

УДК 534.1

**О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСАХ
ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ СУХОГО ТРЕНИЯ**

ГОЛУБКОВ А. В., СЕМЕНОВ В. А.

Параметрическим колебаниям механических систем посвящена обширная литература [1, 2]. Наиболее подробно разработана теория параметрических колебаний упругих систем, содержащих нелинейные силы аналитического характера. В [3–5] рассмотрены параметрические колебания при наличии сил сухого трения. В реальных системах, как правило, наблюдаются одновременно нелинейности различных типов. Поэтому представляет интерес изучение стационарных колебаний параметрически возбуждаемых систем при наличии как аналитических нелинейностей, так и нелинейностей типа сил сухого трения.

В публикуемой работе изучаются параметрические колебания механических систем, содержащих помимо сил сухого трения аналитические диссипативные и восстанавливающие силы. Проведен анализ колебательных процессов в условиях простых и комбинационных резонансов на основе метода Крылова – Боголюбова. Результаты сопоставлены с данными вычислительного эксперимента.

1. Рассматривается система, уравнения возмущенного движения которой имеют вид

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + 2\gamma_k \frac{dx_k}{dt} + \eta_k \operatorname{sign} \frac{dx_k}{dt} + \omega_k^2 \left(x_k + 2\mu \cos \omega t \sum_{l=1}^n g_{kl} x_l \right) + f_k \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

Здесь x_k – обобщенные координаты, γ_k – коэффициенты, характеризующие интенсивность сил вязкого трения, η_k – коэффициенты сил сухого трения, ω_k – частоты собственных колебаний системы, ω – частота параметрического возбуждения, μ – глубина модуляции, g_{kl} – элементы матрицы связи обобщенных координат, f_k – характеристики нелинейных восстанавливающих и диссипативных сил. К уравнению (1.1) приводят многие задачи параметрических колебаний упругих систем [4].

При анализе системы (1.1) будем различать три характерных случая [2, 6]: $g_{ij}g_{ji}=0$ ($i \neq j$) – имеют место только простые резонансы; $g_{ij}g_{ji}>0$ – может возникнуть комбинационный резонанс суммарного типа

$$\omega = (\omega_i + \omega_j) / p \quad (i \neq j, p=1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

В случае, когда произведение $g_{ij}g_{ji}<0$ ($i \neq j$) возможен комбинационный резонанс на разности частот

$$\omega = (|\omega_i - \omega_j|) / p \quad (i \neq j, p=1, 2, \dots) \quad (1.3)$$

2. Остановимся на анализе главных параметрических резонансов

$$\omega = 2\omega_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

Без ограничения общности их исследование можно провести на системе с одной степенью свободы. Решение $x(t)$ в этом случае близко к периодическому с частотой $\omega/2$. Полагая $n=1$, вместо системы (1.1) будем ис-

следовать уравнение

$$\frac{d^2 x_h}{dt^2} + v^2 x = h \left(\theta, x, \frac{dx}{dt} \right) \quad \left(v = \frac{\omega}{2}, \theta = \omega t \right) \quad (2.2)$$

$$h = (v^2 - \omega_0^2)x - 2\gamma \frac{dx}{dt} - \eta \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} - 2\mu\omega_0^2 x \cos \theta - f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \quad (2.3)$$

Если $v^2 - \omega_0^2 \ll 1$, силы вязкого и сухого трения, коэффициент модуляции параметрического возбуждения, а также нелинейные восстанавливающие и диссипативные силы малы, то для анализа уравнения (2.2) можно применить метод Крылова — Боголюбова [7].

Известно [1], что в условиях резонанса решение уравнения (2.2) приближенно описывается соотношениями

$$x(t) = a \sin \psi, \quad dx/dt = va \cos \psi, \quad \psi = vt + \varphi \quad (2.4)$$

где амплитуда $a(t)$ и фаза $\varphi(t)$ колебательного процесса должны удовлетворять следующей системе уравнений первого приближения метода Крылова — Боголюбова:

$$\begin{aligned} da/dt &= -\gamma a - 2\eta/(\pi\omega_0) - 1/2\mu\omega_0 a \sin 2\varphi - H_1(a) \\ d\varphi/dt &= 4\omega_0^2 - \omega^2/(\delta\omega_0) - 1/2\mu\omega_0 \cos 2\varphi - H_2(a) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь функции $H_1(a)$ и $H_2(a)$ определяются видом нелинейных восстанавливающих и диссипативных сил

$$H_1(a) = \frac{1}{2\pi v} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, va \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad (2.6)$$

$$H_2(a) = \frac{1}{2\pi va} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, va \cos \psi) \sin \psi d\psi$$

Стационарные значения амплитуды и фазы определяем из соотношений

$$\delta(a) + 1/2\omega\mu_0 \sin 2\varphi = 0 \quad (2.7)$$

$$1/8(4\omega_0^2 - \omega^2)/\omega_0 - H_2(a) - 1/2\mu\omega_0 \cos 2\varphi = 0$$

$$\delta(a) = \gamma + 2\eta/(\pi\omega_0 a) + H_1(a)/a \quad (2.8)$$

Исключая из полученных соотношений фазу φ , получаем зависимость между амплитудой стационарных колебаний a и частотой параметрического возбуждения ω :

$$4\delta^2(a) + \{[\omega_0^2 - (\omega/2)^2]/\omega_0 - 2H_2(a)\}^2 - \mu^2\omega_0^2 = 0 \quad (2.9)$$

Из уравнения в вариациях имеем, что стационарный режим $x(t) = a_0 \sin \psi_0$ будет устойчив, если выполняются неравенства

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{H_1(a)}{a} \right] \Big|_{a=a_0} + \frac{2\gamma}{a_0} + \frac{2\eta}{\pi\omega_0^2 a_0^2} + \frac{2H_1(a_0)}{a_0^2} > 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & 2 \left(\gamma + \frac{2\eta}{\pi\omega_0 a_0} + \frac{H_1(a_0)}{a_0} \right) \left\{ \frac{2\eta}{\pi\omega_0 a_0^2} - \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{H_1(a)}{a} \right] \Big|_{a=a_0} \right\} + \\ & + \left[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \right] \frac{1}{\omega_0} \left[\frac{\partial H_2(a)}{\partial a} \right] \Big|_{a=a_0} + \frac{H_2(a_0)}{2} \left[\frac{\partial H_2(a)}{\partial a} \right] \Big|_{a=a_0} < 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда нелинейная упругость в системе отсутствует, а аналитические диссипативные силы подчиняются следующему закону:

$$f(x, dx/dt) = 2\varepsilon x^2 dx/dt \quad (2.11)$$

т.е. $H_1(a) = \varepsilon a^3/4$, $H_2(a) = 0$. Тогда первое условие в (2.10) соблюдается

всегда и устойчивость стационарных колебаний определяется неравенством

$$(\gamma + 2\eta / (\pi \omega_0 a_0) + 1/4 \varepsilon a_0^2) (2\eta / (\pi \omega_0 a_0^2) - 3/4 \varepsilon a_0^2) < 0 \quad (2.12)$$

Таким образом, существует точка ветвления

$$a_* = [8/3 \eta / (\pi \varepsilon \omega_0)]^{1/4} \quad (2.13)$$

в которой происходит смена устойчивости стационарных режимов колебаний. Устойчивым значениям соответствует ветвь кривой (2.9), для которой резонансные кривые лежат выше значений a_* , и неустойчивым — та, для которой амплитудные значения меньше a_* .

На фазовой плоскости неустойчивая ветвь представляется седловой точкой. В эту точку входят две траектории, образующие сепаратрису, которая делит плоскость начальных значений на области, приводящие к тривиальному решению или стационарным режимам колебаний.

Если в исходной системе отсутствуют силы сухого трения, т.е. $\eta = 0$, тогда имеется только устойчивая ветвь, так как условие (2.12) всегда будет выполнено. Резонансные режимы для этого случая исследованы достаточно подробно [1, 2]. Если же в исходной системе нет нелинейного затухания ($\varepsilon = 0$), то условие (2.12) никогда не выполняется и существует только неустойчивая ветвь амплитудно-частотной зависимости, что согласуется с результатами, полученными в [5].

На фиг. 1 приведены резонансные кривые для $\mu = 0,1$, $\gamma = 0,01$, $\eta = 0,01$, $\omega_0 = 1$ и различных значениях нелинейного затухания ε . Тонкие линии соответствуют результатам, полученным на основе соотношения (2.9). Штриховыми линиями показаны неустойчивые ветви амплитудно-частотной зависимости. Увеличение нелинейного трения ведет к уменьшению амплитуд устойчивых колебаний и оказывает незначительное влияние на неустойчивую ветвь. Точками отмечены критические значения a_* . Чем больше ε , тем при меньших значениях амплитуды наблюдается ветвление решения. Для того чтобы в системе появились стационарные колебания, необходим заброс в область выше неустойчивой ветви.

Некоторые результаты исследования влияния сил сухого трения на амплитудно-частотные зависимости приведены на фиг. 2. При вычислениях принято $\mu = 0,2$, $\varepsilon = 0,1$, $\gamma = 0,01$, $\omega_0 = 1$. Увеличение сил сухого трения приводит к стабилизации колебаний, причем амплитуды, соответствующие неустойчивой ветви, могут принимать достаточно большие значения. Чем больше параметр сухого трения η , тем выше положение точки ветвления a_* и тем уже область резонирования.

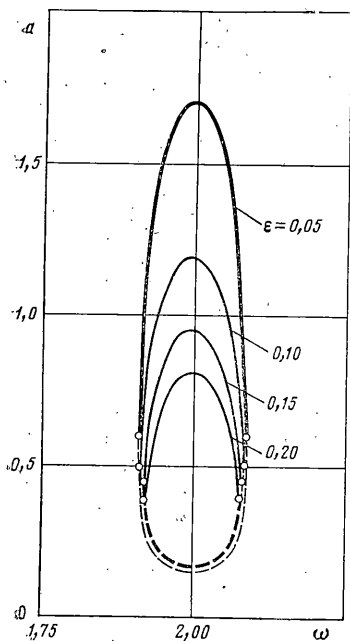
В качестве другого примера рассмотрим колебательную систему с нелинейной восстанавливающей силой $f(x, dx/dt) = \beta x^3$. Для получения стационарных значений амплитуды можно использовать уравнение (2.9). В случае, если $\beta > 0$, получим резонансные кривые, приведенные на фиг. 3. Здесь тонкие линии соответствуют методу Крылова — Боголюбова. Штриховые линии изображают неустойчивые ветви амплитудно-частотных зависимостей. Вычисления проведены при $\mu = 0,1$, $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,01$, $\omega_0 = 1$.

3. Рассмотрим случай комбинационных параметрических резонансов. Остановимся подробнее на резонансах, отвечающих соотношениям (1.2) и (1.3) при $p = 1$. Для ряда практических приложений именно эти резонансные режимы могут быть наиболее опасны [6]. Ограничимся изучением систем с двумя степенями свободы, содержащих помимо сил сухого трения нелинейные восстанавливающие силы вида

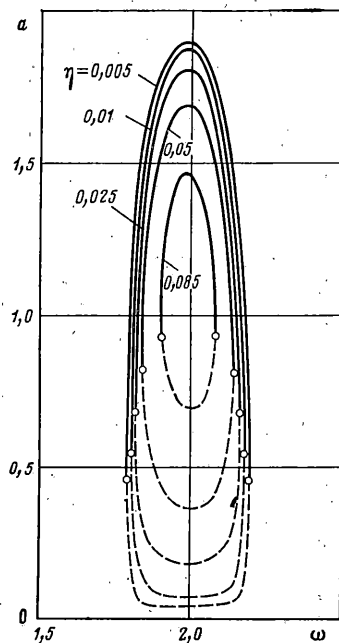
$$f_k = \beta_k x_k (x_1^2 + x_2^2) \quad (k = 1, 2) \quad (3.1)$$

При отсутствии внутренних резонансов, решения x_1 и x_2 с частотами ν_1 и ν_2 вблизи комбинационного резонанса $\omega = |\omega_1 \pm \omega_2|$ будут близки к периодическим с частотами ω_1 и ω_2 [2]. Пусть для определенности $\omega_2 > \omega_1$. Полагая расстройки между ν_1 , ν_2 и ω_1 , ω_2 малыми, приведем систему (1.1) к виду

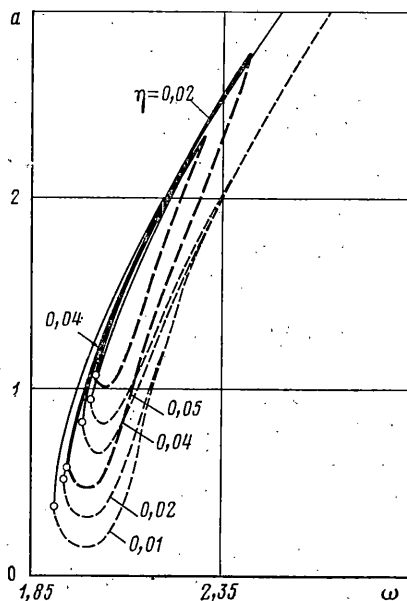
$$\begin{aligned} d^2 x_k / dt^2 + \nu_k^2 x_k &= h_k(\theta, x_1, x_2, dx_k / dt) \\ h_k &= (\nu_k^2 - \omega_k^2) x_k - 2\gamma_k dx_k / dt - \eta_k \operatorname{sign} dx_k / dt - \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$-2\mu\omega^2 \cos \theta \sum_{l=1}^2 g_{hl}x_l - \beta_h x_h (x_1^2 + x_2^2), \quad \theta = \omega t$$

Решение системы (3.2) ищем в виде [7]:

$$x_h = a_h \sin \psi_h, \quad dx_h/dt = v_h a_h \cos \psi_h \quad (3.3)$$

где $\psi_h = v_h t + \varphi_h$, а $a_h(t)$ и $\varphi_h(t)$ — медленно меняющиеся функции времени.

Реализуя процедуру метода Крылова — Боголюбова, получаем уравнения первого приближения

$$da_1/dt = -\gamma_1 a_1^{-1/2} \mu \omega_1 g_{12} a_2 \sin \varphi - 2\eta / (\pi \omega_1) \quad (3.4)$$

$$da_2/dt = -\gamma_2 a_2^{-1/2} \mu \omega_2 g_{21} a_1 \sin \varphi - 2\eta / (\pi \omega_2)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\omega_1^2 - \nu_1^2}{2\omega_1} - \frac{1}{2} q\mu\omega_1 g_{12} \frac{a_2}{a_1} \cos \varphi + \frac{\beta_1}{8\omega_1} (3a_1^2 + 2a_2^2)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\omega_2^2 - \nu_2^2}{2\omega_2} - \frac{1}{2} q\mu\omega_2 g_{21} \frac{a_1}{a_2} \cos \varphi + \frac{\beta_2}{8\omega_2} (3a_2^2 + 2a_1^2)$$

Здесь и далее $\varphi = \varphi_2 + q\varphi_1$; параметр $q=1$, когда произведение $g_{ij}g_{ji} > 0$ ($i \neq j$), т. е. возможен комбинационный резонанс суммарного типа, и $q=-1$, если произведение $g_{ij}g_{ji} < 0$ ($i \neq j$), т. е. может возникнуть резонанс на разности частот.

С принятой степенью точности

$$^{1/2}(\omega_k^2 - \nu_k^2)/\omega_k = \omega_k - \nu_k = \Delta\nu_k \quad (3.5)$$

Учитывая резонансное отношение $\omega = \nu_2 + q\nu_1$, получим, что расстройки $\Delta\nu_1$ и $\Delta\nu_2$ связаны с возбуждающей частотой ω и собственными частотами ω_1 и ω_2 соотношением

$$\Delta\nu_2 + q\Delta\nu_1 = \omega_2 + q\omega_1 - \omega \quad (3.6)$$

из которого следует, что система уравнений первого приближения (3.4) для исследования стационарных режимов колебаний может быть приведена к виду

$$\gamma_1 a_1 + ^{1/2}\mu\omega_1 g_{12} a_2 \sin \varphi + 2\eta_1 / (\pi\omega_1) = 0 \quad (3.7)$$

$$\gamma_2 a_2 + ^{1/2}q\mu\omega_2 g_{21} a_1 \sin \varphi + 2\eta_2 / (\pi\omega_2) = 0$$

$$\omega_2 + q\omega_1 - \omega - q \frac{\mu(q\omega_1 g_{12} a_2^2 + \omega_2 g_{21} a_1^2)}{2a_1 a_2} \cos \varphi +$$

$$+ q \frac{\beta_1}{8\omega_1} (3a_1^2 + 2a_2^2) + \frac{\beta_2}{8\omega_2} (3a_2^2 + 2a_1^2) = 0$$

Из первых двух уравнений системы (3.7) можно определить соотношение между амплитудами установившихся колебаний в направлениях обобщенных координат x_1 и x_2 :

$$\omega_2^2 g_{21} a_1 (\gamma_1 a_1 \pi \omega_1 + 2\eta_1) = q\omega_1^2 g_{12} a_2 (\gamma_2 a_2 \pi \omega_2 + 2\eta_2) \quad (3.8)$$

Если силы сухого трения отсутствуют, то получаем, что

$$a_1/a_2 = [\omega_1 \gamma_2 |g_{12}| / (\omega_2 \gamma_1 |g_{21}|)]^{1/2} \quad (3.9)$$

При отсутствии сил вязкого трения

$$a_1/a_2 = \omega_1^2 \eta_2 |g_{12}| / (\omega_2^2 \eta_1 |g_{21}|) \quad (3.10)$$

Этому же соотношению амплитуды стационарных колебаний будут приближенно удовлетворять и в том случае, если $a_1, a_2 \ll 1$.

Из (3.7) следует, что зависимость между амплитудами a_1, a_2 и частотой параметрического возбуждения ω имеет вид

$$\frac{4a_1^2 a_2^2 (\omega_2 + q\omega_1 - \omega + k_1 a_2^2 + k_2 a_1^2)^2}{\mu^2 (\omega_2 g_{21} a_1^2 + q\omega_1 g_{12} a_2^2)^2} + \frac{4(\pi\gamma_1 \omega_1 a_1 + 2\eta_1)^2}{g_{12}^2 \pi^2 \mu^2 \omega_1^4 a_2^2} = 1$$

$$k_1 = \frac{3\beta_2 \omega_1 + 2q\beta_1 \omega_2}{8\omega_1 \omega_2}, \quad k_2 = \frac{2\beta_2 \omega_1 + 3q\beta_1 \omega_2}{8\omega_1 \omega_2} \quad (3.11)$$

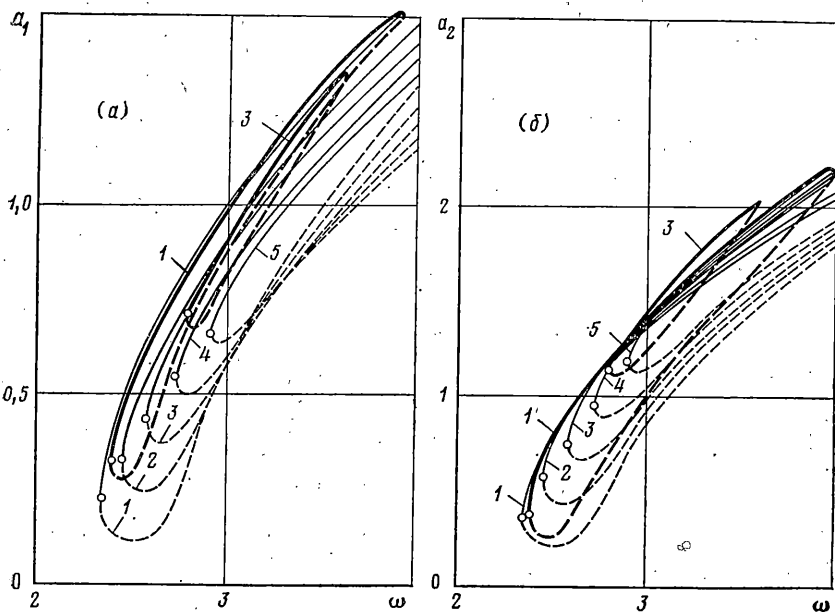
Условия устойчивости стационарных режимов $x_k(t) = a_k^0 \sin \varphi_k^0$ определяются уравнением $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$, где

$$a_{11} = -\gamma_1, \quad a_{12} = -^{1/2}\mu\omega_1 g_{12} \sin \varphi_0, \quad a_{13} = -^{1/2}\mu\omega_1 g_{12} a_2^0 \cos \varphi_0$$

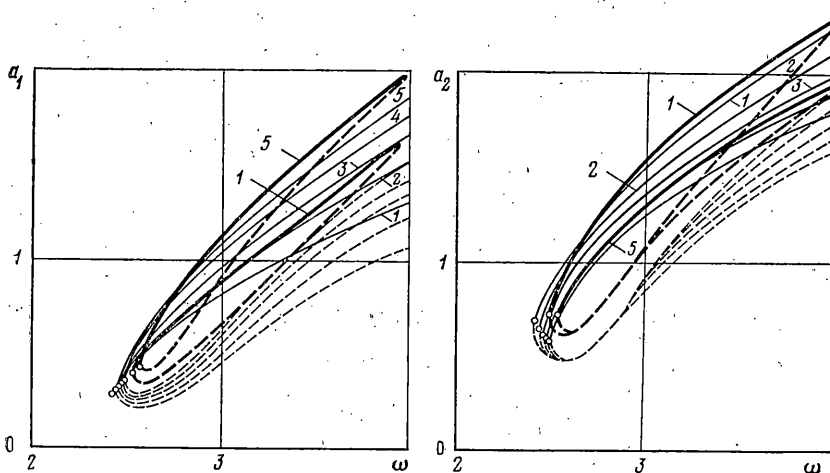
$$a_{21} = -^{1/2}q\mu\omega_2 g_{21} \sin \varphi_0, \quad a_{22} = -\gamma_2, \quad a_{23} = -^{1/2}q\mu\omega_2 g_{21} a_1^0 \cos \varphi_0$$

$$a_{31} = a_1^0 (3q\beta_1 \omega_2 + 2\beta_2 \omega_1) / (4\omega_1 \omega_2) + q\mu \cos \varphi_0 (q\omega_1 g_{12} a_2^0 - \omega_2 g_{21} a_1^0) / (2a_1^0 a_2^0)$$

$$a_{32} = a_2^0 (2q\beta_1 \omega_2 + 3\beta_2 \omega_1) / (4\omega_1 \omega_2) - q\mu \cos \varphi_0 (\omega_2 g_{21} a_1^0 - q\omega_1 g_{12} a_2^0) / (2a_1^0 a_2^0)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

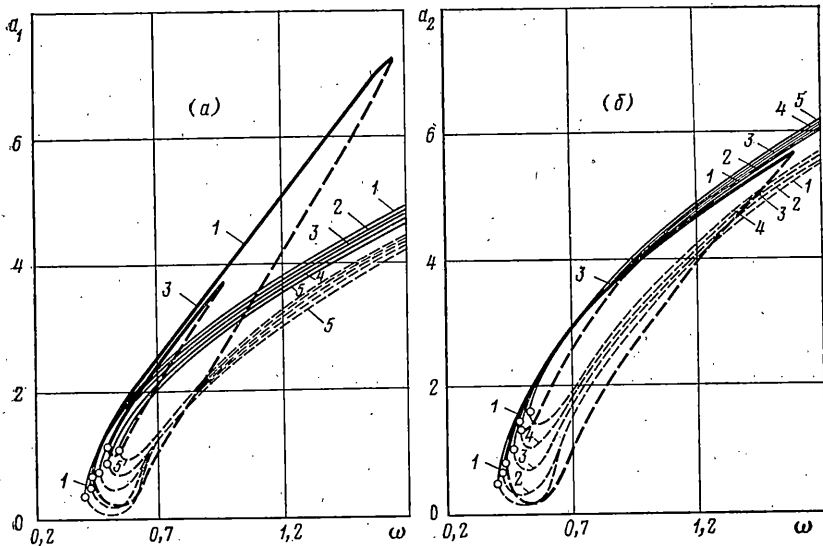
$$a_{33} = \mu q \sin \varphi_0 (q\omega_1 q_{12} a_2^2 + \omega_2 g_{21} a_1^2) / (2a_1^0 a_2^0); \quad \varphi_0 = \varphi_2^0 + q\varphi_1^0$$

Практически анализ устойчивости стационарных режимов удобно проводить численно на основе пакета прикладных программ PSTAB [8].

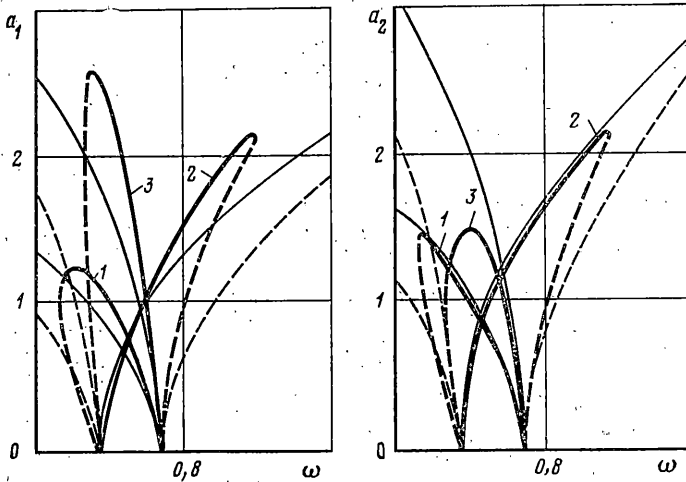
На фиг. 4–7 приведены амплитудно-частотные зависимости в условиях комбинационных резонансов при различных значениях параметров системы (1.1). Тонкие линии соответствуют результатам аналитических исследований на основе метода Крылова – Боголюбова, штриховые линии отображают неустойчивые ветви. Вычисления проведены при $\omega_2 = 3\omega_1/2$.

Фиг. 4 и 5 построены для случая, когда элементы матрицы связи таковы, что $g_{11} = g_{22} = 0$, $g_{12} = g_{21} = 1$, т. е. при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ исходная система является канонической. На фиг. 4 при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,025$, $\mu = 0,2$, $\beta_1 = \beta_2 = 0,5$ показано влияние сил сухого трения на процесс колебаний. Зависимости 1–5 соответствуют увеличению сил сухого трения $\eta_1 = \eta_2$ с 0,04 до 0,2 с шагом 0,04. Фиг. 5 демонстрирует дестабилизирующий эффект вязкого трения. Здесь приняты следующие параметры системы: $\mu = 0,2$, $\beta_1 = \beta_2 = 0,5$, $\eta_1 = \eta_2 = 0,1$, $\gamma_1 = 0,001$. Кривые 1–5 построены при увеличении парциального коэффициента вязкого трения γ_2 с 0,005 до 0,025 с шагом 0,005.

На фиг. 6 и 7 приведены амплитудно-частотные зависимости в областях комбинационного резонанса разностного типа. Элементы матрицы связи приняты следующими: $g_{11} = g_{22} = 0$, $g_{12} = -g_{21} = 1$. Фиг. 6 построена при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,025$, $\mu = 0,1$,



Фиг. 6



Фиг. 7

$\beta_1=0$, $\beta_2=0,1$. Зависимость 1 соответствует $\eta_1=\eta_2=0,01$, зависимость 2 — 0,025, зависимость 3 — 0,05, зависимость 4 — 0,075, зависимость 5 — 0,1.

В условиях комбинационных резонансов может происходить изменение направления затягивания даже при положительных характеристиках нелинейных восстанавливающих сил вида (3.1). В случае, когда силы сухого трения отсутствуют, удается получить аналитическое соотношение, определяющее это направление. Например, для существенно несимметричных элементов матрицы связи ($g_{12} = -g_{21} = 1$) приходим к следующему неравенству: $(3\gamma_1\omega_1\omega_2 + 2\gamma_2\omega_1^2) / (3\gamma_2\omega_1\omega_2 + 2\gamma_1\omega_2^2) \beta_2 < \beta_1$.

Если условие (3.9) выполнено, то происходит затягивание в сторону меньших частот, если не выполнено — то в сторону больших частот параметрического воздействия. Случай несимметричной характеристики нелинейной восстанавливающей силы представлен на фиг. 7. Зависимость 1 соответствует $\beta_1=0$, $\beta_2=0,5$, зависимость 2 — $\beta_1=0,5$, $\beta_2=0$ и зависимость 3 — $\beta_1=\beta_2=0,5$. При вычислениях принято $\gamma_1=\gamma_2=0,025$, $\eta_1=\eta_2=0$, $\mu=0,1$.

Увеличение амплитудного значения параметрического возбуждения ведет к расширению области резонанса. Амплитуды, соответствующие устойчивым ветвям, увеличиваются, а соответствующие неустойчивым ветвям амплитудно-частотных зависимостей — уменьшаются.

Таким образом, и в условиях комбинационных параметрических резонансов как суммарного, так и разностного типов при наличии сил сухого трения резонансные колебания с устойчивой амплитудой не могут возникнуть до тех пор, пока начальные возмущения не превзойдут критической величины.

4. Так как область применения соотношений (2.9) и (3.10) ограничена требованиями малости коэффициентов демпфирования, возбуждения, нелинейных вос-

становливающих и диссипативных сил, то выводы, основанные на методе Крылова — Боголюбова, необходимо сопоставить с экспериментальными данными или результатами прямого вычислительного эксперимента.

Устойчивые ветви амплитудно-частотных зависимостей можно определить путем численного интегрирования системы (1.1), при этом начальные условия удобно выбирать вблизи предельных циклов. Для этого в соответствии с (2.4) или (3.3) достаточно положить

$$x_k(0) = a_k^0 \sin \varphi_k^0, \quad dx_k(0)/dt = v_k a_k^0 \cos \varphi_k^0 \quad (4.1)$$

где $v_k = \omega/2$ при анализе простых резонансов типа (2.1) и $v_k = \omega_k$, если требуется исследовать стационарные колебания в условиях комбинационных резонансов типа (1.2) или (1.3). Значения a_k^0 и φ_k^0 определяются из уравнений первого приближения (2.8) или (3.7) в зависимости от вида параметрического резонанса. За величину амплитуды можно принять максимальное отклонение от среднего значения реализаций процесса, осредненное на отрезке времени, в несколько раз превосходящем характерный период колебаний. Временной интервал, соответствующий установлению колебательного процесса, исключается из рассмотрения. Что касается неустойчивых ветвей резонансных кривых, то численно их можно определить путем анализа областей притяжения устойчивых ветвей [9].

На фиг. 1, 3–7 данные вычислительного эксперимента нанесены жирными линиями. В условиях простых резонансов наблюдается хорошее совпадение с результатами исследования по методу Крылова — Боголюбова (фиг. 1). Для комбинационных резонансов суммарного типа (фиг. 4, 5) асимптотический метод позволяет качественно определить положение устойчивых ветвей амплитудно-частотных зависимостей, а результаты, соответствующие неустойчивым ветвям, являются заниженными. При анализе комбинационных резонансов разностного типа необходимо учитывать, что результаты первого приближения метода Крылова — Боголюбова качественно отражают общие закономерности, но количественно отличаются от данных вычислительного эксперимента (фиг. 6, 7), что объясняется более сложным частотным составом реализаций обобщенных координат в резонансной зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бологин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
3. *Hsu C. S.* Limit cycle oscillations of parametrically excited second-order nonlinear systems. — Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1975, v. 42, № 1, p. 176–182.
4. *Hagedorn P.* Die Mathien — Gleichung mit nichtlinearen Dämpfungs und Rückstellgliedern. — Z. angew. Math. und Mech., 1970, B. 50, H. 5, S. 321–324.
5. *Тондл А.* Нелинейные колебания механических систем. М.: Мир, 1973, 334 с.
6. *Бологин В. В.* Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. — В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНТИ, 1974, с. 155–166.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
8. *Бологин В. В., Бабин О. А., Голубков А. В., Смирнов А. И., Тяпин А. Г.* Численные методы расчета устойчивости параметрически возбуждаемых систем. — Расчеты на прочность: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1982, вып. 23, с. 194–207.
9. *Голубков А. В., Семенов В. А.* Численное исследование нелинейных параметрических колебаний. — Тр. Моск. энерг. ин-та, 1984, № 26, с. 72–78.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1985.