

УДК 531.38

БЫСТРОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА В СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ

КУРЯКОВ В. А.

Рассматривается задача о движении вокруг центра масс несимметричного твердого тела под действием малого возмущающего момента сил сопротивления среды, принимаемого квадратичной функцией проекций вектора угловой скорости на связанные с телом оси координат. В качестве невозмущенного при составлении уравнений в оскулирующих элементах выбирается движение, отличное от эйлеровского. Асимптотическими методами проводится качественное исследование эволюции движения.

1. Рассмотрим быстрое движение вокруг центра масс несимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде. Быстрыми будем называть [4] такие движения, для которых момент внешних сил относительно центра масс мал по сравнению с текущим значением кинетической энергии вращения тела. Сопротивление предполагается квадратичным по отношению к угловой скорости тела.

Введем связанную с телом декартову систему координат с началом в центре масс и осями, направленными по главным центральным осям инерции тела. Динамические уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи запишем в виде

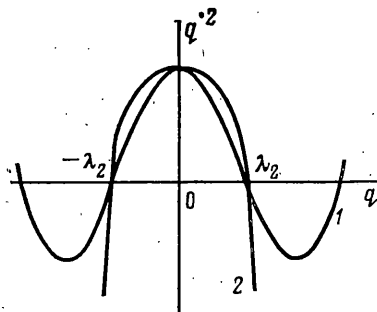
$$\begin{aligned} Ap' + (C-B)qr &= \varepsilon M_1 \\ Bq' + (A-C)pr &= \varepsilon M_2, \quad Cr' + (B-A)pq = \varepsilon M_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости ω на координатные оси, A, B, C — главные центральные моменты инерции тела, ε — малый неотрицательный параметр. Возмущающий момент сил сопротивления $M(M_1, M_2, M_3)$ представляется в виде $M = \Gamma\Omega$, где $\Gamma = (\alpha_{ij})$ — матрица постоянных коэффициентов сопротивления вращению тела [2], проекции вектора Ω имеют вид [3]: $\Omega(-p|p|, -q|q|, -r|r|)$, M_i — компоненты M в связанной системе координат ($i=1, 2, 3$). В дальнейшем будем предполагать, что $A > B > C$, $\alpha_{ij} > 0$ ($i, j=1, 2, 3$).

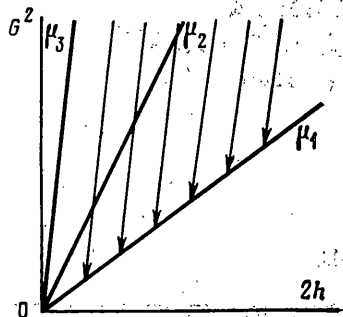
Результаты исследования задачи о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки под действием малого диссипативного момента, линейного относительно ω , приведены в [1, 4]. Некоторые частные случаи интегрирования системы (1.1) для не вполне симметричного тела в отсутствие предположения о малости возмущений рассмотрены в [5]. Допущение о малости возмущений позволяет воспользоваться методом усреднения [6] и провести качественное исследование поведения решений (1.1).

2. Рассмотрим невозмущенную задачу. При $\varepsilon=0$ уравнения (1.1) описывают задачу Эйлера — Пуансо. Использование решения этой задачи в качестве порождающего приводит к необходимости определения квадратур от эллиптических функций [7] в процедуре усреднения. В работе для удобства усреднения показана возможность сведения указанных выкладок к определению квадратур от элементарных функций. Предлагается система дифференциальных уравнений, общее решение которой выражается в элементарных функциях времени и используется при исследовании асимптотического поведения решений (1.1).

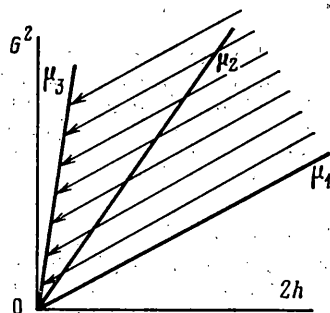
Интегрирование динамических уравнений Эйлера в случае Эйлера —



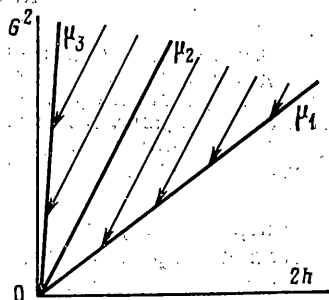
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Пуансо в целях сокращения объема выкладок¹ сводится к определению общего решения уравнения [8] вида

$$q^2 = F_4(q), \quad F_4(q) = \sigma^2 (\lambda_1^2 - q^2) (\lambda_2^2 - q^2) \\ \sigma^2 = (A-B)(B-C)/(AC) \quad (2.1)$$

где $F_4(q)$ — многочлен четвертой степени относительно q .

Рассмотрим случай $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. На интервале $[-\lambda_2, \lambda_2]$ проведем аппроксимацию многочлена $F_4(q)$ в правой части (2.1) многочленом второй степени $F_2(q)$, графики которых показаны на фиг. 1, где цифрой 1 обозначен график $F_4(q)$, а цифрой 2 — $F_2(q)$. Тогда, сохраняя прежние обозначения для проекций ω , запишем

$$p = s_1 \lambda_2 \sqrt{B(B-C)/(A(A-C))} \cos u_1, \quad q = s_2 \lambda_2 \sin u_1 \\ r = s_3 \lambda_1 \sqrt{B(A-B)/(C(A-C))} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u_1} \quad (2.2)$$

Здесь $k_1^2 = \lambda_2^2/\lambda_1^2$, $u_1 = \sigma \lambda_1 t + \gamma$, s_i ($i=1, 2, 3$) — числа, равные ∓ 1 , определяющие знаки радикалов [9], γ — произвольная постоянная.

Замечание. Из вида (2.2) следует, что в точках, где проекции ω экстремальны, полюсы при аппроксимации не изменяются. Можно показать, что типы движений² ω , отвечающие случаям Эйлера — Пуансо и (2.2), для соответствующих множеств начальных условий движения совпадают, за исключением множества нулевой меры на плоскости значений λ_1, λ_2 , определяемого условием $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.

При решении основной задачи [10] построения уравнений движения по известным первым интегралам из (2.2) получаем уравнения

$$Ap^* + (C-B)qr\delta = 0 \quad (2.3) \\ Bq^* + (A-C)pr\delta = 0, \quad Cr^* + (B-A)pq\delta = 0 \\ \delta = \sqrt{1 + B(A-B)q^2/(C(A-C)r^2)}$$

Уравнения (2.3) и их общее решение (2.2), используемые в дальнейшем при изучении поведения решений возмущенной системы (1.1), в отличие от порождающих будем называть базисными.

¹ См.: Куряков В. А. К вопросу определения общего решения динамических уравнений Эйлера для случая Эйлера — Пуансо. Пермь, 1982. — 16 с. Деп. в ВИНТИ 30.06.82; № 4004—82.

² См.: Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.

3. Исследование асимптотического поведения решений (1.1) будем проводить с использованием базисного решения (2.2) системы (2.3) по уравнениям в оскулирующих элементах [11], которые после несложных выкладок запишем в виде

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= \varepsilon \left[k_1 \frac{M_2}{B} \sin u_1 - \sqrt{\frac{C(A-C)}{B(A-B)} \frac{M_3}{C}} \sqrt{1-k_1^2 \sin^2 u_1} \right] \\ \lambda_2^* &= \varepsilon \left[\sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}} \frac{M_1}{A} \cos u_1 + \frac{M_2}{B} \sin u_1 \right] \\ u_1^* &= \lambda_1 \sigma \sqrt{1-k_1^2 \sin^2 u_1} + \frac{\varepsilon}{\lambda_2} \left[\frac{M_2}{B} \cos u_1 - \sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}} \frac{M_1}{A} \sin u_1 \right]\end{aligned}\quad (3.1)$$

Величины λ_1, λ_2 определяют амплитудные значения проекций ω для (2.2). Отметим, что при выводе (3.1) принято [9] $s_1=s_2=1, s_3=-1$.

Исследуем решения (3.1) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$ с использованием метода усреднения [6]. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за которое ω совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов по полюсам. Для построения усредненной системы первого приближения подставим выражения для проекций возмущающего момента с учетом (2.2) в правые части (3.1) и проведем усреднение вдоль траекторий невозмущенного движения.

Замечание. Уравнения в оскулирующих параметрах, составленные с использованием порождающего решения Эйлера-Пуансо [8]:

$$\begin{aligned}p &= s_1 \lambda_2 \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \operatorname{cn} w_1, & q &= s_2 \lambda_2 \operatorname{sn} w_1 \\ r &= s_3 \lambda_1 \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \operatorname{dn} w_1, & w_1 &= \lambda_1 \sigma t + \gamma\end{aligned}$$

запишем в виде

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= \varepsilon \left[k_1 \frac{M_2}{B} \operatorname{sn} w_1 - \sqrt{\frac{C(A-C)}{B(A-B)}} \frac{M_3}{C} \operatorname{dn} w_1 \right] \\ \lambda_2^* &= \varepsilon \left[\sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}} \frac{M_1}{A} \operatorname{cn} w_1 + \frac{M_2}{B} \operatorname{sn} w_1 \right]\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$w_1^* = \lambda_1 \sigma + \frac{\varepsilon}{\lambda_2 \operatorname{dn} w_1} \left[\frac{M_2}{B} \operatorname{cn} w_1 - \sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}} \frac{M_1}{A} \operatorname{sn} w_1 \right]$$

При выводе (3.2) принято [9] $s_1=s_2=1, s_3=-1$. Из (3.1) и (3.2) следует, что в невозмущенном движении $u_1 = \operatorname{am} w_1$. Отметим, что (3.1) при $\varepsilon=0$ в точности описывает движение Эйлера-Пуансо и поэтому процедура усреднения (3.1) вдоль траекторий невозмущенного движения эквивалентна усреднению (3.2) по быстрой переменной.

Введем обозначения

$$\alpha_{11}^1 = \frac{\alpha_{11}}{A} \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}}, \quad \alpha_{22}^1 = \frac{\alpha_{22}}{B}, \quad \alpha_{33}^1 = \frac{\alpha_{33}}{C} \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}}$$

Сохраняя для медленных переменных (3.1) прежние обозначения, получим в результате усреднения

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= -\frac{1}{4} \varepsilon \mathbf{K}^{-1} \lambda_1^2 [2\alpha_{22}^1 k_1^3 \vartheta_1(k_1) + \alpha_{33}^1 \vartheta_2(k_1)], \\ \lambda_2^* &= -\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{K}^{-1} \lambda_2^2 [\alpha_{11}^1 \vartheta_3(k_1) + \alpha_{22}^1 \vartheta_1(k_1)] \\ \vartheta_1(k_1) &= \frac{1}{2} (1+k_1^2) [\ln(1+k_1) - \ln(1-k_1)] k_1^{-3} - k_1^{-2} \\ \vartheta_2(k_1) &= \pi(2-k_1^2), \quad \vartheta_3(k_1) = k_1^{-2} \sqrt{1-k_1^2} + k_1^{-3} (2k_1^2-1) \arcsin k_1\end{aligned}\quad (3.3)$$

Здесь $\mathbf{K}=\mathbf{K}(k_i)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, k_i — модуль эллиптических функций ($i=1, 2$). Для случая $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ принимаем $i=1$, а для $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ — $i=2$.

Из вида правых частей (3.3) следует, что наличие сопротивления среды приводит к монотонному уменьшению величин λ_1, λ_2 , а следовательно, и связанных с ними [8] величин кинетического момента и кинетической энергии твердого тела. В первом приближении на изменение медленных переменных оказывают влияние лишь диагональные коэффициенты α_{ii} ($i=1, 2, 3$) матрицы Γ . Члены, содержащие недиагональные компоненты Γ , выпадают при усреднении. Отметим, что компоненты диссипативного момента M_1, M_3 не оказывают влияния в области $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ на эволюцию величин λ_1 и λ_2 соответственно.

Дифференцируя выражение для k_1 с учетом (3.3), получаем уравнение

$$k_1^* = \frac{1}{4}\varepsilon \mathbf{K}^{-1} \lambda_2 \{ 2\alpha_{22}^{-1} k_1^3 \vartheta_1(k_1) + \alpha_{33}^{-1} \vartheta_2(k_1) - 2k_1 [\alpha_{11}^{-1} \vartheta_3(k_1) + \alpha_{22}^{-1} \vartheta_1(k_1)] \} \quad (3.4)$$

откуда следует, что $|k_1^*(t)|$ монотонно убывает при $t \rightarrow \infty$ вместе с $\lambda_2(t) \rightarrow 0$.

Для случая $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ в уравнениях (3.3), (3.4) и далее необходимо поменять местами λ_1 и λ_2 , α_{11}^{-1} и α_{33}^{-1} , k_1 и k_2 соответственно.

При $k_1=1$ точность метода усреднения, а следовательно, и решений дифференциальных уравнений (3.3), (3.4) снижается [12].

4. Основным этапом исследования движения тела является анализ уравнений (3.3) и (3.4).

Рассмотрим частные случаи движения.

При $\alpha_{22}^{-1} = \alpha_{33}^{-1} = 0$ уравнения (3.3), (3.4) имеют вид

$$\lambda_1^* = 0, \quad \lambda_2^* = -\frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{K}^{-1} \lambda_2^2 \alpha_{11}^{-1} \vartheta_3(k_1), \quad k_1^* = -\frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{K}^{-1} \lambda_2 k_1 \alpha_{11}^{-1} \vartheta_3(k_1) \quad (4.1)$$

Фазовый портрет, соответствующий (4.1), показан на фиг. 2, где G — модуль кинетического момента, h — кинетическая энергия твердого тела; лучам μ_1, μ_3 отвечают вращения вокруг осей наименьшего и наибольшего моментов инерции, а лучу μ_2 — вращения вокруг оси с моментом инерции B и движения по сепаратриссам задачи Эйлера — Пуансо.

На фиг. 3, 4 показаны фазовые портреты движения при выполнении условий $\alpha_{11}^{-1} = \alpha_{22}^{-1} = 0$ и $\alpha_{11}^{-1} = \alpha_{33}^{-1} = 0$ соответственно.

При $\alpha_{11}^{-1} = 0$ уравнения (3.3) и (3.4) запишем в виде

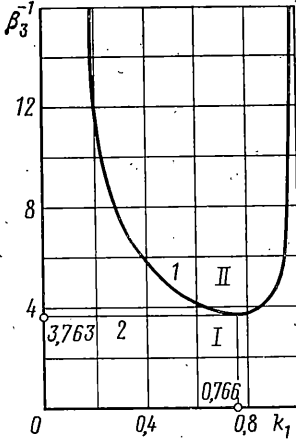
$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= -\frac{1}{4}\varepsilon \mathbf{K}^{-1} \lambda_1^2 [2\alpha_{22}^{-1} k_1^3 \vartheta_1(k_1) + \alpha_{33}^{-1} \vartheta_2(k_1)] \\ \lambda_2^* &= -\frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{K}^{-1} \lambda_2^2 \alpha_{22}^{-1} \vartheta_1(k_1) \\ k_1^* &= \frac{1}{4}\varepsilon \mathbf{K}^{-1} \lambda_2 [2\alpha_{22}^{-1} k_1^3 \vartheta_1(k_1) + \alpha_{33}^{-1} \vartheta_2(k_1) - 2\alpha_{22}^{-1} k_1 \vartheta_1(k_1)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Определим квазистационарные решения $k_1 = k_*$, для чего приравняем правую часть последнего уравнения (4.2) нулю. Полученное равенство для ненулевых значений k_1 разрешим относительно элементов матрицы Γ :

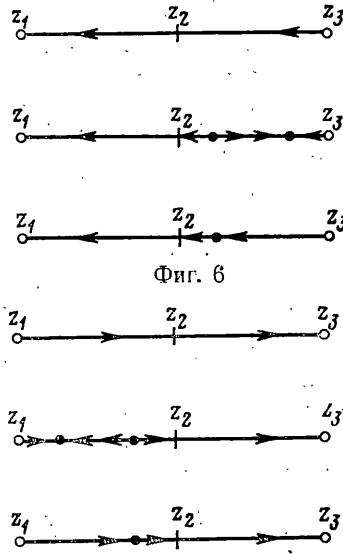
$$\beta_3^{-1} = \frac{1}{2} \vartheta_2(k_1) \vartheta_1^{-1}(k_1) (k_1 - k_1^3)^{-1}, \quad \beta_3 = \alpha_{33}^{-1} / \alpha_{22}^{-1} \quad (4.3)$$

График зависимости β_3^{-1} от k_1 , определенный численно, изображен кривой 1 на фиг. 5. Прямая 2, касательная к 1, разбивает интервал значений β_3 на две области. Анализ графика показывает, что в случае $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ имеет место квазистационарное решение $k_* = 0,766$ (полуустойчивый предельный цикл), а для $\beta_3^{-1} > 3,763$ существуют два ненулевых квазистационарных решения, которые исчезают при $\beta_3^{-1} < 3,763$. В случае $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ существует единственное квазистационарное решение $k_2 = 0$, а в случае $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ — также решение $k_1 = 0$.

Устойчивость найденных квазистационарных движений по отношению к переменной k [13] проанализируем с использованием усредненного уравнения (3.4). Для этого определим знак функции $\partial \theta / \partial k$ при значениях α_{ii}^{-1} ($i=1, 2, 3$), соответствующих квазистационарным движениям, где



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 7

$\theta = \theta(K, k_1, \alpha_{ii})$ — функция в правой части (3.4). Знак $\partial\theta/\partial k$ анализируется с использованием графика на фиг. 5.

На фиг. 6 показан характер изменения величины k в зависимости от β_3 . Указаны точки, соответствующие квазистационарным движениям, а стрелками показано направление движения. Буквами z_1, z_2, z_3 обозначены оси тела, соответствующие моментам инерции A, B, C , в окрестности которых находится ω . Слева от z_2 расположена область, что $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, а справа — область, в которой $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Номера областей на фиг. 5 отвечают порядковому номеру качественных картин движения, изображенных на фиг. 6. Третья картина движения на фиг. 6 соответствует случаю $\beta_3^{-1} = 3,763$ (точка пересечения линий 1, 2 на фиг. 5).

При $\alpha_{33}^{-1} = 0$ исследование решения проводится аналогично случаю $\alpha_{11}^{-1} = 0$. Квазистационарные значения $k_2 = k_*$ определяются из условия, подобного (4.3):

$$\beta_1^{-1} = \frac{1}{2} \vartheta_2(k_2) \vartheta_1^{-1}(k_2) (k_2 - k_2^3)^{-1}, \quad \beta_1 = \alpha_{11}^{-1} / \alpha_{22}^{-1} \quad (4.4)$$

График зависимости β_1^{-1} от k_2 идентичен изображенному на фиг. 5. На фиг. 7 показан характер изменения величины k в зависимости от β_1 для соответствующих фиг. 5 множеств значений β_1 .

При $\alpha_{22}^{-1} = 0$ ненулевые квазистационарные решения $k_1 = k_*$ определяются из условия

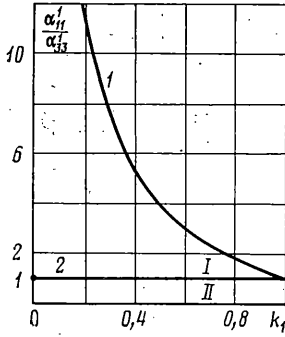
$$\alpha_{11}^{-1} / \alpha_{33}^{-1} = \frac{1}{2} \vartheta_2(k_1) k_1^{-1} \vartheta_3^{-1}(k_1) \quad (4.5)$$

График зависимости $\alpha_{11}^{-1} / \alpha_{33}^{-1}$ от k_1 , определенный численно, изображен кривой 1 на фиг. 8. Прямая 2 $\alpha_{11}^{-1} / \alpha_{33}^{-1} = 1$ разбивает плоскость графика на две области. Анализ графика показывает, что при $\alpha_{33}^{-1} < \alpha_{11}^{-1}$ существует квазистационарное значение $k_1 = k_*$, отвечающее асимптотически устойчивому предельному циклу. При $\alpha_{33}^{-1} = \alpha_{11}^{-1}$ имеет место полуустойчивый предельный цикл. Для $\alpha_{33}^{-1} > \alpha_{11}^{-1}$ предельные циклы исчезают. Квазистационарное решение $k_1 = 0$ асимптотически устойчиво и решение $k_2 = 0$ асимптотически устойчиво. Порядковые номера качественных картин движения на фиг. 9 соответствуют номерам областей на фиг. 8. Третья картина движения соответствует условию $\alpha_{33}^{-1} = \alpha_{11}^{-1}$.

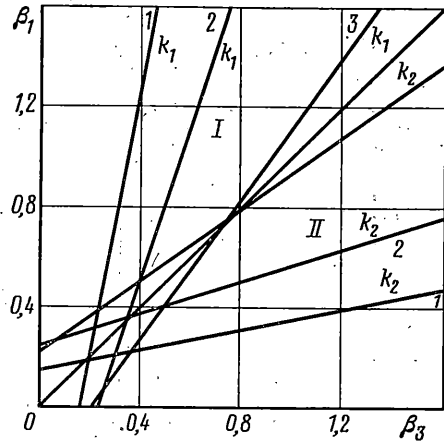
Рассмотрим общий случай. Квазистационарные решения определим из условия

$$\beta_1 = \beta_3 \frac{\vartheta_2(k_1)}{2k_1 \vartheta_3(k_1)} + (k_1^2 - 1) \frac{\vartheta_1(k_1)}{\vartheta_3(k_1)} \quad (4.6)$$

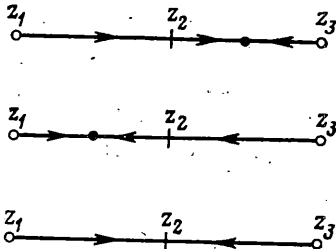
В плоскости β_1, β_3 проведем прямые (4.6) и аналогичные прямые для



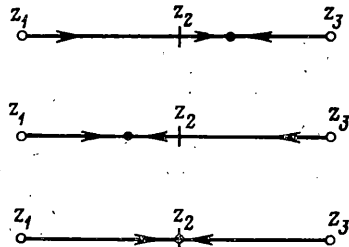
Фиг. 8



Фиг. 10



Фиг. 9



Фиг. 11

случая $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Прямая $\beta_1 = \beta_3$ делит квадрант $\beta_1 > 0, \beta_3 > 0$ на две области, изображенные на фиг. 10, где прямые 1 соответствуют значению $k_* = 0,4$, прямые 2 — $k_* = 0,6$, а прямые 3 — $k_* = 0,9$.

На фиг. 11 приводятся диаграммы, показывающие число квазистационарных решений уравнения (3.4) и характер их устойчивости в зависимости от значений β_1 и β_3 . Порядковые номера диаграмм соответствуют номерам областей на фиг. 10, где случаю $\beta_1 = \beta_3$ соответствует третья диаграмма.

Итак, из (3.3) следует, что в рассматриваемом приближении величины кинетического момента и кинетической энергии тела строго убывают. Эволюция параметров движения Эйлера — Пуансо в связанной с телом системе координат для общего случая действия диссипативного момента описывается уравнениями (3.3), (3.4) и качественно представлена на фиг. 11. Число квазистационарных режимов движения и их устойчивость зависят от относительной величины коэффициентов диссипации для главных осей инерции и соотношения моментов инерции тела.

Автор благодарит Д. А. Погорелова за постановку задачи и внимание к работе, Л. Д. Акуленко и В. Ф. Журавлева — за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Леценко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 5–13.
2. Артюхин Ю. П., Каргу Л. И., Симаев В. Л. Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением. М.: Наука, 1979. 295 с.
3. Вибрации в технике. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. / Под ред. И. И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. 352 с.
4. Леценко Д. Д. О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо сопротивляющейся среде. — Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 3, с. 89–94.
5. Кошляков В. Н. О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде. — ПММ, 1953, т. 17, вып. 2, с. 137–148.
6. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1966. 332 с.
9. Wittenburg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner, 1977. 224 p. — Рус. перев.: М.: Мир, 1980. 292 с.
10. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 143 с.
11. Дубошин Г. Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 799 с.
12. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
13. Румянцев В. В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по отношению к части переменных. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 138–143.

Москва

Поступила в редакцию
16.IV.1984