МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 531.3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ЗАКОН УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОСТАНОВКЕ ВРАЩЕНИЯ

ГОЛУБЕВ Ю. В., ДЕМИДОВ В. Н.

Задача о минимизации времени остановки вращения космического аппарата с ограниченной мощностью двигателей и задача о минимизации энергетических затрат на остановку его вращения за фиксированное время рассматривались в [1], где была предложена теория систем с инвариантной нормой, т. е. систем, для которых стандартная евклидова норма является первым интегралом невозмущенных уравнений движения. На основе этой теории и существования у систем, описываемых невозмущенными динамическими уравнениями Эйлера, первого интеграла – квадрата модуля вектора кинетического момента – было найдено оптимальное управление в ряде конкретных случаев в виде функциональной зависимости от текущих координат. Основные положения данной теории получили дальнейшее развитие в работах ряда исследователей [2–7].

Вместе с тем необходимо отметить, что динамические уравнения Эйлера, описывающие движение твердого тела относительно центра масс, при отсутствии возмущений имеют двухпараметрическое семейство первых интегралов, порождаемое квадратом модуля вектора кинетического момента и кинетической энергией вращательного движения. Кроме того, решения невозмущенных уравнений Эйлера могут быть найдены в виде явной зависимости от времени [8]. В этой связи интерес представляет исследование [4], где, в частности, при изучении задачи остановки вращения аппарата за наименьшее время, используя наличие указанного семейства первых интегралов невозмущенных уравнений Эйлера, было найдено условие, позволившее определить явные решения этой задачи в более общей постановке.

В публикуемой работе обобщается понятие систем с инвариантной нормой и представлены некоторые теоретические подходы к исследованию указанных систем. Предлагаемый математический аппарат позволяет учесть наличие известного аналитического решения и двухпараметрического семейства первых интегралов невозмущенных динамических уравнений Эйлера.

1. Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ t)+B\mathbf{u} \quad (\mathbf{x}\in R^n,\ \mathbf{u}\in R^n) \tag{1.1}$$

B — диагональная матрица с элементами b_i. Пусть невозмущенная система

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ t) \tag{1.2}$$

обладает первыми интегралами

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij}|x_i|^\rho, \quad \rho>1, \quad A_{ij}>0 \quad (i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,k) \tag{1.3}$$

Замечание. Правой частью неавтономной системы (1.2) может быть любое выражение вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m(\mathbf{x},t)\,\mathbf{f}_m(\mathbf{x}) \tag{1.4}$$

в котором $\gamma_m(\mathbf{x},\ t)$ — непрерывные функции фазовых координат и времени, а $\mathbf{f}_m(\mathbf{x})$ — n-мерные непрерывные вектор-функции фазовых координат, при этом системы $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{f}_m(\mathbf{x})$ обладают первыми интегралами (1.3). Сходимость ряда (1.4) предполагается равномерной на каждом компактном множестве пространства $(\mathbf{x},\ t)$. В случае $j=1$, используя разбиение единицы [9], можно показать, что непрерывная правая часть любой неавтономной системы, обладающей первым интегралом (1.3), может быть представлена в виде ряда (1.4), удовлетворяющего оговоренным свойствам.

Для системы (1.1) сформулируем две задачи:

определить управление, осуществляющее перевод системы (1.1) из $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$ в $\mathbf{0}$ за минимальное время T и удовлетворяющее ограничению $(|u_1|^\rho+\ldots+|u_n|^\rho)^{1/\rho}\leqslant\Gamma$.

определить управление, осуществляющее перевод системы (1.1) из $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$ в $\mathbf{0}$ за фиксированное время T и доставляющее минимум функционалу

$$I=\int_0^T(|u_1|^\rho+\ldots+|u_n|^\rho)^{\alpha/\rho}\,dt \qquad (\alpha>1)$$

Под решением задач будем понимать определение управления в форме синтеза, т. е. $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ (во второй задаче синтез строится при каждом фиксированном $T>0$), а в п. 2 — в программной форме, т. е. $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$.

Теорема 1. Пусть элементы b_i $(i=1,\ldots,n)$ матрицы B удовлетворяют условию

$$|b_i|=\left(\sum_{j=1}^k s_jA_{ij}\right)^{-1/\rho} \tag{1.5}$$

где s_j $j=1,\ldots,k$ таковы, что $\sum\limits_{j=1}^k s_jA_{ij}>0 \qquad (i=1,\ldots,n)$

Тогда решением первой задачи служит управление $u_i=-x_i\Gamma/(b_iH(\mathbf{x}))$ $(i=1,\ldots,n)$, а решением второй — управление

$$u_i=-x_i/[b_i(T-t)] \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$H(\mathbf{x})=\left(\sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^n s_jA_{ij}|x_i|^\rho\right)^{1/\rho}$$

При этом $I=(H(\mathbf{x}_0)/T)^\alpha T$.

Доказательство. Обозначим через $H^\bullet$ производную от H в силу системы (1.1). Так как H является первым интегралом системы (1.2), то

$$H^\bullet=\sum_{i=1}^n\frac{1}{H^{\rho-1}(\mathbf{x})}\left(\sum_{j=1}^k s_jA_{ij}\right)\operatorname{sign}(x_i)\,|x_i|^{\rho-1}b_iu_i$$

Определим область значений $H^\bullet$ при $(|u_1|^\rho+\ldots+|u_n|^\rho)^{1/\rho}=c$, воспользовавшись множителями Лагранжа, найдем максимальное и минимальное значения $H^\bullet$.

$$L=\sum_{i=1}^n\frac{\operatorname{sign}(b_ix_i)\,|x_i|^{\rho-1}}{|b_i|^{\rho-1}H^{\rho-1}(\mathbf{x})}u_i-\lambda[(|u_1|^\rho+\ldots+|u_n|^\rho)^{1/\rho}-c]$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i}=\frac{\operatorname{sign}(b_ix_i)\,|x_i|^{\rho-1}}{|b_i|^{\rho-1}H^{\rho-1}(\mathbf{x})}-$$

$$-\lambda\frac{\operatorname{sign}(u_i)\,|u_i|^{\rho-1}}{(|u_1|^\rho+\ldots+|u_n|^\rho)^{(\rho-1)/\rho}}=0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$\partial L/\partial\lambda=(|u_1|^\rho+\ldots+|u_n|^\rho)^{1/\rho}-c=0$$

Отсюда вытекает, что $|\lambda|=1$, $|u_i|=c|x_i|/(b_iH(\mathbf{x}))$ $(i=1,\ldots,n)$. Следовательно, при $(|u_1|^\rho+\ldots+|u_n|^\rho)^{1/\rho}=c$ наибольшее значение $H^\bullet$ достигается, если $u_i=x_ic/(b_iH(\mathbf{x}))$, $i=1,\ldots,n$ и это значение равно $+c$. Управление $u_i=-x_ic/(b_iH(\mathbf{x}))$, $i=1,\ldots,n$ доставляет $H^\bullet$ наименьшее значение $-c$. Ввиду связности множества $\{\mathbf{u}\in R^n\colon (|u_1|^\rho+\ldots+|u_n|^\rho)^{1/\rho}=c\}$ область значений $H^\bullet$ для любого $\mathbf{x}$ и t на этом множестве есть отрезок $[-c;\ +c]$. Следовательно, $H^\bullet=ca$, где $c=(|u_1|^\rho+\ldots+|u_n|^\rho)^{1/\rho}$, a принимает значения от -1 до $+1$ в зависимости от направления $\mathbf{u}$ и значения $\mathbf{x}$. Очевидно, что требования $\mathbf{x}=0$ и $H(\mathbf{x})=0$ эквивалентны. Рассмотрим первую задачу. В силу изложенного она сводится к одномерной задаче:

$$y^{\cdot}=ca, \quad y(0)=H(\mathbf{x}_0), \quad y(T)=H(\mathbf{0})=0, \quad |a|\leqslant 1, \quad 0\leqslant c\leqslant \Gamma$$
$$\int_0^T dt=T\to\min \tag{1.6}$$

Аналогично вторая задача сводится к задаче:

$$y^{\cdot}=ca, \quad y(0)=H(\mathbf{x}_0), \quad y(T)=0, \quad |a|\leqslant 1, \quad c\geqslant 0, \quad T=\mathrm{const}$$
$$\int_0^T c^\alpha\,dt\to\min, \quad \alpha>1 \tag{1.7}$$

Решением задачи (1.6) служит $a\equiv-1$, $c\equiv\Gamma$.

Решением задачи (1.7) служит $a\equiv-1$, $c\equiv H(\mathbf{x}_0)/T$.

Следовательно, решение первой задачи дается управлением $u_i=-x_i\Gamma/(b_iH(\mathbf{x}))$, $i=1,\ldots,n$, решение второй — управлением $u_i=-x_iH(\mathbf{x}_0)/(b_iTH(\mathbf{x}))=-x_i/[b_i(T-t)]$, $i=1,\ldots,n$.

Замечание 1. При $\alpha=1$ решение второй задачи не единственно. В этом случае решения имеют вид

$$u_i=-\beta(t)x_i\Big/\left(b_i\int_t^T\beta(\tau)\,d\tau\right) \quad \text{при} \quad \int_t^T\beta(\tau)\,d\tau>0$$
$$u_i=0 \quad \text{при} \quad \int_t^T\beta(\tau)\,d\tau=0; \quad \beta(t)\geqslant 0, \quad \int_0^T\beta(t)\,dt=1$$

Замечание 2. В случае, когда ранг матрицы A, образованной элементами A_{ij}, равен k, формулы (1.5) определяют k-мерную поверхность в n-мерном пространстве коэффициентов $b_1,\ldots,b_n$. Взяв в качестве элементов матрицы B соответствующие координаты любой точки этой поверхности, можно при помощи теоремы 1 получить решения задач в явном виде.

Замечание 3. В соответствии с терминологией [1] систему дифференциальных уравнений (1.1), удовлетворяющую условию теоремы 1, можно было бы назвать системой с инвариантной полинормой. Функции H образуют k-параметрическое семейство норм (вообще говоря, уже не евклидовых), являющихся первыми интегралами невозмущенной системы (1.2).

2. Результаты, полученные в [1], так же как и обобщающая их теорема 1 данной работы, ввиду своей общности не позволяют, вообще говоря, найти явную зависимость в виде функций от времени для оптимальных управлений. Однако, если на систему (1.1) наложить некоторые дополнительные условия, то определение указанной зависимости от времени может быть сведено к интегрированию невозмущенной системы (1.2). Подобный прием был использован в [4] при исследовании систем, инвариантных относительно квадратичной нормы.

Теорема 2. Пусть системы (1.1) и (1.2) удовлетворяют условиям (1.3) и, кроме того, правая часть системы (1.2) имеет вид

$$f_i(\mathbf{x},t)=\sum_{j_1\ldots j_l}A^{\,i}_{j_1\ldots j_l}x_{j_1}\ldots x_{j_l}$$

где $A^{\,i}_{j_1\ldots j_l}$ — константы. Обозначим через $\mathbf{z}(t)$ решение системы (1.2) при $\mathbf{z}(0)=\mathbf{x}_0$. Тогда решением первой задачи служит управление

$$u_i(t)=-\frac{z_i(H(\mathbf{x}_0)/(\Gamma l)[1-(1-\Gamma t/H(\mathbf{x}_0))^l])\Gamma}{b_iH(\mathbf{x}_0)} \quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.1}$$

а решением второй — управление

$$u_i(t) = -\frac{z_i[T(1-(1-t/T)^l)/l]}{b_i T} \qquad (i=1,\dots,n) \qquad (2.2)$$

Закон движения, соответствующий решению первой задачи, имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}\left(\frac{H(\mathbf{x}_0)}{\Gamma l}\left[1-\left(1-\frac{\Gamma t}{H(\mathbf{x}_0)}\right)^l\right]\right)\left(1-\frac{\Gamma t}{H(\mathbf{x}_0)}\right) \qquad (2.3)$$

Закон движения, соответствующий решению второй задачи, дается формулой

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(T[1-(1-t/T)^l]/l)(1-t/T) \qquad (2.4)$$

Доказательство. Докажем (2.2) и (2.4) (справедливость (2.1) и (2.3) устанавливается аналогично).

Продифференцируем выражение (2.4):

$$x_i^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = z_i^{\boldsymbol{\cdot}}(T[1-(1-t/T)^l]/l)(1-t/T)^{l-1}(1-t/T) -$$
$$-z_i(T[1-(1-t/T)^l]/l)/T$$

Учитывая формулу (2.4) и то, что $z(t)$ есть решение системы (1.2), правые части полученных равенств можно преобразовать следующим образом:

$$x_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{j_1\dots j_l} A^i_{j_1\dots j_l} z_{j_1}\dots z_{j_l}\left(1-\frac{t}{T}\right)^l - \frac{z_i}{T} = \sum_{j_1\dots j_l} A^i_{j_1\dots j_l} x_{j_1}\dots x_{j_l} +$$
$$+ b_i\frac{-z_i}{b_i T} = \sum_{j_1\dots j_l} A^i_{j_1\dots j_l} x_{j_1}\dots x_{j_l} + b_i\frac{-x_i}{b_i}\frac{H(\mathbf{z})}{TH(\mathbf{x})} \quad (i=1,\dots,n)$$

Так как функция H является первым интегралом системы (1.2), полученные выражения приобретают вид

$$x_i^{\boldsymbol{\cdot}} = f_i(\mathbf{x}, t) + b_i(-x_i H(\mathbf{x}_0))/(b_i T H(\mathbf{x})) =$$
$$= f_i(\mathbf{x}, t) + b_i(-x_i)/[b_i(T-t)] \quad (i=1,\dots,n)$$

Теперь справедливость (2.2) и (2.4) следует из теоремы 1.

3. Уравнения, описывающие поведение угловой скорости космического аппарата, примем в виде [1—7, 10—13]:

$$Ap^{\boldsymbol{\cdot}} = (B-C)qr + b_1u_1 \qquad (3.1)$$
$$Bq^{\boldsymbol{\cdot}} = (C-A)rp + b_2u_2, \quad Cr^{\boldsymbol{\cdot}} = (A-B)pq + b_3u_3$$

Пусть энергетические затраты (например, при управлении двигателями малой тяги [14]) определяются выражением

$$\int_0^T (u_1^2+u_2^2+u_3^2)\,dt$$

где T — конечный момент времени управления, а u_1, u_2, u_3 — управляющие воздействия. Ограничение на мощность указанных двигателей имеет вид $u_1^2+u_2^2+u_3^2 \leqslant D$.

Задача остановки вращения аппарата за минимальное время при ограниченной мощности двигателей малой тяги и задача остановки вращения аппарата с минимальной энергией за фиксированное время могут быть сформулированы следующим образом:

определить управление, удовлетворяющее условиям $(u_1^2+u_2^2+u_3^2) \leqslant D$, $(p(0);\ q(0);\ r(0)) = (p_0;\ q_0;\ r_0)$; $(p(T);\ q(T);\ r(T)) = (0;\ 0;\ 0)$ и доставляющее минимум

$$\int_0^T dt = T \qquad (3.2)$$

определить управление, удовлетворяющее условиям $(p(0);\ q(0);\ r(0))=(p_0;\ q_0;\ r_0)$; $(p(T);\ q(T);\ r(T))=(0;\ 0;\ 0)$ и доставляющее минимум (T — фиксировано):

$$I=\int_0^T (u_1^2+u_2^2+u_3^2)\,dt \tag{3.3}$$

Теорема 3. Пусть выполнено условие

$$|A-B|+|B-C|\neq 0 \tag{3.4}$$

тогда, если коэффициенты b_1, b_2, b_3 в системе (3.1), модуль каждого из которых имеет физический смысл плеча соответствующей пары, удовлетворяют условию

$$|b_1|=\sqrt{\frac{A^2}{s_1A+s_2A^2}},\qquad |b_2|=\sqrt{\frac{B^2}{s_1B+s_2B^2}},\qquad |b_3|=\sqrt{\frac{C^2}{s_1C+s_2C^2}} \tag{3.5}$$

в котором s_1, s_2 таковы что $s_1A+s_2A^2>0$, $s_1B+s_2B^2>0$, $s_1C+s_2C^2>0$, то решением задачи (3.2) служит управление

$$u_1=-\frac{Ap\sqrt{D}}{b_1H(p;q;r)}\qquad u_2=-\frac{Bq\sqrt{D}}{b_2H(p;q;r)},\qquad u_3=-\frac{Cr\sqrt{D}}{b_3H(p;q;r)}$$

решение задачи (3.3) служит управление

$$u_1=-\frac{Ap}{b_1(T-t)}\qquad u_2=-\frac{Bq}{b_2(T-t)},\qquad u_3=-\frac{Cr}{b_3(T-t)}$$

$$H(p;\ q;\ r)=[\,(s_1A+s_2A^2)p^2+(s_1B+s_2B^2)q^2+(s_1C+s_2C^2)r^2]^{1/2}$$

При этом $I=H^2(p_0;\ q_0;\ r_0)/T$.

Доказательство. Невозмущенные динамические уравнения Эйлера имеют два первых интеграла: интеграл квадрата длины кинетического момента $A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=\mathrm{const}$ и интеграл кинетической энергии Ap^2+Bq^2+ $+Cr^2=\mathrm{const}$. В системе (3.1) первое уравнение разделим на A, второе — на B, третье — на C. Тогда преобразованная система удовлетворяет условию теоремы 1 при $\rho=2$, $\alpha=2$, $\Gamma=\sqrt{D}$. Отсюда следует справедливость теоремы 3.

В случае невыполнения условия (3.4), т. е. когда $A=B=C$, решения задач (3.2), (3.3) могут быть явно определены при любых b_1, b_2, b_3 ($b_i\neq 0$).

Формулы (3.5) в пространстве R^3 коэффициентов b_1; b_2; b_3 определяют двумерную коническую поверхность. Координаты каждой точки этой поверхности задают плечи соответствующих управляющих пар, при которых решения задач (3.2) и (3.3) определяются в явном виде как функции текущих координат и времени.

Уравнение, полученное в [4] при исследовании задачи (3.2):

$$A(C-B)b_2^2b_3^2+B(A-C)b_1^2b_3^2+C(B-A)b_1^2b_2^2=0$$

при выполнении (3.4) эквивалентно условиям (3.5) и, следовательно, определяет ту же поверхность в пространстве R^3. Заметим, что в [1] найдено собственное подмножество этой поверхности, а именно луч: $b_1=b_2=b_3$; $b_3>0$.

Отметим также, что в том случае, когда имеют место условия (3.5), решение задачи построения синтеза оптимальной стабилизации системы (3.1) с функционалом (T фиксировано)

$$I=\int_0^T [H^2(p;q;r)+K(u_1^2+u_2^2+u_3^2)\,]\,dt\qquad (K>0)$$

может быть найдено в явном виде. Указанным решением являются формулы

$$u_1=\frac{Ap}{b_1\sqrt{K}}\operatorname{th}\left(\frac{t-T}{\sqrt{K}}\right),\qquad u_2=\frac{Bq}{b_2\sqrt{K}}\operatorname{th}\left(\frac{t-T}{\sqrt{K}}\right),$$

$$u_3=\frac{Cr}{b_3\sqrt{K}}\operatorname{th}\left(\frac{t-T}{\sqrt{K}}\right) \tag{3.6}$$

Вывод равенств (3.6) аналогичен выводу предыдущих уравнений. Равенства (3.6) являются обобщением результата [2].

Обозначим через $(P(t); Q(t); R(t))$ решение невозмущенных динамических уравнений Эйлера, при $(P(0); Q(0); R(0))=(p_0; q_0; r_0)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Обозначим $H_0=$ $=H(p_0;\ q_0;\ r_0);\ g(t)=t-\frac{1}{2}\sqrt{D}t^2/H_0$. Тогда решением задачи (3.2) служит управление

$$u_1(t)=-\frac{A\sqrt{D}P(g(t))}{b_1H_0},\qquad u_2(t)=-\frac{B\sqrt{D}Q(g(t))}{b_2H_0},$$

$$u_3(t)=-\frac{C\sqrt{D}R(g(t))}{b_3H_0} \tag{3.7}$$

решением задачи (3.3) служит управление

$$u_1(t)=-\frac{AP(t-{}^1/_2t^2/T)}{b_1T},\qquad u_2(t)=-\frac{BQ(t-{}^1/_2t^2/T)}{b_2T}$$

$$u_3(t)=-\frac{CR(t-{}^1/_2t^2/T)}{b_3T} \tag{3.8}$$

закон изменения угловой скорости, соответствующий решению задачи (3.2), имеет вид

$$p(t)=P(g(t))(1-\sqrt{D}t/H_0),\qquad q(t)=Q(g(t))(1-\sqrt{D}t/H_0)$$

$$r(t)=R(g(t))(1-\sqrt{D}t/H_0) \tag{3.9}$$

закон изменения угловой скорости, соответствующий решению задачи (3.3), дается формулами

$$p(t)=P(t-{}^1/_2t^2/T)(1-t/T),\qquad q(t)=Q(t-{}^1/_2t^2/T)(1-t/T)$$

$$r(t)=R(t-{}^1/_2t^2/T)(1-t/T) \tag{3.10}$$

Справедливость этой теоремы следует из теорем 2 и 3.

Замечание. Справедливость теоремы 4 можно также установить опираясь на результаты [15]. Величины $P(t)$; $Q(t)$; $R(t)$ при $A>B>C$ явно выражаются через эллиптические функции Якоби, а при $B=C$ определяются через элементарные функции [8]. Поэтому формулы (3.7) и (3.8) задают явную зависимость от времени для управлений, служащих решениями задач (3.2) и (3.3) соответственно.

Формулы (3.9) и (3.10) задают явную зависимость от времени фазовых траекторий, определяемых решениями задач (3.2) и (3.3) соответственно. Вместе с кинематическими уравнениями Эйлера формулы (3.9) и (3.10) позволяют найти полный закон движения твердого тела относительно центра масс в рассматриваемом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Athans M., Falb P. L., Lacoss R. T.* Time-, fuel- and energy-optimal control of nonlinear norm-invariant systems.— IEEE Trans. Automat. Control, 1963, v. AC-8, No. 3, p. 196–202.
2. *Kumar K. S. P.* On the optimum stabilization of a satellite.— IEEE Trans. Aerosp. and Electron. Systems, 1965, v. AES-1, No. 2, p. 82–83.— Рус. перев.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1967, № 4, с. 62–64.
3. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
4. *Акуленко Л. Д.* Оптимальная по быстродействию стабилизация возмущенной системы с инвариантной нормой.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 4, с. 613–622.
5. *Акуленко Л. Д.* Оптимальный синтез в некоторых задачах терминального управления.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 989–999.
6. *Акуленко Л. Д.* Приближенный синтез оптимального управления движением по части переменных.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 5, с. 3–13.
7. *Акуленко Л. Д.* Оптимальная стабилизация несимметричного спутника.— Космич. исследования, 1980, т. 18, вып. 5, с. 689–697.
8. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972. 322 с.
9. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.
10. *Иослович И. В.* Наискорейшее торможение вращения аксиально-симметрического спутника.— Космич. исследования, 1964, т. 2, вып. 4, с. 567–569.
11. *Борщевский М. З., Иослович И. В.* Некоторые задачи оптимальной стабилизации осесимметричного спутника.— Космич. исследования, 1966, т. 4, вып. 3, с. 344–350.
12. *Охоцимский Д. Е., Голубев Ю. Ф., Сихарулидзе Ю. Г.* Алгоритмы управления космического аппарата при входе в атмосферу. М.: Наука, 1975. 399 с.
13. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
14. *Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1966. 679 с.
15. *Смольников Б. А.* Обобщение эйлерова случая движения твердого тела.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 735–736.

Москва

Поступила в редакцию
17.IV.1985