МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 531.33

БРАХИСТОХРОНА И ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

ШЕВЧЕНКО К. Н.

В публикуемой работе, посвященной обобщению результатов [1], рассматриваются две проблемы, близкие по постановке задачи и методу исследования экстремальных свойств брахистохроны и принципа наименьшего действия Лагранжа. Исследованы необходимые и достаточные условия существования минимума соответствующих функционалов для поля центральных сил.

Установлена вариационная взаимосвязь принципов. Решена задача о минимуме действия по Лагранжу для тяжелой точки. Для центральных сил исследование ведется в безразмерных величинах в полярной системе координат.

1. В общем случае задача о брахистохроне формулируется [2, с. 395–396] следующим образом: требуется найти минимум временного функционала вида (U — силовая функция, h — константа):

$$T=\int_A^B \frac{ds}{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_A^B \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \tag{1.1}$$

Для поля центральных сил силовую функцию представим в форме

$$U=\gamma r^n \tag{1.2}$$

Здесь n — любое рациональное число, γ — параметр (далее на n будут наложены дополнительные ограничения).

Введем безразмерную радиальную координату (r_0 — радиус фиксированной окружности):

$$\rho=r/r_0 \tag{1.3}$$

$$r_0=R+h_0 \tag{1.4}$$

где R — радиус земной поверхности, h_0 — радиальное расстояние точек окружности r_0 до земной поверхности.

Уравнение Бинэ в безразмерной форме следующее:

$$-\frac{v_0^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\right]=\operatorname{sign}(n)\rho^{n-1} \tag{1.5}$$

$$\operatorname{sign}(n)\rho^{n-1}=F(\rho)$$

Здесь $F(\rho)$ — безразмерная сила, отнесенная к gR^2/r_0^2, v_0 — начальная скорость.

Параметр в (1.2) равен $\gamma=gR^2|n|^{-1}r_0^{n+1}$. Закон сохранения энергии примет вид

$${}^1/_2 v^2-|n|^{-1}\rho^n=h,\quad h=\text{const} \tag{1.6}$$

Скорости v_0 и v уравнений (1.5) и (1.6) отнесены к величине первой космической скорости $R=\sqrt{g/r_0}$ на окружности r_0 при действии на точку единичной массы ньютоновской силы.

С учетом (1.6) получим временной функционал (1.1):

$$T=\frac{\sqrt{|n|}}{\sqrt{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\sqrt{\rho^n+h}},\qquad \rho'=\frac{d\rho}{d\varphi} \tag{1.7}$$

Задача о брахистохроне сводится к исследованию на минимум функционала (1.7). Необходимым условием существования экстремума функционала (1.7) являются уравнения Эйлера для подынтегральной функции (1.7).

Первый интеграл уравнения Эйлера записывается в виде (C_1 — произвольная константа): $\rho^2/(\sqrt{\rho^n+h}\sqrt{\rho^2+\rho'^2})=C_1$.

Разрешая это уравнение относительно ρ' и интегрируя, получим квадратуру экстремали (C_2 — вторая произвольная константа):

$$C_1\int\sqrt{\rho^n+h}\,d\rho/\sqrt{\rho^2-C_1^2(\rho^n+h)}=\varphi+C_2 \tag{1.8}$$

Выражение экстремали в квадратуре при наличии произвольной константы C_1 в подынтегральной функции (1.8) затрудняет возможность ее аналитического исследования. Выходом из этого затруднения является задание h, равного нулю. Тогда закон сохранения энергии имеет вид

$${}^1/_2v^2-|n|^{-1}\rho^n=0 \tag{1.9}$$

При $h=0$ функционал (1.7) преобразуется

$$T=\frac{\sqrt{|n|}}{\sqrt{2}}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\rho^{1/2n}} \tag{1.10}$$

а квадратура экстремали (1.8) примет интегрируемую форму

$$C_1\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^{2-n}-C_1^2}}=\varphi+C_2 \tag{1.11}$$

В результате получим семейство экстремалей (1.11):

$$\rho=C_1'/(\cos^{\varkappa}\varkappa^{-1}(\varphi+C_2),\qquad \varkappa=2/(2-n) \tag{1.12}$$

Константа C_2 определяется заданием отсчета полярного угла φ. Без нарушения общности задачи можно положить $C_2=0$. Константу C_1' определим из краевого условия $\rho=1$ при $\varphi=0$. В результате находим C_1' и основная экстремаль запишется

$$\rho=\cos^{-\varkappa}\varkappa^{-1}\varphi \tag{1.13}$$

Наложим на n дополнительное ограничение $n\neq2$ и введем переменную ψ:

$$\varkappa^{-1}\varphi=\psi \tag{1.14}$$

Центральную силу F можно представить в виде $F=\partial n/\partial\rho=n|n|^{-1}\rho^{n-1}$ или с учетом (1.13):

$$F=n|n|^{-1}\cos^{\varkappa(1-n)}\psi \tag{1.15}$$

Примеры. При $n=-1$ уравнение экстремали будет $\rho=(\cos^{2/3}{}^3/_2\varphi)^{-1}$. Активная сила равна $F=-\cos^{4/3}{}^3/_2\varphi=-1/\rho^2$.

При $n=1$ имеем $\rho=(\cos^2{}^1/_2\varphi)^{-1}$ (парабола); $F=1$ (сила отталкивания).

При $n=-2$ имеем $\rho=(\cos^{1/2}2\varphi)$, $F=-1/\rho^3$.

При $n=3$ имеем $\rho=\cos^2{}^1/_2\varphi$, $F=\rho^2$.

2. Движение точки по экстремали является несвободным. Поэтому требуется найти величину реакции, которая должна обеспечить нахождение точки на экстремали. Так как при движении точки по экстремали трение не учитывается, то реакция должна быть направлена по главной нормали. Одно из уравнений движения точки в естественных координатах имеет вид

$$F_n+N=Kv^2 \tag{2.1}$$

Здесь F_n — проекция активной силы на главную нормаль; кривизна экстремали (1.13) определяется выражением

$$K={}^1/_2n\cos^{1+\varkappa}\psi \tag{2.2}$$

Угол между касательной к траектории и направлением вектора центральной силы равен $\beta = {}^1/_2\pi - \psi$, а угол между направлениями главной нормали и направлением силы F будет $\beta' = \pi - \psi$.

Проекция активной силы на главную нормаль с учетом (1.15) равна

$$F_n = -F\cos\psi = -n|n|\cos^{(4-3n)/(2\varkappa)}\psi \tag{2.3}$$

Подставляя (1.10), (1.13) в (2.1), получим формулу для N:

$$N = 2\cos^{1+\varkappa}\psi = -2F_n, \quad n \neq 0,\ 2 \tag{2.4}$$

Условие (2.6) можно сформулировать следующим образом: при движении точки по экстремали реакция равна удвоенной проекции активной силы на главную нормаль с обратным знаком.

Найдем формулу для подсчета времени движения точки по экстремали согласно (1.1) $t = ds/v$, дифференциал дуги экстремали ds находит согласно (1.13), v — согласно (1.10) и (1.13).

Получаем $t = \dfrac{\sqrt{2|n|}}{2-n}\left(\operatorname{tg}\dfrac{2-n}{2}\varphi_1 - \operatorname{tg}\dfrac{2-n}{2}\varphi_0\right).$

Формула действительна при условии $n \neq 2$.

3. Выясним достаточные условия существования минимума временного функционала. Требуется доказать, что время движения точки по основной экстремали (1.13) минимально по сравнению с временем движения по близко лежащей экстремали. Необходимым и достаточными условиями существования минимума временного функционала (1.10) являются следующие требования [3, § 35].

1. Семейства экстремалей должны удовлетворять уравнению Эйлера.
2. Вдоль основной экстремали и ее окрестности должно выполняться условие Лежандра $F_{y'y'} \geqslant 0$, где $y = y(x, \alpha)$ — однопараметрическое семейство экстремалей.
3. При выполнении вдоль основной экстремали условия Лежандра должно выполняться условие Якоби $\Delta(x_0, x) \neq 0$ при $x_0 < x < x_1$ [3, с. 142]. Смысл последнего условия состоит в построении однопараметрического семейства экстремалей, окружающего и не пересекающего основную экстремаль (отсутствие сопряженной с x_0 точки x_1).
4. Наложение на семейство экстремалей помимо дифференцируемости по x и α и существование смешанной производной по x и α условия $\partial y/\partial\alpha > 0$ [3, с. 133].

В рассматриваемой задаче семейство экстремалей (1.12) и (1.13) удовлетворяет уравнению Эйлера. Пользуясь семейством экстремалей (1.12), построим центральный пучок однопараметрических экстремалей с центром в точке $\varphi = 0$, $\rho = 1$. Получим [3, с. 143—144]:

$$\rho = \cos^{\varkappa}\varkappa^{-1}\alpha/(\cos^{\varkappa}\varkappa^{-1}(\varphi + \alpha)) \tag{3.1}$$

Условие 4 для усеченного пучка ($\varphi > 0$) имеет вид

$$\partial\rho/\partial\alpha > 0 \quad \text{при} \quad \varphi > 0 \tag{3.2}$$

Условие Лежандра 2 выполняется

$$F_{\rho'\rho'} = \rho^{2-n/2}/(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2} > 0 \tag{3.3}$$

Условие (3.2) примет вид

$$\partial\rho/\partial\alpha = \sin\psi\cos^{\varkappa}\varkappa^{-1}\alpha/(\cos^{1+\varkappa}\varkappa^{-1}(\varphi + \alpha)) > 0 \tag{3.4}$$

при $\varphi > 0$, $|(2-n)/2|\,|\varphi + \alpha| \leqslant {}^1/_2\pi$.

Из (3.4) следует, что условие (3.2) выполняется для всех n, кроме нуля, удовлетворяющих условию $2 - n > 0$.

Можно показать, что экстремаль (1.13) имеет сопряженную точку, если $n > 2$.

4. Рассмотрим принцип наименьшего действия для центральных сил.

Для точки единичной массы с действием по Лагранжу

$$S=\int_{s_0}^{s_1} v\,ds=\sqrt{2}\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{U+h}\,ds \tag{4.1}$$

вариационный принцип записывается в форме $\delta s=0$, т. е. действие по Лагранжу S на прямом пути принимает стационарное значение. Покажем, что в ряде случаев S принимает минимальное значение. Рассмотрим поле центральных сил. Закон сохранения энергии при $h=0$ имеет вид (1.10), $n\neq 0$. Действие по Лагранжу запишется

$$S=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|n|}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\rho^{n/2}(\rho^2+\rho'^2)^{1/2}\,d\varphi,\qquad \rho'=\frac{d\rho}{d\varphi} \tag{4.2}$$

Из условия $\delta s=0$ аналогично задаче с брахистохроне находим интегрируемый вид экстремали функционала (4.2):

$$C_1\int d\rho/(\rho\sqrt{\rho^{2+n}-C_1^2}=\varphi+C_2 \tag{4.3}$$

Наложим на n условие $2+n\neq 0$. Семейство экстремалей имеет вид

$$\rho=\frac{C_1'}{\cos^{\varkappa_1}\varkappa_1^{-1}(\varphi+C_2)},\qquad \varkappa_1=\frac{2}{2+n} \tag{4.4}$$

Далее, аналогично задаче с брахистохроне, находим $C_2=0$, $C_1'=1$ и (4.4) примет вид основной экстремали

$$\rho=\cos^{-\varkappa_1}\varkappa_1^{-1}\varphi \tag{4.5}$$

Из полученных результатов следует, что исследование достаточных условий существования минимума действия S аналогично исследованию минимума для задачи о брахистохроне.

Условия $\partial y/\partial\alpha>0$ и (3.4) остаются в силе, а (3.3) примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}=\frac{\sin\varkappa_1^{-1}\varphi}{\cos^{\varkappa_1(2+n/2)}\varkappa^{-1}(\varphi+\alpha)\cos_1^{-\varkappa_1}\varkappa_1^{-1}\alpha}>0$$

$$\varphi>0,\quad |\varkappa_1^{-1}|\,|\varphi+\alpha|\leqslant {}^1/_2\pi \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что минимум действия по Лагранжу S существует для всех положительных n. Для отрицательных n экстремаль (4.5) реализует минимум при условии $2+n>0$.

Приведем примеры экстремалей прямых путей. При $n=1$ имеем

$$\rho=1/(\cos^{2/3}{}^3/_2\varphi),\qquad F=1 \tag{4.7}$$

При $n=-1$ имеем (парабола):

$$\rho=1/\cos^2{}^1/_2\varphi,\qquad F=-1/\rho^2 \tag{4.8}$$

При $n=2$ имеем

$$\rho=1/\cos^{1/2}2\varphi,\qquad F=\rho \tag{4.9}$$

При $n=-3$ имеем

$$\rho=\cos^2{}^1/_2\varphi,\qquad F=-1/\rho^4 \tag{4.10}$$

Из приведенных примеров следует, что (4.7), (4.8) и (4.9) суть прямые пути, на которых действие по Лагранжу принимает минимальное значение. Пример (4.10) не удовлетворяет условию $2+n>0$.

Минимум действия по Лагранжу имеет выражение

$$S_{\min}=\frac{2\sqrt{2}}{(2+n)\sqrt{|n|}}\left(\operatorname{tg}\frac{2+n}{2}\varphi_1-\operatorname{tg}\frac{2+n}{2}\varphi_0\right) \tag{4.11}$$

$$2+n>0,\quad n\neq 0$$

Экстремаль (4.5) является решением уравнения Бинэ (1.5). После подстановки (4.5) в (1.5) получим уравнение

$$^1/_2 v_0^2 |n| = 1 \tag{4.12}$$

служащее для определения начальной скорости v_0 по заданному n.

5. Обратимся к принципу наименьшего действия для тяжелой точки. Закон сохранения энергии для тяжелой точки имеет вид

$$^1/_2 v^2 - g(y+h) = 0 \tag{5.1}$$

Начальная скорости при $y=0$ равна

$$v_0 = \sqrt{2gh} \tag{5.2}$$

Действие по Лагранжу при $m=1$ имеет вид

$$S = \int_{s_0}^{s_1} v\, ds$$

После подстановки в (4.1) значения v согласно (5.1) и элемента дуги ds в координатах x, y функционал (4.1) можно записать

$$S = \sqrt{2g} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{y+n}\, \sqrt{1+y'^2}\, dx \tag{5.3}$$

Первый интеграл уравнения Эйлера функционала (5.3) следующий (C — произвольная постоянная): $\sqrt{y+h}/\sqrt{1+y'^2} = C$ или $y+h = C^2(1+y'^2)$.

Заменой переменной $y' = \operatorname{tg} \varphi$ получим семейство экстремалей в виде $y+h = {}^1/_4 (x+C_1)^2/C^2 + C^2$. Аналогично п. 4 находим $C_1 = 0$. Из краевых условий $x=0$, $y=0$ получим $C^2 = h$, и основная экстремаль примет вид

$$y = {}^1/_4 x^2/h \tag{5.4}$$

Подставляя в (5.4) значение h, с учетом (5.2) находим уравнение прямого пути

$$y = {}^1/_2 g x^2/v_0^2 \tag{5.5}$$

Достаточное условие существования минимума действия по Лагранжу для тяжелой точки аналогично принципу Лагранжа для центральных сил.

Существенное отличие принципа наименьшего действия от брахистохроны для тяжелой точки состоит в том, что в задаче о действии S начальная скорость отлична от нуля и направлена по касательной к параболе в начале координат. Можно показать, что прямой путь действия по Лагранжу является решением системы дифференциальных уравнений $\ddot{y} = g$, $\ddot{x} = 0$ для краевых и начальных условий $\dot{x}_0 = v_0$ при $x=0$, $y=0$.

Минимальное значение S находим по формуле

$$S_{\min} = \sqrt{2g} \int_0^x \sqrt{y+h}\, \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

После подстановки значений y, h с учетом (5.2) и (5.4) и интегрирования получим

$$S_{\min} = {}^1/_3 (3v_0^4 + g^2 x^2)\, x/v_0^2$$

6. Физической силой, вошедшей в полученные решения, является сила притяжения Ньютона. К величине этой силы и к первой космической скорости при действии этой силы отнесены начальные скорости всех рас-

смотренных задач. Другие рассмотренные центральные силы не имеют физической реализации, но могут быть моделированы техническими средствами, например реактивными двигателями. Все движения могут быть разделены на две группы — спуск и подъем точки.

В задачах и брахистохроне траектория точки определяется формулой (1.13), в задачах принципа Лагранжа — формулой (4.5). Сила в обеих задачах определяется единой формулой $F=\partial/\partial\rho(|n|^{-1}\rho^n)$ при $n\neq 0$.

Для того чтобы экстремали (1.13) и (4.5) реализовывали минимум соответствующих функционалов, должны выполняться условия $2-n>0$ и $2+n>0$, налагаемые на n. Таким образом, под действием ньютоновской силы имеет место опускание точки за минимальное время (задача о брахистохроне) по траектории $\rho=(\cos^{2/3}{}^3/_2\varphi)^{-1}$ и минимальное действие по Лагранжу по параболе (4.8). В обоих случаях конечная скорость выхода точки на окружность $\rho=1$ равна второй космической.

Подъем точки с окружности $\rho=1$ в задаче о брахистохроне с силой отталкивания, равной единице, с начальной скоростью, равной второй космической, происходит по параболе. Интересным оказался случай подъема точки с окружности $\rho=1$ (принцип Лагранжа) с силой $F=\rho$ по траектории (4.12). Начальная скорость равна первой космической $v_0=1$, т. е. начальная относительная скорость — нулевая.

Найденные экстремали принципа Лагранжа являются решениями уравнения Бинэ (1.5) независимо от того, реализуется или не реализуется минимум действия по Лагранжу.

Из полученных результатов вытекает взаимная вариационная связь рассмотренных принципов. Оба принципа формулируются при одном и том же выражении закона сохранения энергии. Для центральных сил оба принципа можно записать в форме

$$J=A_i\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{U_i}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi \qquad (i=1,2)$$

Силовые функции U_i удовлетворяют условию $U_1U_2=\text{const}$. Полагая $U_1=\rho-n$ (брахистохрона) или $U_2=\rho^n$ (принцип Лагранжа), из предыдущего условия имеем $\rho^n\rho^{-n}=1$.

Приложение. Докажем на примере, что при выполнении условия Лежандра (3.2) и условия

$$2-n<0 \tag{5.6}$$

существует сопряженная точка и, следовательно, отсутствует экстремум функционала (1.10).

Положим в (5.6) $n=4$. Тогда основная экстремаль описывается уравнением

$$\rho=\cos\varphi \tag{5.7}$$

Центральное однопараметрическое семейство примет вид (α — параметр):

$$\rho=\cos(\varphi+\alpha)/\cos\alpha \tag{5.8}$$

Уравнение Якоби [2, с. 140] в полярных координатах имеет вид

$$\left(F_{\rho\rho}-\frac{d}{d\varphi}F_{\rho\rho'}\right)\eta-\frac{d}{d\varphi}(F_{\rho'\rho'}\eta')=0 \tag{5.9}$$

Здесь F — подынтегральная функция функционала (1.10):

$$\begin{gathered}\eta=\Delta(0,\varphi)=\partial\rho/\partial\alpha|_{\alpha=0}=-\sin\varphi,\quad F=\sqrt{\rho^2+\rho'^2/\rho^2}/\rho^2\\ F_{\rho\rho}=(2\rho^4+9\rho^2\rho'^2+6\rho'^4)/(\rho^4(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}\\ F_{\rho\rho'}=(3\rho^2\rho'+2\rho'^3)/(\rho^3(\rho^2+\rho'^2)^{3/2})\\ F_{\rho'\rho'}=(\rho^2+\rho'^2)^{-3/2}\end{gathered} \tag{5.10}$$

Уравнение (5.9) для значений (5.10) тождественно удовлетворяется, т. е. для (5.7) существует сопряженная точка. Семейство экстремалей (5.8) пересекает основную экстремаль в точке $\rho=0$. Этот случай существования сопряженной точки совпадает со случаем, рассмотренным Кнезером [2, с. 149, фиг. 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шевченко К. Н.* Оптимальное по времени движение точки под действием системы центральных сил.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 6, с. 28–34.
2. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.
3. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления. Гостехтеоргиздат, 1938. 192 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.V.1984