МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 534.015

МЕТОД ПРЕОБРАЗУЮЩЕГО ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

РЕДЬКО С. Ф.

Решается задача определения по экспериментальным данным значений коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих колебания нелинейных многомассовых механических систем. В качестве исходных данных о движении идентифицируемой системы используются реализации внешних возмущающих сил, имеющих в общем случае стохастический характер, и реакций системы (перемещений или скоростей ее отдельных точек), полученных экспериментально на конечном интервале времени наблюдения. С использованием метода преобразующего оператора построен алгоритм решения данной задачи идентификации по критерию минимума обобщенной ошибки, не требующий дифференцирования регистрируемых процессов и позволяющий существенно уменьшить влияние погрешностей измерений исходных данных на точность получаемых оценок коэффициентов.

1. Пусть колебания исследуемой системы описываются дифференциальными уравнениями вида

$$\sum_{l=1}^{n} m_{jl}\ddot{q}_l+\sum_{l=1}^{n}\beta_{jl}\dot{q}_l+\sum_{r=1}^{\rho}c_{jr}f_{jr}(q_1,\ldots,q_n)=x_j(t)\qquad (j=1,\ldots,n)\tag{1.1}$$

где m_{jl}, β_{jl}, c_{jr} — неизвестные постоянные коэффициенты инерции, диссипации и жесткости, $q_1,\ldots,q_n$ — обобщенные координаты, $x_1,\ldots,x_n$ — возмущающие силы, $f_{jr}(q_1,\ldots,q_n)$ — некоторые известные нелинейные функции, определяющие действие позиционных сил потенциальной природы.

Предполагается, что в установившемся режиме колебаний механической системы измерены процессы

$$q_l(t)=q_l^*(t)+\Delta q_l(t),\ t\in[0,T]\tag{1.2}$$

$$x_j(t)=x_j^*(t)+\Delta x_j(t)\quad (l,\ j=1,\ldots,n)$$

Здесь $q_l^*(t)$, $x_j^*(t)$ — точные значения измеряемых величин (полезные сигналы), $\Delta q_l(t)$, $\Delta x_j(t)$ — погрешности измерений, представляющие собой стационарные гауссовские случайные процессы с нулевым средним, в общем случае коррелированные между собой и с полезными сигналами на конечном отрезке времени τ_0, значительно меньшем времени наблюдения T, т. е. $\tau_0\ll T$.

Для определения значений коэффициентов дифференциальных уравнений (1.1) из условия минимума обобщенной ошибки [1] необходимо располагать процессами $\ddot{q}_l$, $\dot{q}_l$ $(l=1,\ldots n)$. Получить их путем дифференцирования измеряемых процессов q_l в данном случае не представляется возможным, поскольку эта операция из-за погрешностей измерений является некорректной [2]. В работе [3] при решении подобной задачи использован метод специальных весовых функций. Опишем другой способ решения данной задачи идентификации, основанный на применении метода преобразующего оператора [4]. В этом случае процедура построения специальной системы весовых функций заменяется преобразованием измеряемых процессов при помощи одного линейного оператора. Ранее такой подход использовался для идентификации линейных механических систем [5–7].

После преобразования уравнения (1.1) по Лапласу, умножения полученного результата на $1/\Lambda(s)$ и перехода во временную область [4, 5] получаем

$$\sum_{l=1}^{n} m_{jl} z_l^{\cdot\cdot} + \sum_{l=1}^{n} \beta_{jl} z_l^{\cdot} + \sum_{r=1}^{\rho} c_{jr} \varphi_{jr}(t) = \chi_j + y_j \tag{1.3}$$

$$z_l^{(p)}(t) = \int_0^t w^{(p)}(t-\tau) q_l(\tau)\, d\tau, \qquad \varphi_{jr}(t) = \int_0^t w(t-\tau) f_{jr}(\tau)\, d\tau \tag{1.4}$$

$$\chi_j(t) = \int_0^t w(t-\tau) x_j(\tau)\, d\tau, \qquad w^{(p)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^p}{\Lambda(s)} e^{st}\, ds$$

$$y_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sum_{l=1}^{n} [(m_{jl}s + \beta_{jl}) q_l(0) + m_{jl} q_l^{\cdot}(0)] \Lambda^{-1}(s) e^{st}\, ds$$

$$(l, j = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, \rho;\ p = 0, 1, 2;\ i = \sqrt{-1})$$

Здесь $\Lambda(s)$ — некоторый полином с корнями в левой полуплоскости, s — оператор преобразования Лапласа, (p) — порядок производной по времени.

Если полином $\Lambda(s)$ выбран таким образом, что

$$\lim_{t\to\infty} y_j(t) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

то, начиная с некоторого момента времени t_0, принимаемого в дальнейшем за начало отсчета, составляющей $y_j(t)$ в уравнении (1.3) можно пренебречь (например, когда она становится соизмеримой с погрешностями измерений исходных данных):

$$\sum_{l=1}^{n} m_{jl} z_l^{\cdot\cdot} + \sum_{l=1}^{n} \beta_{jl} z_l^{\cdot} + \sum_{r=1}^{\rho} c_{jr} \varphi_{jr}(t) = \chi_j(t), \qquad t \in [t_0, T] \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Таким образом, задача определения значений коэффициентов уравнений (1.1) по экспериментальным данным (1.2) сведена к аналогичной задаче для уравнений (1.6) и процессов (1.4).

Из условия существования оригинала $y_j(t)$, входящего в (1.4), следует, что порядок полинома $\Lambda(s)$ должен быть не ниже второго. При этом в качестве преобразующего удобно выбрать оператор, у которого $\Lambda(s) = \nu^{-2}(s^2 + 2hs + \nu^2)$, $h > 0$, $w(t) = \nu^2 \lambda^{-1} e^{-ht} \sin \lambda t$, $\lambda = \sqrt{\nu^2 - h^2} > 0$.

Значения параметров преобразующего оператора ν и h определяются [6] из условия

$$\left| \frac{1}{\Lambda(i\omega)} \right| \cong \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \omega \leqslant \nu_n \\ 0 & \text{при} \quad \omega > \nu_n \end{cases}$$

Здесь ν_n — максимальная собственная частота идентифицируемой системы. При соответствующем выборе значений ν и h удается существенно уменьшить влияние высокочастотных составляющих погрешностей измерений $\Delta q_l(t)$, $\Delta x_j(t)$ и тем самым повысить точность и устойчивость решения задачи идентификации. Улучшения фильтрующих свойств оператора в области высоких частот можно достичь путем повышения порядка полинома $\Lambda(s)$:

$$\Lambda(s) = \nu^{-2k}(s^2 + 2hs + \nu^2)^k \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{1.7}$$

При этом [8]:

$$w(t) = \nu^{2k} \sum_{r=1}^{2} \sum_{l=1}^{k} \frac{\Phi_{rl}}{(k-l)!\,(l-1)!} t^{k-l} e^{s_r t} \tag{1.8}$$

$$\Phi_{rl}=\left[\frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}}\left(\frac{s-s_r}{(s-s_1)(s-s_2)}\right)^k\right]_{s=s_r}, \quad s_{1,2}=-h\pm i\lambda$$

Значения ν и h можно оценить следующим образом: $\nu\geqslant\nu_n$, $h=(0{,}5\div 0{,}6)\nu$. Начало отсчета $t_0\geqslant -h^{-1}\ln\xi$, где $\xi=y_j(t_0)/y_j(0)$ — величина, характеризующая относительное уменьшение составляющей $y_j(t)$ в уравнениях (1.3).

Для построения процедуры оценивания коэффициентов j-го уравнения системы (1.6) его удобно представить в виде

$$r_j(t)\,\alpha_j=\chi_j(t) \tag{1.9}$$

Здесь $r_j(t)=\|\ddot{z}_1,\ldots,\ddot{z}_n,\ \dot{z}_1,\ldots,\dot{z}_n,\ \varphi_{j1},\ldots,\varphi_{j\rho}\|$ — матрица-строка преобразованных процессов, $\alpha_j=\|m_{j1},\ldots,m_{jn},\ \beta_{j1},\ldots,\beta_{jn},\ c_{j1},\ldots,c_{j\rho}\|^T$ — матрица-столбец оцениваемых величин. После умножения (1.9) слева на $r_j^T(t+\tau)$ и осреднения по времени в интервале $[t_0,\ T-\tau]$ можно получить систему $(2n+\rho)$ алгебраических уравнений

$$R_j(\tau)\,\alpha_j=b_j(\tau) \tag{1.10}$$

$$R_j(\tau)=\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{T-\tau} r_j^T(t+\tau)\,r_j(t)\,dt, \qquad b_j(\tau)=\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{T-\tau} r_j^T(t+\tau)\,\chi_j(t)\,dt$$

$$\theta=T-\tau-t_0 \tag{1.11}$$

Если $\det R_j(\tau)\neq 0$, то

$$\alpha_j=R_j^{-1}(\tau)\,b_j(\tau) \tag{1.12}$$

При $\tau=0$ матрица $R_j(0)$ является матрицей Грама и для ее невырожденности необходимо, чтобы элементы матрицы-строки $r_j(t)$ были линейно независимыми функциями. В этом случае оценка (1.12) совпадает с оценкой по методу наименьших квадратов, которая, как известно, является смещенной. Применение способа компенсации систематических погрешностей [9] в элементах матриц $R_j(0)$ и $b_j(0)$ здесь оказывается затруднительным, поскольку необходимая априорная информация о смешанных моментах погрешностей измерений и полезных сигналов, как правило, отсутствует.

При $\tau\geqslant\tau_0$ смещение оценки типа (1.12) иногда можно уменьшить без использования указанной априорной информации. Условие невырожденности матрицы $R_j(\tau)$ остается таким же, как и для матрицы $R_j(0)$.

Вследствие исходного предположения (1.2) об аддитивном характере погрешностей измерений $\chi_j=\chi_j^*+\Delta\chi_j$. Если при этом имеет место представление $\varphi_{jl}=\varphi_{jl}^*+\Delta\varphi_{jl}$, то тогда $r_j=r_j^*+\Delta r_j$ и $R_j(\tau)=R_j^*(\tau)+\Delta R_j(\tau)$, $b_j(\tau)=b_j^*(\tau)+\Delta b_j(\tau)$.

Выражения для точных значений $R_j^*(\tau)$, $b_j^*(\tau)$ могут быть получены при помощи (1.11) заменой r_j и χ_j соответственно на r_j^* и χ_j^*, а полные погрешности вычисления элементов матриц $R_j(\tau)$ и $b_j(\tau)$ имеют вид

$$\Delta R_j(\tau)=\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{T-\tau}[r_j^{*T}(t+\tau)\,\Delta r_j(t)+\Delta r_j^T(t+\tau)\,r_j^*(t)+\Delta r_j^T(t+\tau)\,\Delta r_j(t)]\,dt$$

$$\Delta b_j(\tau)=\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{T-\tau}[r_j^{*T}(t+\tau)\,\Delta\chi_j(t)+\Delta r_j^T(t+\tau)\,\chi_j^*(t)+\Delta r_j^T(t+\tau)\,\Delta\chi_j(t)]\,dt \tag{1.13}$$

Правые части (1.13) представляют собой сумму оценок корреляционных матриц элементов матриц r_j^*, Δr_j и $\Delta\chi_j$. Так как, по предположению, погрешности измерений исходных данных коррелированы между собой и с полезными сигналами на конечном интервале $[0,\ \tau_0]$, то для систематических погрешностей вычисления элементов матриц $R_j(\tau)$ и $b_j(\tau)$, определяемых как математические ожидания полных погрешностей (1.13), при $\tau\geqslant\tau_0$ зачастую будут справедливы следующие соотношения: $\mathrm{Norm}(\langle\Delta R_j(0)\rangle)\geqslant\mathrm{Norm}(\langle\Delta R_j(\tau_0)\rangle)$, $\mathrm{Norm}(\langle\Delta b_j(0)\rangle)\geqslant\mathrm{Norm}(\langle\Delta b_j(\tau_0)\rangle)$, где $\mathrm{Norm}(\ldots)$ — евклидова норма, $\langle\ldots\rangle$ — операция математического ожидания. В этих случаях можно уменьшить по норме смещение оценки α_j путем решения системы уравнений (1.10) при $\tau \geqslant \tau_0$. Следует отметить, что при идентификации нелинейных систем при помощи данного способа не удается полностью скомпенсировать систематические погрешности, что имеет место в случае рассмотрения линейных систем [6].

2. Положим теперь, что движение механической системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\sum_{l=1}^{n} m_{jl} q_l^{\cdot\cdot} + \sum_{i=1}^{\mu} \beta_{ji} h_{ji}(q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}) + \sum_{l=1}^{n} c_{jl} q_l = x_j(t) \qquad (j=1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

в которых $h_{ji}(q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$ — некоторые известные нелинейные функции, определяющие характер диссипативных сил. В дальнейшем они обозначаются как $h_{ji}(t)$.

В качестве исходных данных используются процессы

$$q_l^{\cdot}(t),\ x_j(t),\ t \in [0, T] \quad (l, j=1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Уравнения (2.1), преобразованные с помощью оператора $s/\Lambda(s)$, запишем следующим образом:

$$\sum_{l=1}^{n} m_{jl} z_l^{\cdot\cdot} + \sum_{i=1}^{\mu} \beta_{ji} \eta_{ji}(t) + \sum_{l=1}^{n} c_{jl} z_l = \chi_j, \qquad t \in [t_0, T] \tag{2.3}$$

$$z_l^{(p)}(t) = \int_0^t w^{(p)}(t-\tau) q_l^{\cdot}(\tau)\, d\tau, \qquad \eta_{ji}(t) = \int_0^t w^{\cdot}(t-\tau) h_{ji}(\tau)\, d\tau$$

$$\chi_j(t) = \int_0^t w^{\cdot}(t-\tau) x_j(\tau)\, d\tau \qquad (l, j=1, \ldots, n;\ i=1, \ldots, \mu;\ p=0, 1, 2)$$

При этом функция $w(t)$ такая же, как и в выражении (1.4). Для удовлетворения условия (1.5) необходимо, чтобы порядок полинома был не ниже третьего. В этом случае его удобно выбрать в виде (1.7), полагая $k \geqslant 2$.

Оценка матрицы-столбца неизвестных $\alpha_j = \|m_{j1}, \ldots, m_{jn}, \beta_{j1}, \ldots, \beta_{j\mu}, c_{j1}, \ldots, c_{jn}\|^T$ находится при помощи выражения (1.12). При этом $r_j(t) = \|z_1^{\cdot\cdot}, \ldots, z_n^{\cdot\cdot}, \eta_{j1}, \ldots, \eta_{j\mu}, z_1, \ldots, z_n\|$.

3. Рассмотрим механические системы с нелинейными демпфированием и жесткостью, колебания которых описываются уравнениями

$$\sum_{l=1}^{n} m_{jl} q_l^{\cdot\cdot} + \sum_{i=1}^{\mu} \beta_{ji} h_{ji}(q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}) + \sum_{r=1}^{\rho} c_{jr} f_{jr}(q_1, \ldots, q_n) = x_j(t) \qquad (j=1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

В этом случае для решения задачи идентификации коэффициентов уравнений (3.1) рассмотренным способом необходимо измерять как перемещения q_l, так и скорости $q_l^{\cdot}$ отдельных точек механической системы.

Уравнения (3.1), преобразованные при помощи оператора $s^p/\Lambda(s)$, принимают вид

$$\sum_{l=1}^{n} m_{jl} z_l^{\cdot\cdot} + \sum_{i=1}^{\mu} \beta_{ji} \eta_{ji}(t) + \sum_{r=1}^{\rho} c_{jr} \varphi_{jr}(t) = \chi_j, \qquad t \in [0, T]$$

$$z_l^{\cdot\cdot}(t) = \int_0^t w(t-\tau) q_l^{(p)}(\tau)\, d\tau, \qquad \eta_{ji}(t) = \int_0^t w^{(p)}(t-\tau) h_{ji}(\tau)\, d\tau$$

$$\varphi_{jr}(t) = \int_0^t w^{(p)}(t-\tau) f_{jr}(\tau)\, d\tau, \qquad \chi_j(t) = \int_0^t w^{(p)}(t-\tau) x_j(\tau)\, d\tau$$

$$(l, j=1, \ldots, n; i=1, \ldots, \mu; r=1, \ldots, \rho)$$

При этом порядок производной (p) равен нулю или единице. Оценка неизвестных коэффициентов j-го уравнения системы (3.1): $\alpha_j = \|m_{j1}, \ldots, m_{jn}, \beta_{j1}, \ldots, \beta_{j\mu}, c_{j1}, \ldots, c_{j\rho}\|^T$ может быть найдена при помощи выражения (1.12). В данном случае $r_j = \|z_1^{\cdot\cdot}, \ldots, z_n^{\cdot\cdot}, \eta_{j1}, \ldots, \eta_{j\mu}, \varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{j\rho}\|$.

4. Приведем примеры идентификации нелинейных механических систем.

1. Решалась тестовая задача определения оценок коэффициентов уравнения Дуффинга

$$mq^{\cdot\cdot} + \beta q^{\cdot} + cq + c_1 q^3 = x \tag{4.1}$$

По реализации $q(t)$, полученной численным интегрированием уравнения (4.1) с шагом $\Delta t = 0{,}0004$ с при

$$x(t) = a \sum_{r=0}^{8} \sin(\omega_0 + r\Delta\omega)t, \qquad t \in [0, T]$$

где $a = 100$ кН, $\omega_0 = 10$ Гц, $\Delta\omega = 5$ Гц, $T = 1$ с, были восстановлены значения коэффициентов m, β, c, c_1. Погрешности измерений процессов q и x моделировались при помощи датчика центрированных гауссовских случайных чисел. Максимальные значения этих погрешностей составляли 10% от уровня полезных сигналов.

Для решения задачи использован преобразующий оператор $1/\Lambda(s)$, у которого $\Lambda(s)$ выбран в виде (1.7) с параметрами $k=2$, $h=0{,}6\nu$, $\nu = 50$ Гц. Оценки коэффициентов уравнения (4.1) вычислены с использованием выражения (1.12) путем осреднения выборочных оценок для восемнадцати реализаций случайных чисел.

Ниже приведены результаты вычислений, полученные для четырех значений τ, относительные погрешности найденных оценок δ, а также точные значения идентифицируемых коэффициентов

m (кг)	3750	3620	3,5	3640	2,9	3670	2,1	3684	1,8
β (кН·м$^{-1}$·с)	100	98,4	1,6	98,3	1,7	98,2	1,8	98,2	1,8
c (мН·м$^{-1}$)	50	46,5	7,0	46,5	7,0	46,6	6,8	46,5	7,0
c_1 (мН·м$^{-3}$·10^6)	4,0	3,84	4,0	3,87	3,2	3,9	2,5	3,92	2,0

В первом столбце приведены обозначения оцениваемых коэффициентов и их размерности, во втором — их точные значения. В 3-м, 5-м, 7-м и 9-м приведены их оценки, а в 4-м, 6-м, 8-м и 10-м — погрешности этих оценок (в %) соответственно для четырех значений τ: 0; $5\Delta t$; $10\Delta t$ и $15\Delta t$.

Нормы относительных погрешностей в указанных четырех случаях составили соответственно: 0,089, 0,085, 0,077 и 0,077. Анализ этих результатов показывает, что погрешности получаемых оценок коэффициентов меньше погрешностей исходных данных, а смещение отдельных оценок коэффициентов уменьшается с ростом τ. Уменьшается при этом и норма относительных погрешностей.

2. Предлагаемый способ идентификации был использован при определении оценок отдельных коэффициентов дифференциального уравнения

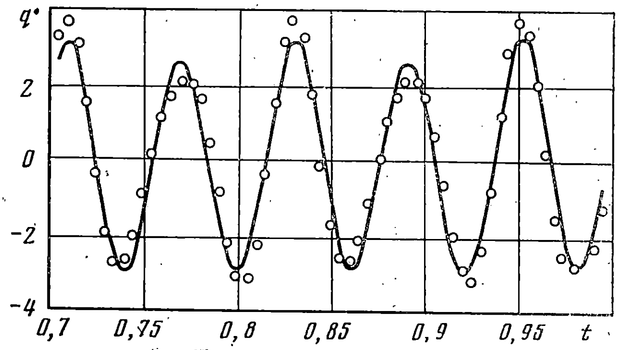
$$q^{\cdot\cdot} + (2n+a)q^{\cdot} + bq^{\cdot 3} + \omega_0^2 q = f_1 \cos\omega_0 t + f_2 \cos 2\omega_0 t \tag{4.2}$$

описывающего процесс аэроупругих автоколебаний одного из двух круговых цилиндров, взаимодействующих в скошенном ветровом потоке [10]. Неизвестными в данном случае являются величины a, b, f_1, f_2. Значения остальных параметров, входящих в уравнение (4.2), были известны априори: $n = 2{,}29$ с$^{-1}$, $\omega_0 = 8{,}25$ Гц.

В качестве исходной информации о движении идентифицируемой системы использована реализация процесса $q^{\cdot}(t)$, полученная по экспериментальным данным об автоколебаниях цилиндра (второго по потоку). При этом время наблюдения $T = 1{,}2$ с.

Для решения данной задачи описанным способом уравнение (4.2) удобно представить в виде

$$aq^{\cdot} + bq^{\cdot 3} - f_1\cos\omega_0 t - f_2 \cos 2\omega_0 t = \varkappa, \qquad \varkappa = -q^{\cdot\cdot} - 2nq^{\cdot} - \omega_0^2 q \tag{4.3}$$



Соотношение (4.3) после преобразования его при помощи оператора $s/\Lambda(s)$ принимает вид

$$az^{\bullet}+b\eta(t)+f_1k_1(t)-f_2k_2(t)=\chi$$

$$\eta(t)=\int_0^t w^{\bullet}(t-\tau)q^{\bullet 3}(\tau)d\tau, \qquad k_r(t)=\int_0^t w^{\bullet}(t-\tau)\cos r\omega_0\tau\, d\tau$$

$$\chi=-z^{\bullet\bullet}-2nz^{\bullet}-\omega_0^2 z \quad (r=1, 2)$$

Выражения для $z^{(p)}$ были получены с использованием формул (2.3), а $w^{(p)}(t)$ — формул (1.4). Тогда матрица-столбец неизвестных коэффициентов имеет вид $\alpha=\|a, b, f_1, f_2\|^T$, а матрица-строка — $r(t)=\|z^{\bullet}(t), \eta(t), k_1(t), k_2(t)\|$. Значения параметров преобразующего оператора были выбраны такими же, как и в примере 1. Оценки неизвестных, полученные при $\tau=0$, оказались следующими: $a=-5{,}36$ с$^{-1}$; $b=93{,}4$ с·м$^{-2}$; $f_1=1{,}37$ м·с$^{-2}$; $f_2=-226$ м·с$^{-2}$.

На фигуре приведены результаты сопоставления реакции построенной математической модели автоколебаний с экспериментальными данными. Сплошной линией показан график изменения от времени t (с) процесса $q^{\bullet}$ (м·с$^{-1}$), полученный численным интегрированием уравнения (4.2) при идентифицированных значениях коэффициентов, точками — результаты эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
3. *Плахтиенко Н. П.* Метод специальных весовых функций в задаче параметрической идентификации нелинейных механических систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 30–35.
4. *Янг П. К.* Метод параметрической оценки и адаптивного управления.— В кн.: Теория самонастраивающихся систем управления. М.: Наука, 1969, с. 123–143.
5. *Лазарян В. А., Кременуло Ю. В., Яковлев В. П., Редько С. Ф., Ушкалов В. Ф.* Об оценке погрешностей идентификации линейных механических систем алгебраическим способом.— Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 9, с. 78–84.
6. *Ушкалов В. Ф., Резников Л. М., Редько С. Ф.* Статистическая динамика рельсовых экипажей. Киев: Наук. думка, 1982. 359 с.
7. *Редько С. Ф.* Использование преобразующего оператора в задаче идентификации механических систем по временным данным.— В кн.: Нагруженность, прочность, устойчивость движения механических систем. Киев: Наук. думка, 1980, с. 143–150.
8. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 466 с.
9. *Маслов Е. П.* Метод оценки динамических характеристик объектов управления.— Электричество, 1966, № 8, с. 5–11.
10. *Казакевич М. И., Графский И. Ю., Редько С. Ф.* Идентификация ультрагармонических автоколебаний при аэродинамической интерференции тандема круговых цилиндров в скошенном потоке.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1985, № 4, с. 27–30.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
3.IV.1984