МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1986

УДК 539.3:534.1

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ УПРУГОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МГНОВЕННО ПРИЛОЖЕННОГО РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ

КАРПЕНКО В. В., ПАНКРАТОВ А. С., САЙГИНА В. И.

Нестационарному взаимодействию деформируемых конструкций с акустической средой посвящен ряд работ [1–5]. Однако полученные точные (в рамках постановки) решения задач аэрогидроупругости относятся к геометрически идеализированным конструкциям (полоса, круговая цилиндрическая и сферическая оболочки).

В публикуемой статье исследуется влияние отношения полуосей на характер колебаний конструктивно-ортотропной эллиптической цилиндрической оболочки, нагруженной внешним равномерным давлением. Приводятся результаты численных расчетов.

1. Рассмотрим воздействие мгновенно приложенного внешнего давления $p_0(\tau)$ на тонкую упругую конструктивно-ортотропную оболочку, срединная поверхность которой образует эллиптический цилиндр с полуосями a и b $(a\geqslant b)$. Характер нагрузки и геометрия конструкции позволяют рассматривать задачу о движении оболочки как плоскую, поэтому, воспользовавшись технической теорией тонких оболочек [6], запишем уравнения движения эллиптического кольца в следующем виде:

$$w^{\cdot\cdot}+\frac{c_2}{kc_3}p_2+\frac{w}{c_1l_1^6(\xi_0,\eta)}+\frac{c_4}{c_1l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{l_1(\xi_0,\eta)}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}w-\frac{c_4}{c_1l_1^4(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\times$$
$$\times\frac{v}{l_1^3(\xi_0,\eta)}+\frac{1}{c_1l_1^4(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}v=-\frac{c_2}{kc_3}p_0(\tau)$$
$$v^{\cdot\cdot}-\frac{1}{c_1l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}v-\frac{c_4}{c_1l_1^4(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{l_1(\xi_0,\eta)}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{v}{l_1^3(\xi_0,\eta)}+\frac{c_4}{c_1l_1^4(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}w-$$
$$-\frac{1}{c_1l_1(\xi_0,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{w}{l_1^3(\xi_0,\eta)}=0 \qquad (1.1)$$
$$w|_{\tau=0}=v|_{\tau=0}=w^{\cdot}|_{\tau=0}=v^{\cdot}|_{\tau=0}=0$$

В уравнениях системы (1.1) v, w и $v^{\cdot\cdot}$, $w^{\cdot\cdot}$ – соответственно проекции перемещений и ускорений срединной поверхности оболочки в направлениях по касательной и нормали к ней, p_2 – давление излучения на поверхности оболочки, возникшее от ее деформации, $l_1(\xi_0,\eta)$ – значение коэффициента Ламе $l_1(\xi,\eta)=(a/b(1-b^2/a^2)(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta))^{1/2}$ при $\xi=\xi_0$, где $\xi_0=0{,}5\ln((1+b/a)/(1-b/a))$.

Давление излучения $p_2(\xi,\eta,\tau)$ определяется в результате решения краевой задачи для волнового уравнения в эллиптических координатах с нулевыми начальными условиями

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}p_2(\xi,\eta,\tau)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}p_2(\xi,\eta,\tau)=l_1^2(\xi,\eta)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}p_2(\xi,\eta,\tau)$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi}p_2(\xi,\eta,\tau)|_{\xi=\xi_0}=-c_3l_1(\xi_0,\eta)w^{\cdot\cdot}(\eta,\tau),\quad p_2(\xi,\eta,\tau)|_{\xi\to\infty}\to0 \qquad (1.2)$$

В уравнениях движения кольца (1.1) и жидкости (1.2) параметры ε, c_i, K, k, соответственно, равны $\varepsilon={}^1/_{12}\Delta^2/R^2$, $c_1=\rho a_0^2(1-\mu^2)/\mathrm{E}$, $c_2=R\rho_0/\Delta\rho$, $c_3=\rho_0 a_0^2/P_m$, $c_4=\varepsilon Kk$, $K=1+12E_0 I(1-\mu^2)/\mathrm{E}l\delta^3$, $k=0{,}5\pi(b/a)^{1/2}\mathrm{E}(U)$, $U=(1-b^2/a^2)^{1/2}$, где ρ_0, a_0 — плотность жидкости и скорость звука в ней, P_m — амплитуда давления в волне обжатия, Δ — толщина кругового кольца радиуса $R=(ab)^{1/2}$, которое эквивалентно по массе эллиптическому толщиной δ, ρ — плотность материала колец, μ, E, E_0 — коэффициент Пуассона и модули Юнга материалов колец и шпангоутов, I — момент инерции сечения шпангоута с присоединенным пояском, l — расстояние между шпангоутами, $\mathrm{E}(U)$ — эллиптический интеграл второго рода.

Уравнения (1.1) и (1.2) записаны в безразмерных переменных v, w, τ, $\ddot{v}$, $\ddot{w}$, p, которые связаны с размерными V, W, t, $\ddot{V}$, $\ddot{W}$, P соотношениями $v=V/R$, $w=W/R$, $\tau=a_0 t/R$, $\ddot{v}=R\ddot{V}/a_0^2$, $\ddot{w}=R\ddot{W}/a_0^2$, $p=P/P_m$.

2. Систему уравнений (1.1) необходимо решать совместно с краевой задачей (1.2). В [7] было показано, что давление излучения на поверхности эллиптической оболочки определяется рядом

$$p_2(\xi_0,\ \eta,\ \tau)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(g_k^c(\xi_0,\ \tau)\cos k\eta+g_{k+1}^s(\xi_0,\ \tau)\sin(k+1)\eta\right) \qquad (2.1)$$

Величины $g_k^{c,s}(\xi_0,\ \tau)$ выражаются интегралами свертки от коэффициентов Фурье $\ddot{w}_\nu^{c,s}$ функций $\zeta_{\nu,k}^{c,s}(\xi_0,\ \tau)$, характеризующих реакцию жидкости на деформацию оболочки

$$g_{2k}^c(\xi_0,\ \tau)=\int_0^\tau\left[0{,}5\ddot{w}_0^c(\tau_1)\,\zeta_{0,2k}^c(\xi_0,\ \tau-\tau_1)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\ddot{w}_{2\nu}^c(\tau_1)\,\zeta_{2\nu,\,2k}^c(\xi_0,\ \tau-\tau_1)\right]d\tau_1$$

$$g_{2k+1}^{c,s}(\xi_0,\ \tau)=\int_0^\tau\sum_{\nu=0}^{\infty}\ddot{w}_{2\nu+1}^{c,s}(\tau_1)\,\zeta_{2\nu+1,\,2k+1}^{c,s}(\xi_0,\ \tau-\tau_1)\,d\tau_1$$

$$g_{2k+2}^s(\xi_0,\ \tau)=\int_0^\tau\sum_{\nu=0}^{\infty}\ddot{w}_{2\nu+2}^s(\tau_1)\,\zeta_{2\nu+2,\,2k+2}^s(\xi_0,\ \tau-\tau_1)\,d\tau_1$$

Передаточные функции $\zeta_{k,m}^{c,s}(\xi_0,\ \tau)$ определяются в результате суммирования рядов

$$\zeta_{2\nu,\,2k}^c(\xi_0,\ \tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m,\,2\nu}^c\psi_{2k,\,2m}^c(\xi_0,\ \tau),\qquad \zeta_{2\nu+1,\,2k+1}^{c,\,s}(\xi_0,\ \tau)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m+1,\,2\nu+1}^{c,\,s}\psi_{2k+1,\,2m+1}^{c,\,s}(\xi_0,\ \tau)$$

$$\zeta_{2\nu+2,\,2k+2}^s(\xi_0,\ \tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m+2,\,2\nu+2}^s\psi_{2k+2,\,2m+2}^s(\xi_0,\ \tau)$$

$$\lambda_{m,\,\nu}^c=4\int_0^{\pi/2}l_1(\xi_0,\ \theta)\cos m\theta\cos\nu\theta\,d\theta,\qquad \lambda_{m+1,\,\nu+1}^s=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}l_1(\xi_0,\ \theta)\sin(m+1)\theta\sin(\nu+1)\theta\,d\theta$$

а функции $\psi_{k,m}^{c,s}(\xi_0,\ \tau)$ выражаются интегралами $(q={}^1/_4 a\omega^2(1-b^2/a^2)/b)$

$$\psi_{k,\,m}^c(\xi_0,\ \tau)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}\sum_n A_k^{(n)}(q)\,A_m^{(n)}(q)\,\frac{\mathrm{Me}_n^{(2)}(\xi_0,\ q)}{\mathrm{Me}_n^{(2)\prime}(\xi_0,\ q)}\,d\omega$$

$$\psi_{k+1,\,m+1}^s(\xi_0,\ \tau)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}\sum_n B_{k+1}^{(n+1)}(q)\,B_{m+1}^{(n+1)}(q)\,\frac{\mathrm{Ne}_{n+1}^{(2)}(\xi_0,\ q)}{\mathrm{Ne}_{n+1}^{(2)\prime}(\xi_0,\ q)}\,d\omega$$

В двух последних формулах $A_k^{(n)}(g)$, $B_{k+1}^{(n+1)}(g)$ и $\mathrm{Me}_n^{(2)}(\xi_0, g)$, $\mathrm{Ne}_{n+1}^{(2)}(\xi_0, g)$ — коэффициенты периодических и соответствующих им модифицированных функций Матье [8]; числа k, m имеют одинаковую четность, а суммирование по n осуществляется лишь по положительным числам такой же четности, что и k, m.

Принимая во внимание структуру решения краевой задачи (1.2), будем искать решение системы (1.1) с помощью метода Бубнова — Галеркина. Для этого представим функции $w(\eta, \tau)$ и $v(\eta, \tau)$, удовлетворяющие системе (1.1), в виде тригонометрических рядов Фурье

$$w(\eta, \tau) = 0{,}5w_0^c(\tau) + \sum_{n=1}^{N} (w_n^c(\tau)\cos n\eta + w_n^s(\tau)\sin n\eta) \tag{2.2}$$

$$v(\eta, \tau) = 0{,}5v_0^c(\tau) + \sum_{n=1}^{N} (v_n^c(\tau)\cos n\eta + v_n^s(\tau)\sin n\eta)$$

Подставим равенства (2.2) в систему уравнений (1.1), затем каждое из уравнений системы последовательно умножим на элементы полной на интервале $(0;\ 2\pi)$ системы функций $\{\cos m\eta;\ \sin m\eta\}$, полученные выражения проинтегрируем по всему промежутку $[0;\ 2\pi]$ и, наконец, воспользуемся равенством

$$x(\tau) = \int_0^\tau (\tau - \tau_1)\, \ddot{x}(\tau_1)\, d\tau_1$$

справедливым для любой дважды дифференцируемой функции, удовлетворяющей условию $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. В результате после громоздких преобразований для коэффициентов Фурье $\ddot{w}_n^{c,s}(\tau)$, $\ddot{v}_n^{c,s}(\tau)$ получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Анализ матрицы коэффициентов этой системы показывает, что ее можно рассматривать как совокупность четырех систем относительно следующих пар функций:

$$\ddot{w}_{2m}^c(\tau),\quad \ddot{v}_{2m}^s(\tau);\quad \ddot{w}_{2m+1}^c(\tau),\quad \ddot{v}_{2m+1}^s(\tau);\quad \ddot{w}_{2m+1}^s(\tau),\quad \ddot{v}_{2m+1}^c(\tau);\quad \ddot{w}_{2m}^s(\tau),\quad \ddot{v}_{2m}^c(\tau),$$

причем во всех системах уравнений, кроме первой, правые части равны нулю. Отсюда следует, что решения их также равны нулю: $\ddot{w}_{2m+1}^{c,s}(\tau) = \ddot{v}_{2m+1}^{s,c}(\tau) = \ddot{w}_{2m}^s(\tau) = \ddot{v}_{2m}^c(\tau) = 0$.

Значение функции $\ddot{w}_{2m}^c(\tau)$, $\ddot{v}_{2m}^s(\tau)$ определим из решения системы уравнений ($\delta_{n,m}$ — символ Кронекера):

$$\ddot{w}_{2m}^c(\tau) + \int_0^\tau \ddot{w}_0^c(\tau_1) W_{0,2m}^{c,c}(\tau - \tau_1)\, d\tau_1 + \sum_{n=1}^{N} \Bigg(\int_0^\tau \ddot{w}_{2n}^c(\tau_1) W_{2n,2m}^{c,c}(\tau - \tau_1)\, d\tau_1 +$$

$$+ \int_0^\tau \ddot{v}_{2n}^s(\tau_1) V_{2n,2m}^{s,c}(\tau - \tau_1)\, d\tau_1 \Bigg) = -\frac{2\delta_{0,2m}c_2}{kc_3}\, p_0(\tau) \tag{2.3}$$

$$\ddot{v}_{2m}^s(\tau) + \int_0^\tau \ddot{w}_0^c(\tau_1) W_{0,2m}^{s,s}(\tau - \tau_1)\, d\tau_1 + \sum_{n=1}^{N} \Bigg(\ddot{w}_{2n}^c(\tau_1) W_{2n,2m}^{c,s}(\tau - \tau_1)\, d\tau_1 +$$

$$+ \int_0^\tau \ddot{v}_{2n}^s(\tau_1) V_{2n,2m}^{s,s}(\tau - \tau_1)\, d\tau_1 \Bigg) = 0 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

$$W_{2n,2m}^{c,c}(\tau) = \varepsilon_{2n}\tau Q_{2n,2m}^{c,c} - \frac{\varepsilon_{2n}c_2}{\varepsilon_{2m}k}\, \zeta_{2m,2n}^c(\xi_0, \tau), \quad W_{2n,2m}^{c,s}(\tau) = \varepsilon_{2n}\tau T_{2n,2m}^{c,s}$$

$$\overset{s,c}{V}_{2n,2m}(\tau)=\tau \overset{s,c}{R}_{2n,2m}, \qquad \overset{s,s}{V}_{2n,2m}(\tau)=\tau \overset{s,s}{S}_{2n,2m}, \qquad \varepsilon_n=0{,}5(2-\delta_{0,n})$$

$$\overset{c,c}{Q}_{2n,2m}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{4}(-1)^{\nu}(2n)^{\nu}\int_0^{\pi/2} a_{1\nu}(\eta)\cos\left(2n\eta-\frac{\pi\nu}{2}\right)\cos 2m\eta\, d\eta \tag{2.4}$$

$$\overset{c,s}{T}_{2n,2m}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{3}(-1)^{\nu}(2n)^{\nu}\int_0^{\pi/2} b_{2\nu}(\eta)\cos\left(2n\eta-\frac{\pi\nu}{2}\right)\sin 2m\eta\, d\eta$$

$$\overset{s,c}{R}_{2n,2m}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{4}(-1)^{\nu}(2n)^{\nu}\int_0^{\pi/2} b_{1\nu}(\eta)\sin\left(2n\eta-\frac{\pi\nu}{2}\right)\cos 2m\eta\, d\eta$$

$$\overset{s,s}{S}_{2n,2m}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{3}(-1)^{\nu}(2n)^{\nu}\int_0^{\pi/2} a_{1\nu}(\eta)\sin\left(2n\eta-\frac{\pi\nu}{2}\right)\sin 2m\eta\, d\eta$$

$$a_{10}=\frac{1}{c_1 l_1^6}, \qquad a_{11}=\frac{c_4h^2}{c_1}\left(\frac{2\sin 2\eta}{l_1^6}+\frac{13h^2\sin 4\eta}{4l_1^8}-\frac{7h^4\sin^3 2\eta}{2l_1^{10}}\right)$$

$$a_{12}=\frac{c_4h^2}{c_1}\left(\frac{19h^2\sin^2 2\eta}{4l_1^8}-\frac{4\cos 2\eta}{l_1^6}\right), \qquad a_{13}=-\frac{3c_4\sin 2\eta}{c_1 l_1^6}$$

$$a_{14}=\frac{c_4}{c_1 l_1^4}, \qquad a_{20}=\frac{c_4h^2}{c_1}\left(\frac{3\cos 2\eta}{l_1^{10}}-\frac{9h^2\sin^2 2\eta}{2l_1^{12}}\right) \tag{2.5}$$

$$a_{21}=\frac{c_4h^2}{c_1}\frac{\sin 2\eta}{2l_1^4}\left(1+\frac{7}{l_1^6}\right); \qquad a_{22}=-\frac{c_4}{c_1l_1^8}-\frac{1}{c_1l_1^2}, \qquad a_{23}=0$$

$$b_{10}=-\frac{c_4h^2}{c_1}\left(\frac{6\sin 2\eta}{l_1^8}+\frac{57h^2\sin 4\eta}{4l_1^{10}}-\frac{81h^4\sin^3 2\eta}{4l_1^{12}}\right)$$

$$b_{11}=-\frac{c_4h^2}{c_1}\left(\frac{67h^2\sin^2 2\eta}{l_1^8}-\frac{10\cos 2\eta}{l_1^8}\right)+\frac{1}{c_1l_1^4}$$

$$b_{12}=\frac{6c_4h^2\sin 2\eta}{c_1l_1^8}, \qquad b_{13}=-\frac{c_4}{c_1l_1^6}, \qquad b_{14}=0$$

$$b_{20}=\frac{3h^2\sin^2\eta}{2c_1l_1^6}, \qquad b_{21}=-\frac{1}{c_1l_1^6}+\frac{c_4h^2}{c_1}\left(\frac{h^2\sin^2 2\eta}{l_1^{10}}-\frac{\cos 2\eta}{l_1^8}\right)$$

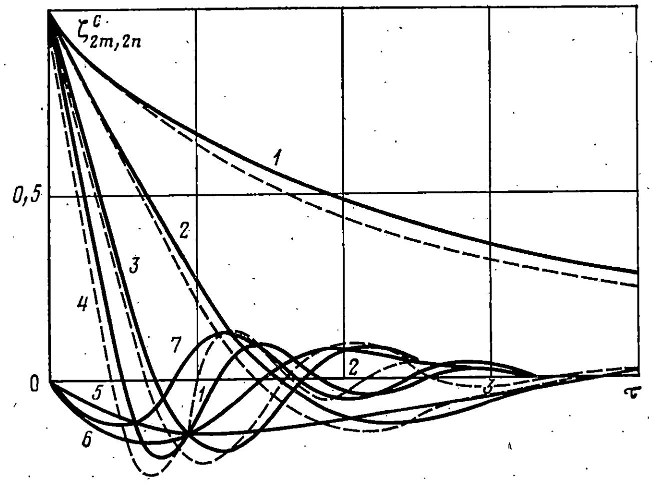
$$b_{22}=-\frac{3c_4h^2\sin 2\eta}{2c_1l_1^8}, \qquad b_{23}=\frac{c_4}{c_1l_1^6}, \qquad h^2=\frac{a}{b}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right), \qquad l_1=l_1(\xi_0,\eta)$$

3. Рассмотрим преобразование системы (2.3) при $b/a\to 1$, что соответствует вырождению эллиптического кольца в круговое. Было показано [7], что при $b/a\to 1$ функции $\zeta_{k,m}^{c,s}(\xi_0,\ \tau)$ переходят в функции $\delta_{k,m}\psi_k(\tau)$, характеризующие реакцию жидкости на движение кругового кольца. Из равенств (2.4) и (2.5) следует, что при $b/a\to 1$:

$$Q_{0,0}^{c,c}\to\frac{2}{c_1}, \qquad Q_{2n,\,2m}^{c,\,c}\to\frac{1+\varepsilon K(2n)^4}{c_1}\delta_{2n,\,2m}$$

$$R_{2n,\,2m}^{s,\,c}=T_{2n,\,2m}^{c,\,s}=\frac{2n\,(1+\varepsilon K(2n)^2)}{c_1}\delta_{2n,\,2m}, \qquad S_{2n,\,2m}^{s,\,s}=\frac{(2n)^2(1+\varepsilon K)}{c_1}\delta_{2n,\,2m}$$

Поэтому при $b/a\to 1$ система (2.3) распадается на последовательность $N+1$ пар уравнений с двумя неизвестными $\ddot{w}_{2m}^{c}(\tau)$ и $\ddot{v}_{2m}^{s}(\tau)$ соответственно. Так как правые части этих систем при $m\geqslant 1$ равны нулю, то все эти системы имеют лишь нулевое решение, т. е. $\ddot{w}_{2m}^{c}(\tau)=\ddot{v}_{2m}^{s}(\tau)=0$ при $m\geqslant 1$.



Фиг. 1

Если же $m=0$, то из системы уравнений (2.3) сразу находим $\ddot v_0^{s}(\tau)=0$, а для функции $\ddot w_0^{c}(\tau)$ получаем хорошо известное уравнение [2, 5]:

$$\ddot w_0^{c}(\tau)+\int_0^{\tau}\ddot w_0^{c}(\tau_1)\left(\frac{\tau-\tau_1}{c_1}-c_2\psi_0(\tau-\tau_1)\right)d\tau_1=-\frac{2c_2}{c_3}p_0(\tau)$$

$$\psi_0(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}\frac{H_0^{(2)}(\omega)}{\omega H_0^{(2)\prime}(\omega)}d\omega \qquad (3.1)$$

характеризующее движение тонкого упругого кругового кольца под действием мгновенно приложенного равномерного давления $p_0(\tau)$.

4. Так как ядра и правая часть системы (2.3) являются непрерывными при $\tau\geqslant0$ функциями, то эта система имеет единственное непрерывное решение, которое численно проще всего найти методом квадратурных формул [9] точно так же, как это было сделано в [5].

Для этого интервал $0\leqslant\tau\leqslant T$ изменения переменной τ разобьем на N_0 частей N_0+1 опорной точкой, в каждой из которых вычислим правые части системы и ядра. Значения решения в первой опорной точке примем равными значениям правых частей в этой же точке. Значения решения в остальных точках определим последовательным решением линейных алгебраических уравнений, которые получатся в результате аппроксимации интегралов в левой части системы (2.3) квадратурными формулами трапеций (если опорных точек две) и Симпсона – три восьмых (если опорных точек больше двух).

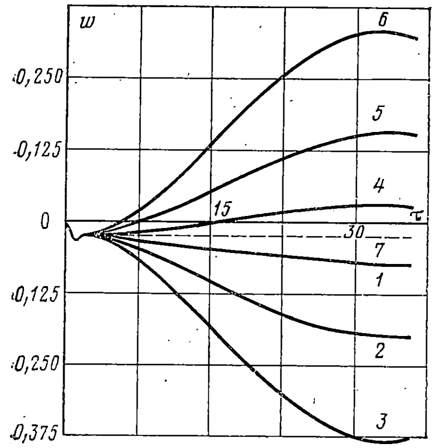
Значения функций $\dot w_n^{c}$, $\dot v_n^{s}$ определялись численным интегрированием решения $\ddot w_n^{c}$, $\ddot v_n^{s}$ системы уравнений (2.3) с учетом нулевых начальных условий. Величины w_n^c, v_n^s находились аналогично интегрированием $\dot w_n^{c}$ и $\dot v_n^{s}$.

Устойчивость решения системы (2.3) по отношению к величине шага интегрирования исследовалась численно. Количество уравнений в системе (2.3) выбиралось равным семи ($N=3$).

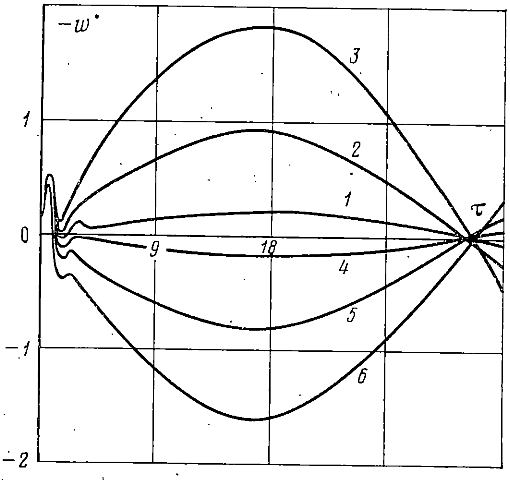
Численному решению системы (2.3) предшествовал расчет функций $\zeta^c_{2m,2n}(\xi_0,\tau)$ для эллиптического кольца с отношением полуосей $b/a={}^1/_2$ ($\xi_0=0{,}5\ln 3$) [7]. На фиг. 1 кривые *1–4* соответствуют функциям $\zeta^c_{2m,2n}(\xi_0,\tau)$ при $m=0, 1, 2, 3$, а кривые *5–7* – функциям $\zeta^c_{2m+2,2n}(\xi_0,\tau)$ при $m=0, 1, 2$. Остальные функции $\zeta^c_{2m,2n}(\xi_0,\tau)$ с неравными нижними индексами имеют аналогичные периоды и амплитуды колебаний, поэтому на фиг. 1 не приводятся. Там же штриховыми линиями изображены функции $\psi_{2m}(\tau)$ при тех же значениях m для кругового кольца, т. е. при $b/a=1$.

Анализ кривых, изображенных на фиг. 1, позволил предположить, что при приближенном расчете колебаний эллиптического кольца с отношением полуосей ${}^1/_2\leqslant b/a\leqslant1$ можно принять $\zeta^c_{2m,2m}(\xi_*,\tau)\approx-\exp(-0{,}5\tau)J_0[\tau(4m^2-{}^1/_4)^{1/2}]$ и $\zeta^c_{2m,2n}(\xi_*,\tau)\approx0$, если $m\neq n$.

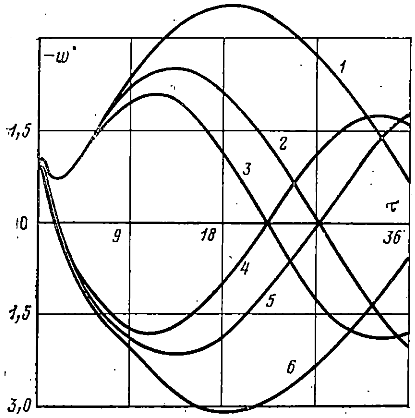
Расчеты выполнялись для эллиптических колец с параметрами ${}^1/_2\leqslant b/a\leqslant1$, $c_1=0{,}082$, $2\leqslant c_2<20$, $K=1$, 100, 200, 300. Характер деформации колец исследовался при внешней нагрузке, изменяющейся по закону $\sigma_0(\tau)$, параметр $c_3=1$; 10.



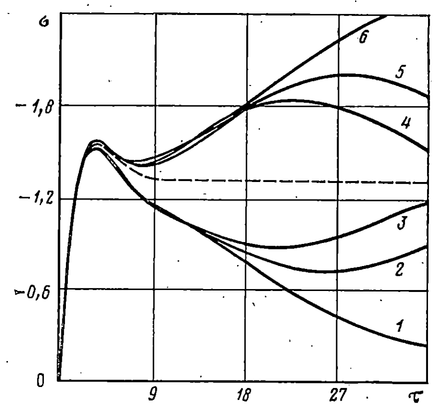
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 2 показано изменение во времени нормального прогиба $w(\eta, \tau)$ эллиптического кольца с параметрами $c_2=2{,}688$, $\varepsilon=2{,}08\cdot10^{-4}$, $K=1$ и отношением полуосей b/a, равным 0,9985; 0,9950; 0,9900 (кривые *1–3* соответствуют точке $\eta=90°$, а кривые *4–6*, при тех же отношениях полуосей b/a,– точке $\eta=0$). Там же для сравнения (кривая *7*) изображена функция $w(\tau)$, характеризующая деформацию кругового кольца при внешней нагрузке $\sigma_0(\tau)$ и $c_3=10$.

Для эллиптического кольца с этими же параметрами c_2, ε, K, но другим отношением полуосей ($b/a=0{,}99$; 0,95; 0,90) и $c_3=1$ на фиг. 3 приводится изменение во времени нормальной проекции скорости $w^{\cdot}(\eta, \tau)$ (кривые *1–3* соответствуют точке $\eta=$ $=90°$, а кривые *4–6* – точке $\eta=0$).

Так как начальные этапы движения эллиптического и кругового колец практически совпадают и при $\tau\approx4$ процесс деформации кругового кольца можно считать завершившимся, то на фиг. 3 характер изменения $w^{\cdot}(\tau)$ для кругового кольца не изображен.

Анализ графиков, приведенных на фиг. 2, 3, показывает, что процесс деформации кругового и эллиптического колец, нагруженных одинаковым внешним давлением, качественно различен. Процесс деформации эллиптического кольца условно можно разбить на два этапа. Первый (короткий) обусловлен бегом в кольце волн сжатия, второй (длительный) – распространением изгибных волн, характеризующих изменение формы кольца.

На фиг. 4 показано, как влияет подкрепление оболочки шпангоутами на изменение величины нормальной скорости $w^{\cdot}(\eta, \tau)$. Параметры оболочки были следующими: $b/a=0{,}90$, $c_2=16{,}129$, $K=100$, 200, 300 (кривые *1–3* соответствуют точке $\eta=90°$, кривые *4–6* – точке $\eta=0$). Видно, что наличие шпангоутов приводит к увеличению изгибной жесткости эллиптического кольца и уменьшению амплитуды и периода его изгибных колебаний. Аналогичное влияние оказывают шпангоуты и на характер изменения напряжений, возникающих в эллиптическом кольце при его деформации.

На фиг. 5 показано влияние жесткости шпангоута на величины суммарных (от сжатия и изгиба) напряжений на внутренней границе эллиптического кольца с параметрами $b/a=0{,}90$, $c_2=16{,}129$, $K=1$, 100, 200, $c_3=1$ в точках $\eta=90°$ (кривые *1–3*) и $\eta=0$ (кривые *4–6*). Величины суммарных напряжений отнесены к $E/(1-\mu^2)$. Там же для сравнения штрихом изображено изменение во времени напряжения в круговом кольце при его всестороннем обжатии внешним равномерным давлением.

Распространение результатов на произвольную нагрузку можно осуществить с помощью интеграла Дюамеля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1974. 208 с.
2. *Мнев Е. Н., Перцев А. К.* Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1970. 365 с.
3. *Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 343 с.
4. *Кубенко В. Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. Киев: Наук. думка, 1979. 183 с.
5. *Huang H.* An exact analysis of the transient interaction of acoustic plane waves with a cylindrical elastic shell.— Trans. ASME. Ser. E. J. Apple Mech., 1970, v. 37, No. 4, p. 1091–1099.— Рус. перев.: Прикл. механика. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1970, № 4, с. 188–196.
6. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
7. *Карпенко В. В.* Определение передаточных функций в задаче нестационарного взаимодействия с жидкостью упругой эллиптической оболочки.— Прикл. механика, 1983, т. 19, № 6, с. 70–74.
8. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложение функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
9. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1978. 291 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 15.IX.1985