

УДК 539.3

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ОДНОНАПРАВЛЕННОМ КОМПОЗИТЕ

МИХАЙЛОВ А. М., СЛЕПЯН Л. И.

Рассматривается стационарное распространение свободной трещины, движущейся перпендикулярно волокнам в дискретном однонаправленном композите. Длинноволновое приближение полученного решения описывает движение трещины в однородной среде с некоторыми эффективными характеристиками, которые получаются осреднением упругих и инерционных свойств волокон и связующего по периоду структуры. Из сравнения точного решения и длинноволнового приближения найдена зависимость эффективной поверхностной энергии, характеризующей трещиностойкость однородной среды, от параметров структуры композита и скорости трещины.

Постановка задачи учитывает дискретную структуру композита [1] и приводит к конечным напряжениям в материале. Трещина продвигается вперед, когда нормальное напряжение в волокне достигает предела прочности. Энергия внешнего упругого поля при разрыве не теряется, а лишь преобразуется в энергию высокочастотных волн, излучаемых из точки разрыва. При анализе длинноволнового приближения обнаруживается, что напряжение в окрестности кончика трещины не ограничено и указанный выше критерий распространения трещины становится неприменимым. В теории трещин в сплошной среде вместо нормирования максимальных напряжений нормируется поток энергии в кончик трещины при ее продвижении (см., например, [2], § 1.11).

Таким образом, различные приближения при описании композита требуют введения различных характеристик прочности: в первом случае такой характеристикой является прочность волокна σ_b , во втором — эффективная поверхностная энергия γ . Далее устанавливается связь между этими характеристиками при стационарном движении трещины в диапазоне скоростей, ограниченном скоростью волны сдвига. В случае нулевой скорости аналогичный результат получен в [3]. Некоторые общие результаты о соотношении потоков энергии при различных способах описания упругой среды с микроструктурой даны в [4]. В [5] получено решение одной из простейших задач такого рода — для кубической решетки из сосредоточенных масс и безынерционных пружин. Показано, что истинная потеря упругой энергии, определяемая разрывом пружины, отличается от потерь энергии, которые получаются при решении задачи в длинноволновом приближении; отличие существенно зависит от скорости трещины (см. также [6]).

Случай однонаправленного композита в этом отношении особенно интересен: хотя на микроуровне потерь энергии при разрушении нет, в длинноволновом приближении получается конечный поток энергии в кончик трещины. Как следует из решения задачи на микроуровне, весь этот поток идет на излучение высокочастотных упругих волн.

1. Рассматривается плоская задача для композита, волокна которого, занумерованные индексом j , направлены параллельно оси y . Считается, что нормальному напряжению сопротивляются только волокна, а деформация сдвига происходит только благодаря связующему и можно пренебречь движением композита в направлении оси x (x, y — прямоугольные координаты).

Пусть E, G — модули Юнга и сдвига, h, H — размеры в направлении оси x , ρ_1, ρ_2 — плотности, соответственно, волокна и связующего. Обозначим скорость волн сдвига в связующем через $c_2 = \sqrt{G/\rho_2}$, коэффициент армирования через $\psi = h/(h+H)$, отношение масс компонентов через $b = \rho_2 H/\rho_1 h$. Кроме того, введем осредненные величины $G_0 = G/(1-\psi)$, $E_0 = E\psi$, $\rho_0 = \rho_1\psi + \rho_2(1-\psi)$. При вычислении средних модулей G_0, E_0 учитывается, что связующее обладает нулевым модулем Юнга, а волокна — бесконечным модулем сдвига.

В качестве единиц измерения длины, времени, напряжения и скорости принимаем соответственно \sqrt{Hh} , \sqrt{Hh}/c_2 , \sqrt{EG} и c_2 .

Безразмерный период решетки, образованной волокнами, равен $\lambda = (H+h)/\sqrt{Hh} = 1/\sqrt{\psi(1-\psi)}$. Закон Гука записывается так (σ_j, τ — нормаль-

ное и касательное напряжения): $\sigma_j = \beta^{-1} \partial v_j / \partial y$, $\tau = \beta \partial v_c / \partial x$, $\beta = \sqrt{G/E}$. Смещение связующего v_c удовлетворяет одномерному волновому уравнению

$$\partial^2 v_c / \partial x^2 - \partial^2 v_c / \partial t^2 = 0 \quad (1.1)$$

В точках прикрепления связующего к волокну смещения непрерывны. Движение волокна описывается волновым уравнением с правой частью, которая выражает действие связующего на волокно

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} = -\beta^2 \sqrt{H^0} \left[\frac{\partial v_c}{\partial x} \right]_j \quad (1.2)$$

$$H^0 = H/h, \quad c_1 = c_2 \sqrt{E/G}$$

Здесь c_1 — безразмерная скорость продольных волн в волокне; квадратные скобки означают скачок указанной там производной при переходе через волокно.

Применив к (1.1), (1.2) преобразование Лапласа по времени при нулевых начальных условиях и подставив выражение для v_c^L из (1.1) в правую часть (1.2), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно смещения волокон (p — параметр преобразования, v_j^L — трансформанта Лапласа):

$$\frac{d^2 v_j^L}{dy^2} \frac{\text{sh } \omega}{\omega} + \beta^2 \left(v_{j+1}^L - \left(2 \text{ch } \omega + \frac{\omega \text{ sh } \lambda}{b} \right) v_j^L + v_{j-1}^L \right) = 0$$

$$\omega = p \sqrt{H^0} \quad (j=0, \pm 1, \dots) \quad (1.3)$$

Введем для описания смещений и напряжений в волокнах обобщенные функции, сосредоточенные в точках $x = j\lambda$ (δ — функция Дирака):

$$v(x, y, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j(y, t) \delta(x - j\lambda), \quad \sigma(x, y, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j(y, t) \delta(x - j\lambda) \quad (1.4)$$

Преобразование Фурье по переменной x от смещения превращается в ряд Фурье (дискретное преобразование Фурье):

$$v^F(q, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y, t) \exp(iqx) dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j(y, t) \exp(iqj\lambda)$$

Уравнение (1.3) после преобразования переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 v^{LF}}{dy^2} - \beta^2 S^2 v^{LF} = 0, \quad S = \left(\frac{\omega^2}{b} + \frac{2\omega}{\text{sh } \omega} (\text{ch } \omega - \cos q\lambda) \right)^{1/2} \quad (1.5)$$

решение которого, исчезающее при $y \rightarrow +\infty$, имеет вид

$$v^{LF} = C(\omega, q) \exp(-y\beta S) \quad (1.6)$$

где $C(\omega, q)$ — произвольная функция, ω, q вещественны. Ветвь функции S в (1.5) фиксирована условием $\sqrt{1} = 1$ или, что то же самое, разрезом вдоль отрицательной полуоси комплексной плоскости S^2 .

Дифференцируя (1.6) по y и используя закон Гука, получим связь между напряжением и перемещением

$$\sigma^{LF} + S v^{LF} = 0 \quad (1.7)$$

2. Решим уравнение (1.7) при условии, что вдоль оси x вправо распространяется последовательность разрывов волокон со средней скоростью V :

$$0 < V < c_0 = \sqrt{G_0/\rho_0 c_2}^{-1} = \sqrt{b/(b+1)} (1-\psi)^{-1} \quad (2.1)$$

(c_0 — скорость волны сдвига в однородном материале с осредненными жесткостью и плотностью; смысл последнего ограничения станет ясным в процессе решения). Движение начинается при $t=0$, когда рвутся все волокна с неположительными номерами и к разорванным волокнам прикладывается нагрузка $\sigma_j(0, t)$, вид которой определим позднее.

Волокно, пограничное между порванными и целыми, остается неразрушенным в течение времени $(h+H)/Vc_2$ после разрыва соседнего с ним волокна, а затем мгновенно рвется. Безразмерная длительность этого промежутка времени равна $T=\lambda/V$. Связующее в соответствии с принятым допущением об отсутствии в нем нормальных напряжений обладает нулевой прочностью на разрыв. Поэтому по связующему трещина распространяется беспрепятственно.

Перейдем к стационарным переменным ξ, y, t , где $\xi=x-Vt$. Такой переход порождает преобразование функций и интегральных трансформант. Обозначим $v_*(\xi, y, t)=v(\xi+Vt, y, t)$, $\sigma_*(\xi, y, t)=\sigma(\xi+Vt, y, t)$ и запишем краевые условия с помощью v_* , σ_* .

При $y=0$ известно смещение на продолжении трещины: $v_*(\xi, 0, t)=0$, $\xi>0$ и известна нагрузка $\sigma_*(\xi, 0, t)$ на берегу трещины, т. е. при $\xi<0$.

Установим связь между интегральными трансформантами функций v , σ и «функций на луче» v_* , σ_* . Для этого зафиксируем ξ и проведем преобразование Лапласа по t над функцией $v_*(\xi, y, t)$ (так называемое преобразование на луче). Вследствие (1.4) интеграл Лапласа превратится в ряд

$$v_*^L(\xi, y, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j(y, t) \delta(\xi+Vt-j\lambda) dt =$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j(y, t_j(\xi)) \exp(-pt_j(\xi)), \quad t_j(\xi) = \frac{1}{V} (j\lambda - \xi) = jT - \frac{\xi}{V}$$
(2.2)

(при $t_j<0$ слагаемые считаются равными нулю). Отметим предельное соотношение для преобразования (2.2). Если существует предел $v_j(y, t_j)$ при $j \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\lambda v_*^L(\xi, y, p) = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{j=-\infty}^{\infty} pT \exp(-pt_j(\xi)) v_j(y, t_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} v_j(y, t_j)$$
(2.3)

Последнее равенство следует из теоремы Теплица ([7], с. 326), которая дает достаточные условия того, что линейное преобразование последовательности v_j с помощью матрицы a_{nj} сохраняет ее предел; в данном случае $a_{nj}=(T/n) \exp(-t_j/n)$, $n \rightarrow \infty$. Проведем преобразование Фурье по ξ над (2.2):

$$v_*^{LF}(q, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{V} \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j(y, t_j) \exp(-pt_j+iq\xi) d\xi$$

и почленно проинтегрируем ряд. В интеграле, который берется при фиксированном j , перейдем к интегрированию по t_j (t_j непрерывно зависит от ξ при фиксированном j): $\xi=j\lambda-Vt_j$, $d\xi=-Vdt_j$ ($-\infty<t_j<\infty$). Поскольку при $t_j<0$ смещения равны нулю, пределы интегрирования сужаются до $(0, +\infty)$. Итак

$$v_*^{LF}(q, y, p) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp(iq\lambda j) \int_0^{\infty} v_j(y, t_j) \exp(-t(p+iqV)) dt_j = v^{LF}(q, y, p+iqV)$$

Аналогичное соотношение имеет место и для σ_*^{LF} . Заменяя в (1.7) p на $p+iqV$, получим

$$\sigma_*^{LF}(q, y, p) + S_*(q, p) v_*^{LF}(q, y, p) = 0$$
(2.4)

$$S_*(q, p) = [H^0 s^2 b^{-1} + 2\sqrt{H^0 s} \cdot \text{sh}^{-1}(\sqrt{H^0 s}) (\text{ch}(\sqrt{H^0 s}) - \cos q\lambda)]^{1/2}, \quad s=p+iqV$$
(2.5)

Выпишем длинноволновое приближение для S_* , заменив подкоренное выражение полиномом второй степени

$$S_* \sim nQ_+Q_- \quad (p, q \rightarrow 0) \quad (2.6)$$

$$Q_{\pm} = \sqrt{q\lambda \pm ip\lambda / (c_0 \mp V)}, \quad n = \sqrt{1 - V^2 c_0^{-2}}$$

Благодаря ограничению (2.1) особые точки радикалов Q_+ , Q_- лежат по разные стороны вещественной оси комплексной плоскости q . Отметим следующие свойства S_* : $S_*^2 = -m^2 \lambda^2 q^2 + o(q^2)$, $q \rightarrow \infty$, $m = V/c_0 \sqrt{b+1}$. Когда q пробегает вещественную ось, $\text{Arg } S_*$ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$ ($\text{Arg } S_* = 0$ при $q=0$). Чтобы убедиться в этом, нужно взять p настолько большим, чтобы первое слагаемое в (2.5) превзошло по модулю второе (при таком гомотопном преобразовании индекс не меняется); после этого на основании теоремы Руше ([8], с. 37) достаточно найти индекс первого слагаемого. Однако в длинноволновом приближении (2.6) при условии (2.1) индекс S_* равен нулю, вследствие чего возможен поток энергии в край трещины, если рассматривать композит как однородную бесструктурную среду [4].

3. Используя краевые условия на трещине и ее продолжении, решим уравнение (2.4) при $y=0$ методом Винера — Хопфа.

Разложим $v_*(\xi, 0, t)$, $\sigma_*(\xi, 0, t)$ на односторонние слагаемые, т. е. функции, сосредоточенные на той полуоси ξ , которую указывает знак в обозначениях, $v_*(\xi, 0, t) = v_-(\xi, t)$, $\sigma_*(\xi, 0, t) = \sigma_+(\xi, t) + \sigma_-(\xi, t)$. Известно, что преобразование Фурье односторонних функций с индексом плюс аналитично при $\text{Im } q > 0$, а с индексом минус — при $\text{Im } q < 0$. На вещественной оси они связаны соотношением

$$\sigma_+^{LF} + S_* v_-^{LF} = -\sigma_-^{LF} \quad (3.1)$$

Разделим S_* на mQ_+Q_- . Из (2.5) следует, что частное стремится к i при $q \rightarrow \infty$, а индекс его такой же, как у S_* . Полученное частное поделим на $\sqrt{i-q\lambda}/\sqrt{i+q\lambda}$. Индекс делителя на вещественной оси равен $1/2$, как и у S_* (см. п. 2). Получаем функцию $R(q, p)$ с нулевым индексом, которая стремится к единице при $q \rightarrow \pm\infty$. В уравнении (3.1) функция S_* принимает вид

$$S_* = mQ_+Q_- \frac{\sqrt{i-q\lambda}\sqrt{i+q\lambda}}{\sqrt{i-q\lambda}\sqrt{i+q\lambda}} R(q, p) \quad (3.2)$$

Представим R на вещественной оси q при помощи интегралов типа Коши ([9], п. 14.3) в виде отношения R_+/R_- краевых значений функций, аналитичных в соответствующих полуплоскостях:

$$R_{\pm} = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln R(\kappa, p)}{\kappa - q} d\kappa \right) \quad (\text{Im } q \geq 0) \quad (3.3)$$

Группируя в (3.1) функции с одинаковыми областями аналитичности, приходим к уравнению

$$\frac{\sigma_+^{LF} \sqrt{i+q\lambda}}{mR_+Q_+} + \frac{v_-^{LF} \sqrt{i-q\lambda} Q_-}{R_-} = \frac{\sigma_-^{LF} \sqrt{i+q\lambda}}{mR_+Q_+}, \quad p > 0 \quad (3.4)$$

Правая часть его известна, если задана нагрузка σ_-^{LF} на разорванных волокнах. Выберем нагрузку так, чтобы правая часть (3.4) равнялась

$$C / (2\pi ip) [(q\lambda - ip\lambda)^{-1} - (q\lambda + ip\lambda)^{-1}], \quad p > 0 \quad (3.5)$$

где C — произвольная постоянная. Тогда при $t \rightarrow \infty$ предельное решение будет отвечать трещине со свободными берегами. В самом деле, используя предельное соотношение для преобразования Лапласа, получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_-^{LF}(q, 0, t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \sigma_-^{LF}(q, 0, p) = CR_+(q, 0) m \frac{\sqrt{q\lambda + i0}}{\sqrt{i+q\lambda}} \delta(q\lambda) = 0$$

Таким образом, взяв нагрузку в соответствии с (3.5), получим в пределе ($t \rightarrow \infty$) ненулевое решение стационарной задачи для трещины со свободными берегами.

Подставляя (3.5) в (3.4), умножая уравнение на p и переходя к пределу при $p \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\sigma_+^F \sqrt{q\lambda}}{R_+(q, 0) m \sqrt{q\lambda + i0}} + \frac{C}{2\pi i (q\lambda + i0)} = - \frac{v_-^F \sqrt{i - q\lambda} \sqrt{q\lambda - i0}}{R_-(q, 0)} + \frac{C}{2\pi i (q\lambda - i0)} \quad (3.6)$$

Из (3.3) видно, что $R_{\pm} \rightarrow 1$ при $q \rightarrow \infty$, так как интеграл типа Коши, стоящий под знаком экспоненты, исчезает на бесконечности ([9], п. 4.6). Из условий задачи следует, что σ_+^F , qu_-^F стремятся к нулю, когда q уходит в бесконечность в соответствующей полуплоскости. Поэтому на основании теоремы Лиувилля можно утверждать, что обе части равенства (3.6) равны нулю. Отсюда получаем решение

$$\sigma_+^F = - \frac{CR_+(q, 0) m}{2\pi i \sqrt{q\lambda + i0} \sqrt{q\lambda + i}} \quad u_-^F = \frac{CR_-(q, 0)}{2\pi i (q\lambda - i0)^{1/2} \sqrt{i - q\lambda}}$$

Под знаком преобразования Фурье стоят функции ξ . Их значения равны пределам последовательностей $\sigma_j(0, t_j)/\lambda$, $v_j(0, t_j)/\lambda$, которые получаются при движении вдоль луча $\xi = \text{const}$ в сторону роста времени (см. (2.2), (2.3)). Обозначим пределы напряжений $\sigma_j(0, t_j(\xi))$ и перемещений $v_j(0, t_j(\xi))$ при $j \rightarrow +\infty$ через $\sigma(\xi)$, $v(\xi)$ (предельный переход проводится при $\xi = \text{const}$; $t_j(\xi)$ — моменты времени, в которые пересекаются линии $x = j\lambda$ и $x - Vt = \xi$).

Постоянная C определяется из условия прочности $\sigma(+0) = \lambda \sigma_+(+0, 0_+) = \sigma_b / \sqrt{EG}$, где σ_b — прочность волокна (размерная). Предел при $\xi \rightarrow +0$ находится с помощью теоремы операционного исчисления, которая в данном случае записывается так:

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \sigma_* = \lim_{q \rightarrow +i\infty} (-iq \sigma_+^F)$$

После этого получаем выражение для смещения

$$v_-^F = \frac{\sigma_b}{\sqrt{EG}} \frac{R_-(q, 0)}{im \sqrt{i - q\lambda} (q\lambda - i0)^{1/2}}$$

Исследуем асимптотику смещения при $\xi \rightarrow -\infty$, для чего находим асимптотику изображения v_-^F при $q \rightarrow 0$:

$$v_-^F \sim \frac{\sigma_b}{\sqrt{EG}} \frac{R_-(0, 0)}{i \sqrt{im} \lambda^{1/2} (q - i0)^{1/2}}$$

и соответствующий оригинал (использована формула (10) из [10]):

$$v(\xi) = \lambda v_-(\xi, 0, \infty) \sim - \frac{\sigma_b}{\sqrt{EG}} \frac{2 R_-(0, 0)}{\sqrt{\pi} m} \sqrt{-\frac{\xi}{\lambda}} \quad (3.7)$$

4. Теперь решим уравнение (2.4) при $y=0$, используя асимптотическое выражение (2.6) для функции S_* . Это длинноволновое приближение точного решения описывает поведение композита на «макроуровне» — при больших масштабах по сравнению с $h+H$. Поскольку особые точки радикалов из (2.6) лежат в разных полуплоскостях (индекс равен нулю), отпадает необходимость в предварительных преобразованиях коэффициента задачи сопряжения и факторизации с помощью формулы (3.3). Вместо (3.6) получаем

$$\frac{\sigma_+^F}{\sqrt{q\lambda + i0}} + \frac{C}{2\pi i (q\lambda + i0)} = - n \sqrt{q\lambda - i0} v_-^F + \frac{C}{2\pi i (q\lambda - i0)}$$

Отсюда, повторяя рассуждения п. 3, имеем

$$\sigma_+^F = -\frac{C}{2\pi i \sqrt{q\lambda + i0}}, \quad u_-^F = \frac{C}{2\pi i n (q\lambda - i0)^{1/2}} \quad (4.1)$$

$$\sigma(\xi) = \lambda \sigma_+(\xi, 0, +\infty) = -C \sqrt{\lambda/\xi} / (2\pi i \sqrt{\pi i}) \quad (4.2)$$

$$v(\xi) = \lambda v_-(\xi, 0, +\infty) = -C \sqrt{-\xi/\lambda 2} / (2\pi i n \sqrt{\pi i})$$

Из сравнения (3.7) и (4.2) видно, что решение в длинноволновом приближении приводит к экстраполяции поведения точного решения вдали от кончика трещины на всю область, занятую композитом.

К длинноволновому приближению можно прийти иначе. Разложим в (1.5) S^2 по степеням ω , q , удержим слагаемые со степенями не выше второй и возвратимся к оригиналам. В результате получим последовательно

$$\left(\frac{d^2 v^{LF}}{dy^2} - \beta^2 \lambda^2 q^2 v^{LF} = \beta^2 \frac{1-\psi}{\psi} \frac{b+1}{b} p^2 v^{LF} \right. \\ \left. G_0 \partial^2 v / \partial x^2 + E_0 \partial^2 v / \partial y^2 = \rho_0 \partial^2 v / \partial t^2 \right) \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) описывает движение вдоль оси y однородной среды с уравнением состояния $\sqrt{EG} \sigma_{yy} = E_0 \partial v / \partial y$, $\sqrt{EG} \sigma_{xy} = G_0 \partial v / \partial x$ (множитель \sqrt{EG} превращает безразмерные напряжения в размерные). Уравнение (4.3) получится так же, если устремить в (1.3) h , H к нулю, сохраняя постоянным коэффициент армирования ψ . Решая смешанную стационарную задачу для (4.3), снова придем к (4.2), причем среднее нормальное напряжение σ_{yy} связано с напряжением в волокнах $\sigma(\xi)$ из (4.2) соотношением $\sigma_{yy} = \psi \sigma(\xi)$ (напряжение в волокне осредняется по периоду структуры).

В отличие от п. 3 определить постоянную C из условия прочности волокна невозможно, так как при $\xi \rightarrow +0$ напряжение неограниченно растет. Начиная с Гриффитса ([2], п. 2.4), постановка условия прочности для упругих тел с трещиной сводится к нормированию потока энергии в кончик трещины при продвижении трещины на единицу длины. Поток энергии равен

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \frac{1}{2} \sigma_{yy}(\xi, 0) v(\xi - \Delta x, 0) \sqrt{EG} \sqrt{Hh} d\xi \quad (4.4)$$

Источником энергии являются напряжения на бесконечности (напряжения при удалении от края трещины стремятся к нулю, но их работа стремится к положительной постоянной). Неограниченное перемещение в стационарной однородной задаче для (4.3) возникает в результате предельного перехода, при котором нагрузка на берегах стремится к нулю так, чтобы сохранялось напряженное состояние у края трещины. Например, сосредоточенная сила, которая удаляется все дальше от кончика трещины и растет как квадратный корень из расстояния, обладает таким свойством. Корневая асимптотика решения распространяется на все более обширную область и в пределе получается решение, неограниченное в бесконечности.

Приравняем поток энергии (4.4) поверхностной энергии 2γ двух образующихся поверхностей. Отсюда однозначно найдем постоянную C и смещение

$$v(\xi) = [8\gamma / (\pi \psi n \sqrt{EG} \sqrt{Hh})]^{1/2} \sqrt{-\xi/\lambda} \quad (\xi < 0) \quad (4.5)$$

Сравнив это выражение с асимптотикой (3.7) смещения в точной постановке, получим связь между эффективной поверхностной энергией γ и параметрами структуры композита

$$2\sqrt{EG} \gamma / (\sigma_b^2 \sqrt{Hh} \psi) = m^{-2} n R^{-2} (0, 0) \quad (4.6)$$

Еще раз подчеркнем, что в рамках дискретно-континуального описания упругого композита, данного в п. 1, потеря энергии при разрыве волокна не происходит. Энергия, притекающая из напряженного тела, преобразуется при разрыве волокна в энергию упругих волн с длиной порядка размера структуры. При предельном переходе, включающем измельчение структуры и приводящем к уравнению (4.3) длинноволнового при-

ближения, эти волны слабо стремятся к нулю, но их энергия к нулю не стремится. Приведем для пояснения пример. Пусть в одномерном случае $\sigma(x) = \sin(\pi x/h)$, $x \in [0, 1]$. Тогда $\sigma \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ в смысле слабой сходимости в пространстве $L_2(0, 1)$. Однако квадрат нормы, равный интегралу от σ^2 на указанном отрезке, пропорциональный упругой энергии, стремится к $1/2$ ([11], с. 215). Таким образом, эффективная поверхностная энергия может превышать истинную и при отсутствии пластических деформаций у края трещины — за счет превращения на микроструктурном уровне энергии упругого поля в энергию высокочастотных колебаний (см. также [4], п. 2, где рассмотрена задача о падении нити с бесконечно убывающей изгибной жесткостью на жесткое основание). В реальных материалах это порождает звуковую эмиссию и тепловые потоки.

5. Для анализа зависимости (4.6) преобразуем $R_-(0, 0)$ к виду, удобному для вычислений. Предельное значение интеграла типа Коши из (3.3) при $q=0$ по формуле Сохоцкого — Племеля ([9], с. 54) равно

$$-\frac{1}{2} \ln R(0, 0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^{-1} \ln R(\kappa, 0) d\kappa$$

При вычислении первого слагаемого учтем, что при $p \rightarrow 0$ $S_*(0, p) \sim \sim p\lambda/c_0$ и, следовательно $R(0, 0) = \lim_{p \rightarrow 0} S_*(0, p) / (m(Q_+ Q_-)_{q=0}) = n/m$ при $p \rightarrow 0$.

Представляя числитель под интегралом как сумму логарифма модуля и аргумента, умноженного на мнимую единицу, и учитывая четность по κ первого слагаемого и нечетность второго, получим правую часть (4.6) в виде ($\text{Arg } R(0, 0) = 0$):

$$\frac{1}{m} \exp \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Arg } R(\kappa, 0)}{\kappa} d\kappa \right)$$

Итак, окончательно получаем

$$\Delta = \frac{2\gamma\sqrt{EG}}{\sigma_0^2\sqrt{Hh}\psi} = \frac{c_0\sqrt{b+1}}{V} \exp \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Arg } R(\kappa, 0)}{\kappa} d\kappa \right) \quad (5.1)$$

Анализ показывает, что интеграл сходится при $V < c_0$. При $V \rightarrow c_0 - 0$ $\text{Arg } R(\kappa, 0) \rightarrow \pi/2$ в суживающейся окрестности точки $\kappa=0$. Это приводит к неограниченному росту интеграла и, следовательно, — эффективной поверхностной энергии.

На фигуре приведены графики зависимости (5.1) (сплошная линия $b=0$, 1, пунктирная — $b=1$, штрихпунктирная — $b=10$). Интеграл вычислялся методом Гаусса на ЭВМ БЭСМ-6, программа была написана на языке $\alpha-6$, допускающем в качестве операндов комплексные выражения [12]. Величине p присваивались все меньшие значения, пока не наступала стабилизация результата [13].

Отметим подобный характер зависимости $\gamma(V)$, постулированный для объяснения скачкообразного движения трещин [14] (см. также [6]).

6. При уменьшении отношения V/c_0 расчет по зависимости (5.1) становится все более сложным. Поэтому для статки дадим решение задачи другим способом, который приводит

к элементарному вычислению величины Δ .

Будем исходить из решения, полученного в [3]. Если при $y=0$ порваны волокна с номерами $j = -1, -2, \dots, -(2+1)$ и к ним приложено постоянное безразмерное напряжение σ , то безразмерные смещения порванных волокон равны (Γ — гамма-функция): $v_j(0) = \sigma \Gamma(1/2 - j) \Gamma(g_1) / [\Gamma(-j) \Gamma(g_2)]$, $g_1 = 2n + 1/2 + j$, $g_2 = 2n + 2 + j$.

Напряжения в целых волокнах справа от трещины равны $\sigma_j(0) = (n+j+1)\Gamma(1/2+j)\Gamma(g_2)/[\Gamma(1+j)\Gamma(g_1)]$ (в формулах (2.16), (3.4) из [3] следует положить $M=\infty$, $r=n+1+j$). Устремим n к бесконечности, а σ к нулю таким образом, чтобы выполнялось равенство $\sigma\sqrt{2n+5/2}=C=\text{const}$. Тогда на основании формулы Валлиса ([7], с. 145):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(1/2+n)\sqrt{n+1/2}}{\Gamma(1+n)} = 1 \quad (6.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_j(0) = C \frac{\Gamma(1/2-j)}{\Gamma(-j)} \quad (j=-1, -2, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_j(0) = C \frac{\Gamma(1/2+j)}{2\Gamma(1+j)} \quad (j=0, 1, \dots)$$

Это и есть статическое решение задачи о полубесконечной свободной трещине. Асимптотическое поведение смещений и напряжений при $j \rightarrow \mp \infty$ находим с помощью (6.1):

$$v_j(0) \sim C\sqrt{-j} = C\sqrt{-\xi/\lambda}, \quad j \rightarrow -\infty; \quad \sigma_j(0) \sim 1/2 C\sqrt{|j|} = 1/2 C\sqrt{\lambda/\xi}, \quad j \rightarrow +\infty \quad (6.2)$$

Определяем, как и выше, постоянную C из условия прочности $\sigma_0(0) = 1/2 C\Gamma(1/2)/\Gamma(1) = \sigma_b/\sqrt{EG}$, $C = 2\sigma_b/\sqrt{\lambda EG}$ и сравниваем (6.2) с (4.5). Это при $V=0$ дает $\Delta=1$. Результат, равносильный, но отличный по форме, содержится в [3, с. 138]. Следовательно, все графики на фигуре отсекают на вертикальной оси единичный отрезок.

В заключение оценим величину γ для реального композита. Воспользуемся данными из [15] (с. 116, 117, табл. I, II; волокна из бора, связующее — смола ERLA-4289): $h=H=0,01$ см, $\psi=0,5$, $E=4,14 \cdot 10^7$ Н/см², $\sigma_b=3,17 \cdot 10^5$ Н/см², $G=8,27 \cdot 10^4$ Н/см². Вычисляя по формуле (6.3), получим $\gamma=13,4$ Н/см ($1,34 \cdot 10^6$ дин/см), что на несколько порядков превосходит истинную поверхностную энергию $5 \cdot 10^3$ дин/см, обусловленную молекулярными силами сцепления ([16], с. 49, табл. 2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. М. Динамика однонаправленного стеклопластика. — ПМТФ, 1974, № 4, с. 139–145.
2. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
3. Михайлов А. М. О разрушении однонаправленного стеклопластика. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5, с. 131–139.
4. Слепян Л. И. Динамика хрупкого разрушения в средах со структурой. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 6, с. 121–130.
5. Слепян Л. И. Антиплоская задача о трещине в решетке. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 101–115.
6. Кулажметова Ш. А., Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о трещине в решетке. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 3, с. 112–118.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969. 800 с.
8. Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963. 245 с.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
10. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
11. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
12. Анисеева И. Н., Буда А. О., Васючкова Т. С., Кожухина С. К., Козловский С. Э., Шелехов В. И. Транслятор альфа-6 в системе Дубна. М.: Наука, 1979. 352 с.
13. Кулажметова Ш. А. Динамика трещины в анизотропной решетке. — Докл. АН СССР, 1985, т. 281, № 2, с. 300–303.
14. Баренблатт Г. И., Салганик Р. Л. О расклинивании хрупких тел. Автоколебания при расклинивании. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 436–449.
15. Чамис К. Микромеханические теории прочности. — В кн.: Композитные материалы. Разрушение и усталость. М.: Мир, 1978, т. 5, с. 106–165.
16. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.