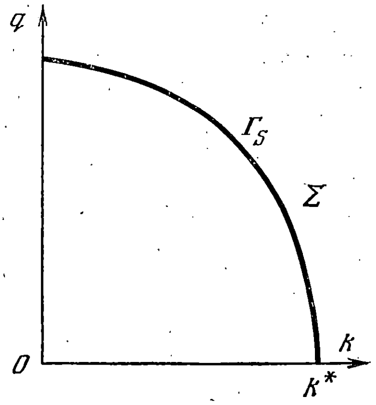
Следовательно, максимальное значение величины $f(y_1)+\varphi(x_1)$ вдоль F_1 меньше максимального значения этой величины вдоль F. Таким образом, $G(q, k)>G(q_1, k_1)$.

2. Пусть $q>q_1>0$, $k>k_1>0$, тогда в силу (1.2) получим $G(q, 0)=f(qb)$, $G(q_1, 0)=f(q_1, b)$. Значит, $G(q, 0)>G(q_1, 0)$.

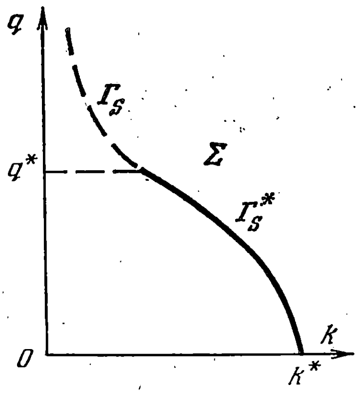
3. Пусть $q>q_1>0$, $k>k_1>0$, тогда в силу (1.2): $G(0, k)=\varphi(kS(0, k))$, $G(0, k_1)=\varphi(k_1S(0, k_1))$



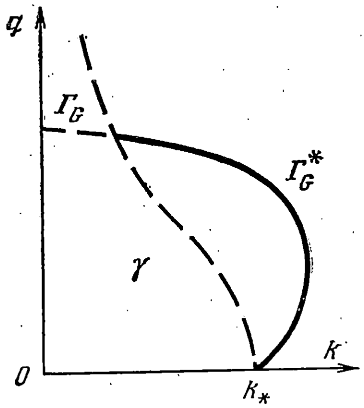
Фиг. 1



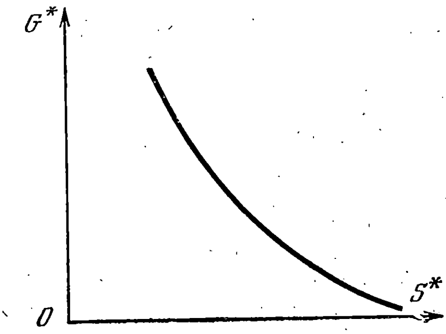
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Аналогично [2] будем иметь $\partial\varphi(kS(0,\ k))/\partial k>0$. Значит, $G(0,\ k)>$ $>G(0,\ k_1)$. Лемма доказана.

Утверждение 1. $\forall S_0\in(0,\ \infty)$ решение задачи 1 существует и принадлежит множеству Γ_S, где $\Gamma_S : \{q,\ k\in\Gamma_S : S(q,\ k)=S_0$.

Доказательство. Определим множества Σ и $\Gamma_S{}^*$:

$$\{q,\ k\in\Sigma : S(q,\ k)<S_0\}$$

$$\{q,\ k\in\Gamma_S{}^* : q,\ k\in\Gamma_S,\ q\leqslant q^*,\ k\leqslant k^*\}$$

Здесь q^*, k^* — решение системы уравнений $f(qb)=\varphi(kS_0)$, $S(0,\ k)=S_0$.

Таким образом, согласно лемме и в силу (1.7) $\forall q,\ k\in\Sigma\ \exists q_1,\ k_1\in\Gamma_S$, такая, что $G(q_1,\ k_1)<G(q,\ k)$ (фиг. 2), причем если справедливо (1.6), то $\exists q_1',\ k_1'\in\Gamma_S{}^*$, такая, что $G(q_1',\ k_1')<G(q,\ k)$ (фиг. 3). Так как Γ_S, $\Gamma_S{}^*$ есть ограниченные замкнутые множества, а $G(q,\ k)$ — непрерывная функция, то решение задачи 1 существует.

Утверждение 2. $\forall G_0 \in (0, \infty)$ решение задачи 2 существует и принадлежит множеству Γ_G, где $\Gamma_G : \{q, k \in \Gamma_G : G(q, k) = G_0\}$.

Доказательство. Определим множества γ и Γ_G^*:

$$\{q, k \in \gamma : G(q, k) < G_0\}$$

$$\{q, k \in \Gamma_G^* : q, k \in \Gamma_G, \quad S(q, k) \leqslant S(0, k_*)\}$$

Здесь k_* — корень уравнения $G(0, k) = G_0$. Таким образом, согласно лемме и в силу (1.7) $\forall q, k \in \gamma \ \exists q_1, k_1 \in \Gamma_G^*$, такая, что $S(q_1, k_1) < S(q, k)$ (фиг. 4).

Непрерывная функция $S(q, k)$ определена на ограниченном замкнутом множестве Γ_G^*. Следовательно, решение задачи 2 существует.

Отметим, что задачи 1, 2 могут иметь, вообще говоря, не единственное решение. Аналогично [2] можно показать, что если $\xi d^2 f/d\xi^2 - df/\partial\xi \geqslant 0$, $d^2\varphi/d\xi^2 \operatorname{sign} \xi \geqslant 0$, то задачи имеют единственное решение.

2. Двухкритериальная задача. Сформулируем двухкритериальную задачу оптимизации параметров нелинейного амортизатора.

Задача 3. Для системы (1.1) найти множество Π_0 параметров q, k, минимизирующих по Парето функции $G(q, k)$ и $S(q, k)$.

Задача в подобной постановке для амортизатора с линейными характеристиками рассмотрена в [1].

Было установлено, что для любого значения $S_0 \in (0, \infty)$ существует решение задачи 1 и для любого значения $G_0 \in (0, \infty)$ существует решение задачи 2. Введем обозначения: $I(S_0)$ — множество решений задачи 1, соответствующих S_0; $L(G_0)$ — множество решений задачи 2, соответствующих G_0.

Доопределим $I(S_0)$ при $S_0 = 0$, $S_0 = \infty$, а $L(G_0)$ при $G_0 = 0$, $G_0 = \infty$:

$$I(0) = L(\infty) \equiv \{q = \infty, \ k = \infty\}, \qquad I(\infty) = L(0) \equiv \{q = 0, \ k = 0\}$$

$\Pi_S = \bigcup\limits_{S_0=0}^{\infty} I(S_0)$ — однопараметрическое семейство решений задачи 1;

$\Pi_G = \bigcup\limits_{G_0=0}^{\infty} L(G_0)$ — однопараметрическое семейство решений задачи 2.

Утверждение 3. $\Pi_G = \Pi_S$.

Доказательство. Пусть $q, k \in \Pi_G$, покажем, что $q, k \in \Pi_S$. Предположим противное: $q, k \notin \Pi_S$, тогда существует $q_1, k_1 \in \Pi_S$, такая, что $S(q_1, k_1) = S(q, k)$ и $G(q_1, k_1) < G(q, k)$. В силу утверждения 2 существует точка q_2, k_2, такая, что $G(q_2, k_2) = G(q, k)$ и $S(q_2, k_2) < S(q_1, k_1) = S(q, k)$. Значит, $q, k \notin \Pi_G$. Полученное противоречие означает, что $q, k \in \Pi_S$.

Пусть $q, k \in \Pi_S$, покажем, что $q, k \in \Pi_G$. Предположим противное: $q, k \notin \Pi_G$, тогда существует $q_1, k_1 \in \Pi_G$, такая, что $G(q_1, k_1) = G(q, k)$ и $S(q_1, k_1) < S(q, k)$. В силу утверждения 1 существует точка q_2, k_2, такая, что $S(q_2, k_2) = S(q, k)$ и $G(q_2, k_2) < G(q_1, k_1) = G(q, k)$. Значит, $q, k \notin \Pi_S$. Полученное противоречие означает, что $q, k \in \Pi_G$. Утверждение 3 полностью доказано. Итак, $\Pi_G = \Pi_S$. Обозначим $\Pi^* \equiv \Pi_G = \Pi_S$.

Утверждение 4. $\Pi^* = \Pi_0$, где Π_0 — парето-оптимальное множество решений.

Доказательство. Согласно определению парето-оптимального множества решений [4], Π_0 состоит из тех и только тех точек, что для любой $q, k \in \Pi_0$ не существует $q_1, k_1 \geqslant 0$, такой, чтобы одна из двух следующих систем неравенств была совместной:

$$G(q, k) > G(q_1, k_1), \quad S(q, k) \geqslant S(q_1, k_1) \tag{2.1}$$

$$G(q, k) \geqslant G(q_1, k_1), \quad S(q, k) > S(q_1, k_1) \tag{2.2}$$

Пусть $q, k \in \Pi^*$, покажем, что $q, k \in \Pi_0$. Предположим противное: $q, k \notin \Pi_0$, тогда существует $q_1, k_1 \geqslant 0$, такая, что либо (2.1), либо (2.2) являются совместными. Но тогда по определению Π_S и Π_G $q, k \notin \Pi^*$. Полученное противоречие показывает, что $q, k \in \Pi_0$.

Пусть $q, k \in \Pi_0$, покажем, что $q, k \in \Pi^*$. Предположим противное:

m	$n=1$	2	3	4
1	0,520 0,485 0,360	0,528 0,528 0,664	0,560 0,560 0,793	0,588 0,588 0,857
2	0,500 0,705 0,500	0,597 0,773 0,772	0,672 0,818 0,876	0,729 0,854 0,923
3	0,557 0,823 0,557	0,685 0,879 0,827	0,785 0,922 0,921	0,873 0,953 0,968
4	0,602 0,880 0,602	0,756 0,931 0,870	0,885 0,967 0,960	0,992 0,998 0,997

q, $k\notin\Pi^*$, тогда существует q_1, $k_1\in\Pi^*$, такая, что $S(q, k)=S(q_1, k_1)$, $G(q, k)>G(q_1, k_1)$, т. е. система неравенств (2.1) совместна. Значит, q, $k\notin\Pi_0$. Полученное противоречие показывает, что q, $k\in\Pi^*$. Утверждение 4 полностью доказано.

Нередко при рассмотрении многокритериальных задач наряду с парето-оптимальным множеством решений определяют множество парето-оптимальных оценок (множество оптимальных значений критериев). Таким образом, множество парето-оптимальных оценок M есть множество значений G^*, S^*: $\{G^*,\ S^*\in M: G^*=G(q,\ k),\ \ S^*=S(q,\ k)\,\forall q,\ k\in\Pi_0\}$. Из утверждений 1, 2 следует, что M есть кривая, определяемая монотонно убывающей функцией $G^*=\mu(S^*)$, заданной на $(0, \infty)$ и изменяющейся на $(0, \infty)$ (фиг. 5).

3. Пример. Амортизатор со степенными характеристиками.

$$f(\xi)=|\xi|^m \operatorname{sign}\xi,\quad \varphi(\xi)=|\xi|^n \operatorname{sign}\xi \qquad m,n>0 \tag{3.1}$$

Задачи оптимизации для $m=n=1$ и $m=2$, $n=1$ рассмотрены в [1].

Аналогично [1] введем новые безразмерные переменные и параметры для задач 1 и 2 соответственно

$$x'=(x/S_0)\operatorname{sign} b,\quad y'=y/b,\quad t'=|b|t/S_0 \tag{3.2}$$

$$(q')^m=q^m|b|^{m-2}S_0,\qquad (k')^n=k^nS_0^{n+1}/b^2 \tag{3.3}$$

$$x''=x(G_0/b^2)\operatorname{sign} b,\quad y''=y/b,\quad t''=G_0t/|b| \tag{3.4}$$

$$(q'')^m=q^m|b|^m/G_0,\qquad (k'')^n=k^nb^{2n}/G_0^{n+1} \tag{3.5}$$

Можно проверить, что вид системы (1.1) инвариантен относительно преобразований переменных (3.2), (3.4) и параметров (3.3), (3.5). Начальные условия имеют вид $x'(0)=x''(0)=0$, $y'(0)=y''(0)=1$. Ограничения в задачах 1, 2 определяются соотношениями $S(q', k')\leqslant 1$, $G''(q'', k'')\leqslant 1$.

Решая задачи 1, 2, находим оптимальные значения параметров q_0', k_0' и q_0'', k_0'', а также величины $G'(q_0', k_0')=\lambda_0$, $S''(q_0'', k_0'')=\rho_0$.

Выражения (3.3), (3.5) позволяют определять оптимальные параметры q^0, k^0, а также $G^*=b^2\lambda_0/S_0$, $S^*=b^2\rho_0/G_0$ при любых допустимых значениях величин b, S_0, G_0.

Из утверждений 1, 2 следует, что $\lambda_0=\rho_0$. Исключив из выражений (3.3) S_0, найдем

$$q^{m(n+1)}=(q')^{m(n+1)}k^n/|b|^{m(n+1)-2n}(k')^n \tag{3.6}$$

Аналогичное выражение получим, исключив из (3.5) G_0.

В силу утверждений 3, 4 парето-оптимальное множество решений задается выражением (3.6) при $q'=q_0'$, $k'=k_0'$ и представляет собой либо семейство непересекающихся между собой кривых, либо единственную кривую, если решение задач 1, 2 единственно.

Равенства $\lambda_0=\rho_0$ и (3.6) отражают тот факт, что задачи 1, 2 являются двойственными, т. е. зная решение одной задачи, можно найти решение другой и наоборот. Действительно, если известно q_0', k_0', то для определения q_0'', k_0'' достаточно решить уравнение $S''(q'', \delta(q''))=\rho_0$, где $\delta(q'')=k_0'(q_0''/q_0')^\varkappa$, $\varkappa=m(n+1)/n$, причем в силу (1.7): $(d/dq'')S''(q'', \delta(q''))<0$.

Приведем таблицу численных расчетов λ_0, q_0', k_0' (первая, вторая и третья строки) при некоторых значениях m, n.

Представленные результаты совпадают с данными, полученными ранее другим методом и изложенными в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотник Н. Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
2. *Баландин Д. В.* Параметрическая оптимизация нелинейных амортизаторов.– Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 72–74.
3. *Болычевцев Э. М., Лавровский Э. К.* О построении множества Парето в некоторых задачах оптимизации.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6, с. 44.
4. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 254 с.
5. *Афимивала К. А., Мэйн Р. В.* Оптимальное проектирование ударного амортизатора.– Конструирование и технология машиностроения, 1974, № 1, с. 24–30.

Горький

Поступила в редакцию
4.II.1985