

УДК 531.381

ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ
В ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА
С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ ПРИ СОИЗМЕРИМОСТИ ЧАСТОТ

БАРКИН Ю. В., ВИНОКУРОВ В. Н.

В переменных Андуайе исследуются эволюционные свойства возмущенного движения динамически симметричного тяжелого твердого тела вокруг закрепленной точки в случае, когда частоты невозмущенного эйлера движения характеризуются соизмеримостью 1:1.

Рассмотрим движение динамически симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат с началом в точке закрепления O и осью OZ , направленной вертикально вверх, $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с телом. Ось Oz направлена по оси динамической симметрии, а направления осей Ox и Oy выбраны так, что центр масс лежит в плоскости yOz .

В канонических переменных Андуайе [1] L, G, H, l, g, h гамильтониан задачи можно записать в виде

$$F = \frac{1}{2}G^2/A + \frac{1}{2}L^2(1/C - 1/A) + Pr_c F_1$$

$$F_1 = f_{0,0} + f_{1,0} \cos l + f_{0,1} \cos g + f_{1,1} \cos(l+g) + f_{1,-1} \cos(l-g)$$

$$f_{0,0} = \cos \varphi \cos \theta \cos \rho, \quad f_{1,0} = \sin \varphi \sin \theta \cos \rho, \quad f_{0,1} = -\cos \varphi \sin \theta \sin \rho,$$

$$f_{1,1} = 0,5 \sin \varphi (1 + \cos \theta) \sin \rho, \quad f_{1,-1} = -0,5 \sin \varphi (1 - \cos \theta) \sin \rho$$

Здесь $\cos \theta = L/C$, $\cos \rho = H/G$, $\cos \varphi = z_c/r_c$, $r_c = \sqrt{y_c^2 + z_c^2}$, A, C — экваториальный и осевой моменты инерции тела, y_c, z_c — координаты центра масс, P — вес тела.

Выполним преобразования переменных. Вначале перейдем к безразмерным переменным L', G', H', l, g, h, t' и гамильтониану F' по формулам $L' = L/An$, $G' = G/An$, $F' = F/An^2$, $t' = nt$, $n = G_0/A$, в которых G_0 — невозмущенное значение модуля кинетического момента, а затем — к геометрически более наглядным $G', \theta, \rho, l, g, h$. В новых переменных уравнения движения тела записываются в виде (штрихи в дальнейшем опустим):

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -\mu \frac{\partial F_1}{\partial g}, & \frac{d\theta}{dt} &= \mu \frac{1}{G \sin \theta} \left(\frac{\partial F_1}{\partial l} - \cos \theta \frac{\partial F_1}{\partial g} \right) \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\mu \frac{\text{ctg } \rho}{G} \frac{\partial F_1}{\partial \theta}, & \frac{dh}{dt} &= -\mu \frac{1}{G \sin \rho} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \\ \frac{dl}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{A}{C} - 1 \right) - \mu \frac{1}{G \sin \theta} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \\ \frac{dg}{dt} &= G + \mu \frac{1}{G} \left(\text{ctg } \theta \frac{\partial F_1}{\partial \theta} + \text{ctg } \rho \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right), & \mu &= \frac{Pr_c}{An^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Введенные переменные вырождаются при $\theta \in \{0, \pi\}$, $\rho \in \{0, \pi\}$. Эти значения вместе с их малыми окрестностями исключим из рассмотрения, и уравнения (1) будем рассматривать на множестве $Q = Q_1 \times T^2$, $Q_1 =$

$$= \{G, \theta, \rho: G > \alpha > 0; \theta \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon); \rho \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon)\}, T^2 = \{l, g \bmod 2\pi\}, \varepsilon = \varepsilon(\mu) > 0.$$

Предположим, что тело либо быстро закручено, либо центр масс расположен достаточно близко к точке закрепления. В обоих случаях $\mu \ll 1$. Переменные задачи разделены на медленные G, θ, ρ, h и быстрые l, g и правые части уравнений периодичны с периодом 2π по быстрым переменным.

Будем исследовать случай, когда частоты невозмущенного эйлера движения характеризуются соизмеримостью типа 1:1, что может иметь место при $A > 2C$. Для исследования эволюционных свойств возмущенного движения тела на асимптотическом интервале времени порядка μ^{-1} усредним уравнения (1) по Делоне — Хиллу: от быстрой переменной l перейдем к медленной переменной D , называемой аномалией Делоне, по формуле $D = l - g$ и полученные в результате уравнения усредним по g . Усредненные уравнения

$$\begin{aligned} d\langle G \rangle / dt &= \frac{1}{2} \mu \sin \varphi \sin \langle \rho \rangle (1 - \cos \langle \theta \rangle) \sin \langle D \rangle \\ d\langle \theta \rangle / dt &= \frac{1}{2} (\mu / \langle G \rangle) \sin \varphi \sin \langle \rho \rangle \sin \langle \theta \rangle \sin \langle D \rangle \\ d\langle \rho \rangle / dt &= \frac{1}{2} (\mu / \langle G \rangle) \sin \varphi \cos \langle \rho \rangle (1 - \cos \langle \theta \rangle) \sin \langle D \rangle \\ d\langle h \rangle / dt &= (\mu / \langle G \rangle) [\cos \varphi \cos \langle \theta \rangle + \frac{1}{2} \sin \varphi \operatorname{ctg} \langle \rho \rangle (1 - \cos \langle \theta \rangle) \cos \langle D \rangle] \\ d\langle D \rangle / dt &= \langle G \rangle \cos \langle \theta \rangle (AC^{-1} - 1) - \langle G \rangle - \\ &\quad - (\mu / \langle G \rangle) \{ \cos \varphi \cos \langle \rho \rangle (1 - 2 \cos \langle \theta \rangle) - \frac{1}{2} \sin \varphi \times \\ &\quad \times [\sin \langle \rho \rangle (1 + \cos \langle \theta \rangle) + \operatorname{ctg} \langle \rho \rangle \cos \langle \rho \rangle (1 - \cos \langle \theta \rangle)] \cos \langle D \rangle \} \\ d\langle g \rangle / dt &= \langle G \rangle - (\mu / \langle G \rangle) \{ 2 \cos \varphi \cos \langle \rho \rangle \cos \langle \theta \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \varphi [\sin \langle \rho \rangle \cos \langle \theta \rangle + \operatorname{ctg} \langle \rho \rangle \cos \langle \rho \rangle (1 - \cos \langle \theta \rangle) \cos \langle D \rangle] \} \end{aligned} \quad (2)$$

дополнительно к интегралам энергии $F(\langle G \rangle, \langle \theta \rangle, \langle \rho \rangle, \langle D \rangle) = C_1$ и площадей

$$\langle G \rangle \cos \langle \rho \rangle = H_0 \quad (3)$$

имеют еще циклический интеграл

$$\langle G \rangle (1 + \cos \langle \theta \rangle) = C_0 \quad (4)$$

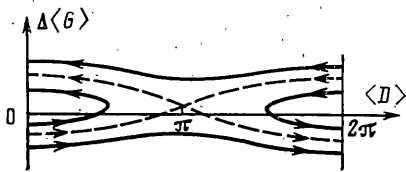
и интегрируемы в квадратурах.

Проведем вначале качественный анализ усредненных уравнений. По теореме Лиувилля — Арнольда об интегрируемых системах [2] движение в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4 \{ \langle G \rangle, \langle \theta \rangle, \langle g \rangle, \langle D \rangle \}$ происходит по инвариантным, в общем случае двумерным, торам. Для изучения последних, используя интегралы (3), (4), понизим порядок уравнений (2) до двух и рассмотрим приведенные уравнения

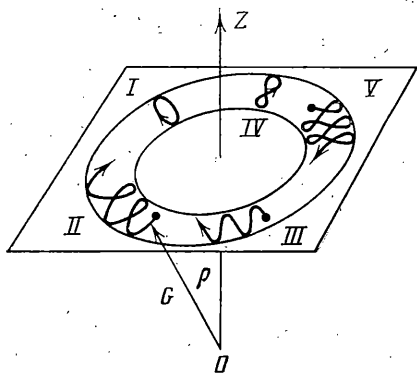
$$\begin{aligned} \frac{d\langle G \rangle}{dt} &= \frac{\mu}{\langle G \rangle} \sin \varphi \left(1 - \frac{H_0}{\langle G \rangle} \right)^{1/2} \left(2 - \frac{C_0}{\langle G \rangle} \right) \sin \langle D \rangle \\ \frac{d\langle D \rangle}{dt} &= (C_0 - \langle G \rangle) \left(\frac{A}{C} - 1 \right) - \langle G \rangle - \frac{\mu}{\langle G \rangle} \left\{ \cos \varphi \frac{H_0}{\langle G \rangle} \left(\frac{2C_0}{\langle G \rangle} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin \varphi \left[\left(1 - \frac{H_0}{\langle G \rangle^2} \right)^{1/2} \frac{C_0}{\langle G \rangle} + \frac{H_0^2}{\langle G \rangle^2} \left(1 - \frac{H_0^2}{\langle G \rangle^2} \right)^{-1/2} \left(2 - \frac{C_0}{\langle G \rangle} \right) \right] \cos \langle D \rangle \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Интеграл энергии приведенных уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} F &= \frac{\langle G \rangle^2}{2} + \frac{(C_0 - \langle G \rangle)^2}{2} \left(\frac{A}{C} - 1 \right) + \mu \left[\cos \varphi \left(\frac{C_0}{\langle G \rangle} - 1 \right) \frac{H_0}{\langle G \rangle} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin \varphi \left(1 - \frac{H_0^2}{\langle G \rangle^2} \right)^{1/2} \left(2 - \frac{C_0}{\langle G \rangle} \right) \cos \langle D \rangle \right] = C_1 \end{aligned} \quad (6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Будем полагать $\varphi \neq \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi\}$. Тогда в области Q правая часть первого уравнения (5) обращается в нуль лишь при $\langle D \rangle \in \{0, \pi\}$. Правая часть второго уравнения (5) при $\langle D \rangle \in \{0, \pi\}$ также обращается в нуль при некоторых значениях $\langle G \rangle'$, $\langle G \rangle''$. Действительно, при $\mu=0$:

$$f(\langle G \rangle) = [(C_0 - \langle G \rangle)(AC^{-1} - 1) - \langle G \rangle] |_{\mu=0} = \\ = [\langle G \rangle \cos \langle \theta \rangle (AC^{-1} - 1) - \langle G \rangle] |_{\mu=0} = 0$$

Производная $(\partial f / \partial \langle G \rangle) |_{\mu=0} = -A/C < -2 \neq 0$. Поэтому при достаточно малых $\mu \neq 0$ уравнение

$$(C_0 - \langle G \rangle) \left(\frac{A}{C} - 1 \right) + \frac{\mu}{\langle G \rangle} \left\{ \cos \varphi \frac{H_0}{\langle G \rangle} \left(\frac{2C_0}{\langle G \rangle} - 1 \right) + \frac{1}{2} \sin \varphi \times \right. \\ \left. \times \left[\left(1 - \frac{H_0^2}{\langle G \rangle^2} \right)^{1/2} \frac{C_0}{\langle G \rangle} + \frac{H_0^2}{\langle G \rangle^2} \left(1 - \frac{H_0^2}{\langle G \rangle^2} \right)^{-1/2} \left(2 - \frac{C_0}{\langle G \rangle} \right) \right] \right\} \eta = 0, \\ \eta = \pm 1$$

аналитическое по $\langle G \rangle$ в Q , также имеет решения $\langle G \rangle = \langle G' \rangle$, $\langle G \rangle = \langle G'' \rangle$, мало отличающиеся от единицы.

Знак производной $d\langle G \rangle / dt$ совпадает со знаком функции $\sin \langle D \rangle$. Знак $d\langle D \rangle / dt$ при достаточно малых μ определяется с учетом знака производной $(\partial f / \partial \langle G \rangle) |_{\mu=0}$. Учитывая также, что положения равновесия в системе (4) являются особыми точками типа седло и центр, на плоскости $\mathbb{R}^2\{\langle D \rangle, \langle G \rangle\}$ можно построить фазовый портрет. Он приведен на фиг. 1, где $\Delta \langle G \rangle = \langle G \rangle - G_0$, а пунктирными линиями обозначены сепаратрисы. Двумерные инвариантные торы получаются как результат прямого произведения фазовых траекторий на $\mathbb{R}^2\{\langle D \rangle \bmod 2\pi, \Delta \langle G \rangle\}$ и окружности $S^1 = \{\langle g \rangle \bmod 2\pi\}$.

Квадратуры, к которым приводят уравнения (2), достаточно сложны для обращения в конечном виде. Пользуясь наличием малого параметра, решение усредненных уравнений будем искать в рядах. Для этого невозмущенное резонансное движение определим условиями $G^* \cos \theta^* \times (AC^{-1} - 1) = G^*$, $G^* \cos \rho^* = H_0$, $G^*(1 + \cos \theta^*) = C_0$. В усредненном решении $\langle G \rangle(t) = G^* + \Delta \langle G \rangle(t)$, $\langle \rho \rangle(t) = \rho^* + \Delta \langle \rho \rangle(t)$, $\langle \theta \rangle(t) = \theta^* + \Delta \langle \theta \rangle(t)$. Величины G^* , ρ^* и начальные значения угловых переменных $\langle g \rangle$, $\langle D \rangle$, $\langle h \rangle$ примем за независимые постоянные интегрирования. Шестую постоянную интегрирования, имеющую смысл постоянной энергии, определим ниже.

Рассмотрим интеграл энергии (6) как неявную функцию $\langle G \rangle(\langle D \rangle)$. Производная $(\partial F / \partial \langle G \rangle) |_{\mu=0} = G^* - G^* \cos \theta^* (AC^{-1} - 1) = 0$, $(\partial^2 F / \partial \langle G \rangle^2) |_{\mu=0} = -A/C \neq 0$. Поэтому $\Delta \langle G \rangle(\langle D \rangle)$ следует искать в виде ряда по степеням $\sqrt{\mu}$:

$$\Delta \langle G \rangle(\langle D \rangle) = \sum_{s=1}^{\infty} (\sqrt{\mu})^s G_s(\langle D \rangle) \quad (7)$$

Разность постоянных энергий $C_1 - C_1^*$ возмущенного и невозмущенного движений есть функция μ и равна нулю при $\mu=0$. Поэтому ее можно представить в виде ряда [3]:

$$C_1 - C_1^* = \mu C_2 + \mu^2 C_4 + \dots \quad (8)$$

C_2 примем в качестве шестой постоянной интегрирования. После подстановки рядов (7), (8) в интеграл энергии (6) последовательно находим $G_1 = \pm \{2CA^{-1} [C_2 - \cos \varphi \cos \theta^* \cos \rho^* + 1/2 \sin \varphi \sin \rho^* (1 - \cos \theta^*) \cos \langle D \rangle]\}^{1/2}$

$$G_2 = C(AG^*)^{-1} [\cos \varphi \cos \rho^* (1 + 2 \cos \theta^*) + 1/2 \sin \varphi \times \\ \times \operatorname{cosec} \rho^* (1 - \cos \theta^* \cos 2\rho^*) \cos \langle D \rangle]$$

$$G_h = \Phi_h(C/A, \varphi, \rho^*, \theta^*, C_2, \langle D \rangle)$$

Знак в правой части первой формулы определяется следующим образом. Для определенного ниже класса вращательных движений знак определяется начальными условиями. Для класса либрационных движений знак может быть выбран произвольно. Для определенности примем минус.

В правую часть второго уравнения (5) подставим найденное уже решение (7). В результате получим уравнение вида

$$d\langle D \rangle / dt = f(\sqrt{\mu}, \langle D \rangle) \quad (9)$$

с известной правой частью, допускающей разложение по степеням $\sqrt{\mu}$, начинающееся с члена первой степени по $\sqrt{\mu}$. Решение уравнения (9) ищем в виде

$$\langle D \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} (\sqrt{\mu})^s D_s(\tau), \quad \tau = \sqrt{\mu} t \quad (10)$$

После подстановки ряда (10) в уравнение (9) получим рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$dD_0/d\tau = -(A/C)G_1(D_0)$$

$$dD_1/d\tau = -(A/C)dG_1/dD_0 D_1$$

$$dD_k/d\tau = -(A/C)dG_k/dD_0 D_1 + \psi_k(D_0, \dots, D_{k-1})$$

из которой последовательно найдем $D_s(\tau)$, $s=0, 1, \dots$

Для определения $D_0(\tau)$ имеем квадратуру

$$\int_0^{1/2 D_0} \frac{d\xi}{\sqrt{A_1 - A_2 \sin^2 \xi}} = \sqrt{\frac{A}{2C}} \tau$$

$$A_1 = C_2 - \cos \varphi \cos \theta^* \cos \rho^* + 1/2 \sin \varphi \sin \rho^* (1 - \cos \theta^*)$$

$$A_2 = \sin \varphi \sin \rho^* (1 - \cos \theta^*)$$

В области определения Q справедливо неравенство $A_2 > 0$. Для действительного решения $D_0(\tau)$ необходимо также $A_1 \geq 0$. Поэтому при обращении квадратуры нужно рассмотреть следующие два случая: $A_1 > A_2 > 0$, $A_2 > A_1 \geq 0$. После определения $\langle D \rangle(\tau)$ можно определить зависимость от времени всех других переменных задачи.

В первом случае решение уравнений (2) с точностью до членов порядка μ для медленных переменных и порядка $\sqrt{\mu}$ для быстрой переменной имеет вид

$$\langle D \rangle = 2am u_1 + \sqrt{\mu} \operatorname{dn}(u_1, k_1), \quad \langle G \rangle = G^* - \sqrt{\mu} \sqrt{2CA_1/A} \operatorname{dn}(u_1, k_1)$$

$$\langle \theta \rangle = \theta^* - \frac{\sqrt{\mu} \sin \theta^*}{G^*(1 - \cos \theta^*)} \sqrt{\frac{2C}{A}} A_1 \operatorname{dn}(u_1, k_1)$$

$$\langle \rho \rangle = \rho^* - \frac{\sqrt{\mu} \operatorname{ctg} \rho^*}{G^*} \sqrt{\frac{2C}{A}} A_1 \operatorname{dn}(u_1, k_1) \quad (11)$$

$$\langle h \rangle = h_0 + (\mu/G^*) \left\{ \cos \varphi \cos \theta^* + \sin \varphi \operatorname{ctg} \rho^* (1 - \cos \theta^*) \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{k_1} \left(1 - \frac{E(k_1)}{K(k_1)} \right) \right] (t - t_0) + \frac{\sqrt{\mu} \cos \rho^*}{G^* \sin^2 \rho^*} \sqrt{\frac{2C}{A}} A_1 \operatorname{zn}(u_1, k_1)$$

$$\langle g \rangle = g_0 + G^*(t - t_0) - 2CA^{-1} \operatorname{am} u_1$$

Здесь K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Аргумент u_1 и модуль k_1 определяются формулами $u_1 = \sqrt{1/2} AA_1/C\tau$, $k_1 = \sqrt{A_2/A_1}$ ($0 < k_1 < 1$).

Проанализируем полученное решение. Аномалия Делоне $\langle D \rangle$ изменяется монотонно, т. е. разность $(\langle l \rangle - \langle g \rangle)$ систематически увеличивается. Движение тела в этом случае называется вращательным. Функции $\langle G \rangle(t)$, $\langle \theta \rangle(t)$, $\langle \rho \rangle(t)$ — периодические с периодом $T_1 = 2K(k_1)\sqrt{2C/\mu AA_1}$ и амплитудой изменения порядка $\sqrt{\mu}$. Величины $\langle D \rangle(\tau)$, $\langle G \rangle(\tau)$ задают параметрически фазовые траектории, расположенные на фиг. 1 ниже сепаратрис.

Выведем движение кинетического момента, определяемое координатами ρ и h . Функция $\langle h \rangle$ состоит из вековой и периодической составляющих. Периодическая составляющая функции $\langle h \rangle$ и функция $\langle \rho \rangle$ изменяются с одинаковым периодом T_1 . Следовательно, если учесть лишь периодические составляющие, годограф кинетического момента будет представлять собой замкнутый овал, расположенный в горизонтальной плоскости (кривая I на фиг. 2). За счет медленного векового движения годограф кинетического момента может иметь вид II, III.

При $A_2 > A_1 \geq 0$ решение уравнений (2) имеет вид

$$\langle D \rangle = 2 \arcsin [k_2 \operatorname{sn}(u_2, k_2)] + \sqrt{\mu} \operatorname{cn}(u_2, k_2)$$

$$\langle G \rangle = G^* - \sqrt{\mu} \sqrt{2CA_1/A} \operatorname{cn}(u_2, k_2)$$

$$\langle \theta \rangle = \theta^* - \frac{\sqrt{\mu} \sin \theta^*}{G^*(1 - \cos \theta^*)} \sqrt{\frac{2C}{A}} A_1 \operatorname{cn}(u_2, k_2) \quad (12)$$

$$\langle \rho \rangle = \rho^* - \sqrt{\mu} G^{*-1} \operatorname{ctg} \rho^* \sqrt{2CA_1/A} \operatorname{cn}(u_2, k_2)$$

$$\langle h \rangle = h_0 + \mu G^{*-1} \left[\cos \varphi \cos \theta^* + \sin \varphi \operatorname{ctg} \rho^* (1 - \cos \theta^*) \right] \times$$

$$\times \left(\frac{E(k_2)}{K(k_2)} - \frac{1}{2} \right) (t - t_0) + \frac{\sqrt{\mu}}{G^*} \sin \varphi \operatorname{ctg} \rho^* (1 - \cos \theta^*) \sqrt{\frac{2C}{AA_2}} \operatorname{zn}(u_2, k_2)$$

$$\langle g \rangle = g_0 + G^*(t - t_0) - (2C/A) \arccos [\operatorname{dn}(u_2, k_2)]$$

$$u_2 = \sqrt{AA_2/2C}\tau, \quad k_2 = \sqrt{A_1/A_2} \quad (0 \leq k_2 < 1)$$

В решении (12) $\langle D \rangle$ изменяется с ограниченной амплитудой, принимающей значения из отрезка $[0, 2\pi]$. Движение тела в этом случае называется либрационным. Функции $\langle D \rangle(\tau)$, $\langle G \rangle(\tau)$ задают параметрически фазовые траектории, расположенные на фиг. 1 внутри сепаратрис. Период обхода по фазовым траекториям $T_2 = 4K(k_2)\sqrt{2C/\mu AA_2}$. При $k_2 \rightarrow 0$ траек-

тории приближаются к устойчивой неподвижной точке. Если же $k_2 \rightarrow 1$, то траектории приближаются к сепаратрисам, а период T_2 — к бесконечности.

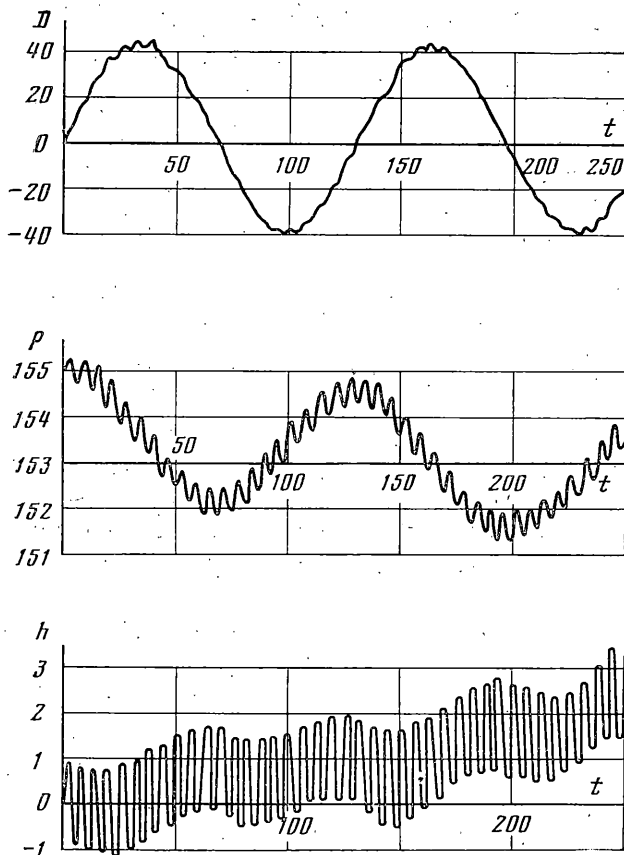
Функция $\langle \rho \rangle(t)$ изменяется с периодом T_2 , а периодическая составляющая функции $\langle h \rangle(t)$ — с периодом $T_2/2$. Поэтому, если учесть лишь периодические составляющие, конец вектора кинетического момента опишет в горизонтальной плоскости «восьмерку» (кривая IV на фиг. 2). Скорость движения по восьмерке имеет величину $\sqrt{\mu}AA_2/2C$, т. е. $\sim \sqrt{\mu}$. Размер восьмерки также порядка $\sqrt{\mu}$. При медленном вековом изменении годограф кинетического момента может иметь вид III, V. Подобные движения кинетического момента имеют место в задаче о движении спутника [4].

Для геометрического представления движения тела по Пуансо вычислим еще расстояние от неподвижной точки O до плоскости Пуансо $\langle \delta \rangle(t) = \sqrt{2F_0(t)/\langle G \rangle(t)}$. Здесь F_0 — кинетическая энергия тела. Величина $\langle \delta \rangle$ не остается постоянной, как в случае Эйлера, а изменяется по закону $\langle \delta \rangle(t) = \sqrt{1 + (AC^{-1} - 1) \cos^2 \langle \theta \rangle(t)}$. Рассмотрим подробнее либрационный случай движения тела. Если подставить $\langle \theta \rangle(t)$ из решения (12) и разложить полученное выражение по степеням $\sqrt{\mu}$, то с точностью до членов порядка μ имеем

$$\langle \delta \rangle = \sqrt{\frac{A}{A-C}} + \frac{2A}{G^*} \sqrt{\mu} \frac{2A_1}{C(A-C)} \operatorname{cn}(u_2, k_2)$$

Таким образом, в первом приближении расстояние $\langle \delta \rangle$ медленно, с периодом порядка $\mu^{-1/2}$, осциллирует около невозмущенного значения с амплитудой порядка $\sqrt{\mu}$. Функциями $\langle \rho \rangle(t)$, $\langle h \rangle(t)$, $\langle \delta \rangle(t)$ полностью определено движение плоскости Пуансо. Согласно кинематическим теоремам Пуансо [5], тело движется так, что эллипсоид инерции катится без проскальзывания по плоскости Пуансо. Соизмеримость частот приводит к тому, что на движение тела накладываются долгопериодические возмущения.

Рассмотрим вопрос о погрешности, с которой решение усредненных уравнений аппроксимирует решение строгих уравнений движения тела. На основании теоремы Е. А. Гребенникова [6] об усреднении по Делоне — Хиллу уравнений стандартного вида с правыми частями в виде тригонометрических многочленов погрешность по переменным G , θ , ρ ограничена величиной $O(\mu)$ при $t \in [0, \mu^{-1}]$. Однако некоторые качественные свойства решений усредненных уравнений (2) с помощью теоремы Колмогорова — Арнольда [2, добавление 8] можно распространить на бесконечный интервал времени. Обратимся к теории периодических решений Пуанкаре первого рода. Доказательство их существования в данной задаче для соизмеримости частот 1:1 и анализ устойчивости проведены в [7, 8]. Из результатов работ следует, что для порождающих решений $l_0 - g_0 = D \in \{0, \pi\}$. Причем для устойчивого периодического решения $l_0 - g_0 = 0$, а для неустойчивого $l_0 - g_0 = \pi$. На трехмерном уровне интеграла энергии $F(G, \theta, D, g) = C_1$ уравнений (1) в окрестности периодических решений построим секущую плоскость $\mathbb{R}^2\{D, G\}$ и рассмотрим инвариантные кривые отображения плоскости на себя, индуцируемое уравнениями (1). Периодическим решениям отвечают неподвижные точки. Известно [2, 3], что через неустойчивые неподвижные точки проходят в общем случае расщепляющиеся сепаратрисы, а устойчивые неподвижные точки окружают кривые, большинство которых замкнуто. Мера множества незамкнутых кривых ограничена величиной порядка $\sqrt{\mu}$ [9]. Если сравнить фазовые траектории на $\mathbb{R}^2\{\langle D \rangle, \Delta \langle G \rangle\}$ и инвариантные кривые на $\mathbb{R}^2\{D, G\}$, то основное отличие будет заключаться лишь в расщеплении сепаратрис и незамкнутости некоторого множества кривых на $\mathbb{R}^2\{D, G\}$. Частота фазовых колебаний в области либрации на $\mathbb{R}^2\{D, G\}$ имеет вели-



Фиг. 3

чину порядка $\sqrt{\mu}$ [2, добавление 8], как и в решении (12) усредненных уравнений. Сохранившиеся инвариантные торы делят трехмерный уровень интеграла энергии на ограниченные области, из которых не может выйти фазовая траектория. Таким образом, с качественной точки зрения усредненные уравнения верно описывают эволюционные свойства движения тела на всем бесконечном интервале времени.

На фиг. 3 приведены результаты численного интегрирования уравнений движения тела (1) на ЭВМ для случая либрации (размерность переменных D, ρ, h в град). Интегрирование проводилось модифицированным методом Эйлера с шагом интегрирования 0,01 при $\mu=0,01, A/C=3,1, \varphi=45^\circ$ и начальных значениях переменных $G_0=1, \theta_0=60^\circ, \rho_0=155^\circ, l_0=-g_0=h_0=0$. На графиках отчетливо видны долгопериодические колебания в решении уравнений, причем за время одного полного долгопериодического колебания D происходит два долгопериодических колебания h , как и в решении (12). Далее, если для устойчивого периодического решения выполнено условие [8] $\cos \varphi \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \sin \varphi \operatorname{ctg} \rho_0 (1 - \cos \theta_0) = 0$, то вектор кинетического момента не будет иметь вековой прецессии. Такой же вид имеет условие отсутствия вековой прецессии кинетического момента и согласно решению (12) усредненных уравнений при $k_2=0$.

Таким образом, для изучения эволюционных свойств движения тела при соизмеримости частот 1:1 можно воспользоваться усредненными уравнениями (2). Результаты исследований усредненных уравнений открывают возможность построения строгой теории возмущений, основанной на промежуточном движении, уже учитывающем основные эффекты от соизмеримости частот.

Авторы выражают благодарность В. Г. Демину за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
3. Пуанкаре А. Избр. труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
5. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
6. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971. 442 с.
7. Козлов В. В. Новые периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 407–414.
8. Баркин Ю. В. Периодические и условно-периодические решения в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 535–544.
9. Нейштадт А. И. Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1016–1025.

Москва

Поступила в редакцию
1.X.1984