

УДК 539.3

ПОДКРЕПЛЕНИЕ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ
В ПЛАСТИНЕ РАВНОДЕФОРМИРОВАННЫМ СТЕРЖНЕМ

РАСТОРГУЕВ Г. И.

Оптимальным и рациональным подкреплениям круговых отверстий в пластинах посвящено значительное число работ [1-9]. Из [9, 10] следует, что если разыскивать распределения жесткостей тонкого стержня, подкрепляющего край отверстия в пластине, из условия минимума суммарной энергии упругой деформации пластины с подкреплением при заданных величинах интегральных жесткостей, то в качестве условий оптимальности получаются условия постоянства деформаций стержня (относительного удлинения и изменений кривизн осевой линии) вдоль всего подкрепляемого контура. При этом для неограниченной пластины рассматривается энергия деформации ее части, заключенной между контуром отверстия и некоторым достаточно удаленным замкнутым контуром, вне которого напряженное состояние невозмущено.

В публикуемой работе разыскиваются распределения жесткостей стержня, подкрепляющего край кругового отверстия в пластине, из условия постоянства деформаций (равнодеформированности) стержня при заданных величинах интегральных жесткостей. Ось стержня отождествляется с контуром отверстия. Рассматриваются два случая напряженного состояния пластины на бесконечности: плоское напряженное состояние и чистый изгиб. Предполагается, что подкрепляющий стержень имеет жесткости на растяжение - сжатие и изгиб (при плоском напряженном состоянии) и жесткость на изгиб (при изгибе пластины). Для обоих случаев решение задачи получено в замкнутом виде. Установлено, что за счет соответствующих распределений жесткостей подкрепления можно достичь постоянства его деформаций, если величины интегральных жесткостей не меньше некоторых предельных значений. Отметим, что интегральные критерии оптимальности при проектировании подкреплений краев отверстий в пластинах и ободочках использовались ранее в [8-12].

1. Рассматривается плоское напряженное состояние пластины с круговым отверстием радиуса R (фиг. 1). Напряжения на бесконечности

$$\sigma_x^\infty = p, \sigma_y^\infty = q, \tau_{xy}^\infty = 0 \quad (1.1)$$

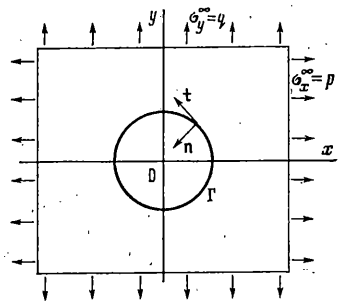
Для определенности полагаем $p > 0$, $-p \leq q \leq p$. Контур отверстия Γ подкреплен тонким стержнем, имеющим переменные жесткости на растяжение (сжатие) K и на изгиб g в плоскости пластины. Ось стержня отождествляется с контуром отверстия, что вполне допустимо для тонких стержней [7]. Стержень свободен от внешних нагрузок. Через E , ν , h обозначаются модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина пластины.

Разыскиваются распределения жесткостей K , g стержня по контуру Γ из условий постоянства во всех его точках относительного удлинения ε и изменения кривизны κ осевой линии стержня вследствие деформации $\varepsilon = C_1$ ($C_1 = \text{const}$), $\kappa = C_2$ ($C_2 = \text{const}$). (1.2) при заданных значениях интегралов A , B (интегральных жесткостей):

$$\oint_{\Gamma} K ds = A, \quad \oint_{\Gamma} g ds = B \quad (1.3)$$

Изменение кривизны κ связано с углом поворота φ элемента стержня при деформации и относительным удлинением ε : $\kappa = d\varphi/ds - \varepsilon/R$.

Величины ε , κ выражаются через компоненты u , v вектора перемеще-



Фиг. 1

ния, отнесенные к прямоугольной системе координат xOy , следующим образом:

$$\varepsilon = u_s x_s + v_s y_s, \quad \kappa = -u_{ss} y_s + v_{ss} x_s - 2\varepsilon/R \quad (1.4)$$

Нижними индексами в (1.4) обозначено дифференцирование по дуговой координате s , отсчитываемой вдоль Γ против часовой стрелки.

Нормальная N , поперечная Q силы и изгибающий момент M , действующие в сечении стержня, связаны с ε , κ зависимостями

$$N + M/R = K\varepsilon, \quad M = \kappa g, \quad Q = dM/ds \quad (1.5)$$

Соотношения, аналогичные (1.5), использовались в [4, 7]. Они получаются из уравнений плоских криволинейных стержней предельным переходом [13], при котором толщина стержня уменьшается по сравнению с радиусом кривизны R . При этом в исходных уравнениях учитывается нелинейность распределения нормальных напряжений по сечению стержня вследствие смещения нейтральной линии относительно линии центров тяжести.

Уравнения равновесия элемента стержня, взаимодействующего с прилегающей пластиной, имеют вид

$$h\sigma_n - \frac{N}{R} + \frac{d^2 M}{ds^2} = 0, \quad h\tau_{tn} + \frac{dN}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dM}{ds} = 0 \quad (1.6)$$

где σ_n , τ_{tn} — нормальная и касательная компоненты вектора напряжения пластины, действующего на площадке с нормалью n .

Для решения задачи вводим функции Колосова — Мухелишвили $\Phi(\tau)$, $\Psi(\tau)$, описывающие плоское напряженное состояние в области $|\tau| \geq 1$ пластины, где $\tau = z/R$, $z = x + iy$. Согласно условиям на бесконечности (1.1) и с учетом симметрии функции Φ , Ψ в безразмерном виде, отнесенном к R , представляются следующим образом [14]:

$$\Phi(\tau) = \frac{\alpha + 1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \tau^{-2k} \quad (1.7)$$

$$\Psi(\tau) = \frac{\alpha - 1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \tau^{-2k} \quad (1.8)$$

Здесь M_k , Q_k — действительные коэффициенты $\alpha = q/p$ — параметр внешнего нагружения. При $\alpha = 1$ имеем равномерное растяжение пластины, при $\alpha = 0$ — одноосное, при $\alpha = -1$ — сдвиг.

Неизвестные функции $K(\theta)$, $g(\theta)$, где $\theta = \arg \tau$, разыскиваем в виде разложений в ряды Фурье

$$K_1(\theta) = \frac{K(\theta)}{K_0} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos(2k\theta) \quad (1.9)$$

$$g_1(\theta) = \frac{g(\theta)}{\sigma} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos(2k\theta)$$

где F_k , G_k — искомые коэффициенты; величины K_0 , g_0 характеризуют значения A , B интегральных жесткостей (1.2).

С применением введенных функций (1.7), (1.8) краевые условия (1.2), (1.6) на Γ с учетом (1.4), (1.5) преобразуются соответственно к виду ($\tau = \exp(i\theta)$):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{2(1-\nu)\Phi(\tau) + (1+\nu)U(\tau)\} &= \mu \quad (\mu = \text{const}) \\ \operatorname{Re}\{2(1-\nu)[\tau\Phi'(\tau) - \Phi(\tau)] - (1+\nu)\tau^2[\Phi''(\tau) + \\ &+ \tau\Psi'(\tau) + 3\Psi(\tau)]\} = f \quad (f = \text{const}) \\ 4(1+\nu)^{-1} \operatorname{Re} \Phi(\tau) - \mu[(1+\nu)^{-1} + \lambda K_1(\theta)] + \\ &+ f\beta[g_1(\theta) + g_1''(\theta)] = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\operatorname{Im} U(\tau) + \lambda \mu K_1'(\theta) = 0$$

$$\mu = \frac{E\varepsilon}{p}, \quad f = \frac{ER\kappa}{p}, \quad \lambda = \frac{K_0}{EhR}, \quad \beta = \frac{g_0}{EhR^3} \quad (1.11)$$

$$U(\tau) = \tau[\Phi'(\tau) + \tau\Psi(\tau)]$$

Согласно обозначениям (1.11), параметры μ , f характеризуют величины деформаций ε , κ стержня, а параметры λ , β — значения интегральных жесткостей подкрепления (1.2) на растяжение и на изгиб соответственно.

Подставляя (1.7)–(1.9) в условия (1.10) на Γ и приравнявая нулю выражения при одинаковых функциях $\cos(2k\theta)$, $\sin(2k\theta)$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, из которой находим

$$\begin{aligned} M_k = 0, F_k = 0, G_k = 0 \quad (k \geq 2); \quad Q_k = 0 \quad (k \geq 3) \\ M_1 = \frac{1-\alpha}{2} \frac{1+\nu}{3-\nu}, \quad Q_1 = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1-(\lambda+\beta)(1-\nu)}{1+(\lambda+\beta)(1+\nu)} \\ Q_2 = \frac{3(1-\alpha)}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad F_1 = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{1+(\lambda+\beta)(1+\nu)}{\lambda(3-\nu)} \\ G_1 = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{1+(\lambda+\beta)(1+\nu)}{\beta(3-\nu)}, \quad \mu = \frac{1+\alpha}{1+(\lambda+\beta)(1+\nu)}, \quad f = -\mu \end{aligned} \quad (1.12)$$

Как следует из (1.8), (1.12), структура комплексных потенциалов такая же, как и в случаях растяжения пластины с неподкрепленным круговым отверстием [14] или с круговым отверстием, подкрепленным стержнем постоянного сечения [4].

Поскольку $F_1 \leq 0$, $G_1 \leq 0$, то законы изменения жесткостей подкрепления $K_1(\theta) = K/K_0 = 1 + F_1 \cos 2\theta$, $g_1(\theta) = g/g_0 = 1 + G_1 \cos 2\theta$ качественно совпадают с законом изменения тангенциального напряжения по контуру неподкрепленного кругового отверстия в пластине: наиболее нагруженным участкам контура отверстия соответствуют большие значения жесткостей подкрепления.

Так как жесткости K , g стержня неотрицательны, то полученное решение (1.12) имеет смысл, если одновременно выполняются ограничения $|F_1| \leq 1$, $|G_1| \leq 1$, или

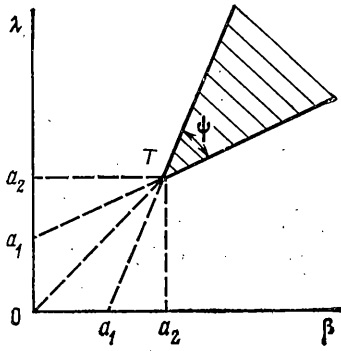
$$\begin{aligned} \alpha &\geq \frac{1-2\lambda(1-\nu) + \beta(1+\nu)}{1+4\lambda + \beta(1+\nu)} \equiv \alpha_1 \\ \alpha &\geq \frac{1-2\beta(1-\nu) + \lambda(1+\nu)}{1+4\beta + \lambda(1+\nu)} \equiv \alpha_2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Следовательно, при заданных величинах интегральных жесткостей $\lambda > 0$, $\beta > 0$ существует определенный диапазон значений параметра нагрузки $\alpha^* \leq \alpha \leq 1$, $\alpha^* = \max(\alpha_1, \alpha_2)$, при котором можно достичь постоянства деформаций ε , κ подкрепляющего стержня за счет соответствующих распределений жесткостей K , g по контуру Γ отверстия. Наименьшую величину нижней границы α^* диапазона значений α найдем из (1.13), одновременно устремив λ , β к бесконечности $\alpha_{\min}^* = (3\nu-1)/(5+\nu)$. Таким образом, решение рассматриваемой задачи возможно для $\alpha_{\min}^* < \alpha \leq 1$.

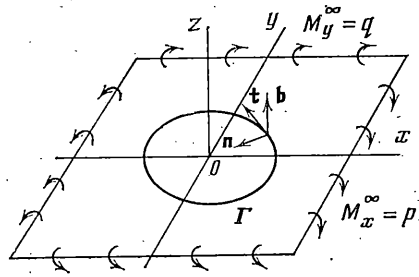
На фиг. 2 заштрихована область допустимых значений λ , β , удовлетворяющих ограничениям (1.13). Через a_1 , a_2 обозначены величины

$$a_1 = \frac{1-\alpha}{2(2\alpha+1-\nu)}, \quad a_2 = \frac{1-\alpha}{(5+\nu)\alpha+1-3\nu}$$

При $\alpha=1$ (равномерное растяжение пластины) оба ограничения (1.13) выполняются для любых $\lambda > 0$, $\beta > 0$. При этом вершина T находится в начале координат, угол $\psi = \pi/2$. При уменьшении α асимметрия напряженного состояния на бесконечности возрастает, вершина T , двигаясь вдоль биссектрисы, удаляется от начала координат, угол ψ уменьшается. В пределе $\alpha \rightarrow \alpha_{\min}^*$, $a_2 \rightarrow \infty$, и область возможных решений уходит в бесконечность: при $\alpha \leq \alpha_{\min}^*$ для любых значений λ , β за счет соответ-



Фиг. 2



Фиг. 3

вующего распределения жесткостей K , g по контуру отверстия постоянно деформаций ε , κ стержня не достигается.

Если не учитывать изгибную жесткость ($g=0$), что вполне оправдано для тонких стержней [4, 7], то приходим к задаче о подкреплении кругового отверстия в пластине безмоментным упругим стержнем постоянной деформации ε (равнонапряженным стержнем), решенной в [9]:

$$M_1 = -\frac{1-\alpha}{2} \frac{1+\nu}{3+\nu}, \quad Q_1 = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1-\lambda(1-\nu)}{1+\lambda(1+\nu)}$$

$$Q_2 = \frac{3(1-\alpha)}{2} \frac{1-\nu}{3+\nu}, \quad F_1 = -\frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha} \frac{1+\lambda(1+\nu)}{\lambda(3+\nu)}$$

$$\mu = (1+\alpha)/(1+\lambda(1+\nu))$$

В силу неотрицательности жесткости K стержня имеем ограничение $|F_1| \leq 1$, или

$$\alpha \geq \frac{2-\lambda(1-\nu)}{2+\lambda(5+3\nu)} \equiv \alpha^{**}$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ нижняя граница $\alpha^{**} \rightarrow \alpha_{\min}^{**}$, где $\alpha_{\min}^{**} = (\nu-1)/(5+3\nu)$. Так как

$\alpha_{\min}^{**} < \alpha_{\min}^*$ для $0 < \nu \leq 0,5$, то заключаем, что при учете изгибной жесткости диапазон возможных значений параметра нагрузки уменьшается.

В [9] равнонапряженное подкрепление сравнивалось с подкреплением постоянной жесткости. Установлено, что равнонапряженное подкрепление способствует более быстрому затуханию возмущений в напряженном состоянии пластины вследствие наличия подкрепленного отверстия и в ряде случаев обеспечивает меньший уровень концентрации напряжений в пластине.

2. В аналогичной постановке рассмотрим задачу об изгибе пластины с круговым отверстием радиуса R , край которого подкреплён тонким стержнем с переменной жесткостью на изгиб g относительно нормали n (фиг. 3). Жесткость на кручение подкрепляющего тонкого стержня при изгибе слабо влияет на напряженное состояние пластины [3, 7], и поэтому ее не учитываем. Ось стержня отождествляем с контуром Γ отверстия.

Пусть Q_x, Q_y — поперечные силы; M_x, M_y, H — изгибающие и крутящий моменты; $D \equiv Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость; w — прогиб пластины. Обозначим также через $M_n, Q_* \equiv Q_n + \partial H_n / \partial s$, соответственно, изгибающий момент и обобщенную поперечную силу, действующие на кромке пластины с внешней нормалью n . Считаем, что подкрепляющий стержень свободен от внешних нагрузок, а на бесконечности пластина находится в условиях чистого изгиба

$$M_x^\infty = p, \quad M_y^\infty = q, \quad H^\infty = 0, \quad Q_x^\infty = Q_y^\infty = 0 \quad (2.1)$$

Для определенности полагаем $p > 0$, $-p \leq q \leq p$. Распределение жесткости g подкрепления по контуру отверстия разыскивается из условия постоянства во всех точках Γ изменения кривизны κ оси стержня при де-

формации (относительно нормали n):

$$\kappa = C \quad (C = \text{const}) \quad (2.2)$$

при заданной величине интеграла

$$\oint_{\Gamma} g \, ds = B \quad (2.3)$$

Обозначим через L , V , соответственно, изгибающий момент и поперечную силу, действующие в сечении стержня ($V = dL/ds$). Запишем соотношения Клебша — Кирхгофа [3, 15]:

$$\kappa = -\frac{d}{ds} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial n}, \quad L = \kappa g \quad (2.4)$$

и уравнения равновесия элемента стержня, взаимодействующего с прилегающей пластиной

$$L/R - M_n = 0, \quad d^2 L/ds^2 + Q_* = 0 \quad (2.5)$$

Вводим комплексные потенциалы $\Phi(\tau)$, $\Psi(\tau)$, характеризующие напряженно-деформированное состояние в области $|\tau| \geq 1$ изгибаемой пластины, где $\tau = z/R$, $z = x + iy$. Согласно условиям на бесконечности (2.4) и с учетом симметрии функции Φ , Ψ в безразмерном виде, отнесенном к p/D , представляются следующим образом [3, 7]:

$$\Phi(\tau) = -\frac{1+\alpha}{4(1+\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \tau^{-2k}, \quad \Psi(\tau) = -\frac{1-\alpha}{2(1-\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \tau^{-2k} \quad (2.6)$$

Здесь M_k , Q_k — действительные коэффициенты, $\alpha = q/p$ — параметр внешнего нагружения ($-1 \leq \alpha \leq 1$).

Функцию $g(\theta)$, где $\theta = \arg \tau$, разыскиваем в виде

$$g_1(\theta) = \frac{g(\theta)}{g_0} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos(2k\theta) \quad (2.7)$$

Величина g_0 характеризует значение интегральной жесткости (2.3), коэффициенты G_k подлежат определению.

С помощью (2.6), (2.7) краевые условия (2.2), (2.5) на Γ с учетом (2.4) преобразуются к виду ($\tau = \exp(i\theta)$):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\tau U(\tau) - 2\Phi(\tau)] &= f \quad (f = \text{const}) \\ \operatorname{Re}[2(1+\nu)\Phi(\tau) + (1-\nu)\tau U(\tau)] + f\beta g_1(\theta) &= 0 \\ \operatorname{Re}\{-(3+\nu)\tau\Phi'(\tau) + (1-\nu)\tau^2[2\Psi(\tau) + \\ &+ \tau\Psi'(\tau) + \Phi''(\tau)]\} + f\beta g_1''(\theta) = 0 \\ f &= D\kappa/p, \quad \beta = g_0/(DR), \quad U(\tau) = \tau[\Phi'(\tau) + \tau\Psi(\tau)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Параметр f характеризует изменение кривизны κ , а величина β — значение интегральной жесткости (2.3).

Подставляя (2.6), (2.7) в (2.8), находим

$$\begin{aligned} M_k = 0, \quad F_k = 0, \quad G_k = 0 \quad (k \geq 2); \quad Q_k = 0 \quad (k \geq 3) \\ M_1 = \frac{1-\alpha}{2(5+\nu)}, \quad Q_1 = \frac{(1+\alpha)(1+\nu-\beta)}{2(1+\nu)(1-\nu+\beta)} \\ Q_2 = \frac{3(1-\alpha)(3-\nu)}{2(5+\nu)(1-\nu)}, \quad f = \frac{1+\alpha}{(1+\nu)(1-\nu+\beta)} \\ G_1 = -\frac{2(1-\alpha)(1+\nu)(1-\nu+\beta)}{(1+\alpha)(5+\nu)\beta} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из условия неотрицательности жесткости g получаем, что решение (2.9) имеет смысл, если выполняется ограничение $|G_1| \leq 1$, или

$$\alpha \geq \frac{2(1+\nu)(1-\nu+\beta) - \beta(5+\nu)}{2(1+\nu)(1-\nu+\beta) + \beta(5+\nu)} \equiv \alpha^* \quad (2.10)$$

Следовательно, при заданной величине $\beta > 0$ постоянство α можно достичь лишь для диапазона значений параметра нагрузки $\alpha^* \leq \alpha \leq 1$. При $\beta \rightarrow \infty$ из (2.10) находим наименьшее значение нижней границы $\alpha_{\min} = (\nu-3)/(7+3\nu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mansfield E. H.* Optimum design for reinforced circular holes.— *Aeronaut. Res. Council, Curr. Pap.*, 1956, № 239, 15 p.
2. *Hicks R.* Variably reinforced circular holes in stressed plates.— *Aeronaut. Quart.*, 1958, v. 9, pt 3, p. 213–231.
3. *Савин Г. Н., Флейшман Н. П.* Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев: Наук. думка, 1964. 384 с.
4. *Шереметьев М. П.* Пластинки с подкрепленным краем. Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960. 258 с.
5. *Малков В. П.* Оптимальное подкрепление вырезов в пластинках.— *Прикл. механика*, 1967, т. 3, вып. 9, с. 40–45.
6. *Тулъчий В. И.* Об оптимальном подкреплении отверстий в пластинах.— *Прикл. механика*, 1965, т. 1, вып. 3, с. 77–83.
7. *Савин Г. Н., Тулъчий В. И.* Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. Киев: Наукова думка, 1971. 268 с.
8. *Михайловский Е. И., Чауниш М. П.* Рациональное подкрепление кругового отверстия в растягиваемой плоской пластине.— *Проблемы прочности*, 1978, № 1, с. 37–39.
9. *Куршин Л. М., Расторгуев Г. И.* Подкрепление кругового отверстия в пластинке равнонапряженным стержнем.— В сб.: *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности.* Горький: Изд-е Горьковск. ун-та, 1980, вып. 16, с. 88–95.
10. *Куршин Л. М., Расторгуев Г. И.* К задаче о подкреплении контура отверстия в пластинке безмоментным упругим стержнем.— *ПММ*, 1980, т. 44, вып. 5, с. 905–915.
11. *Куршин Л. М., Расторгуев Г. И.* О подкреплении контура отверстия в пластинке.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1979, № 6, с. 94–102.
12. *Михайловский Е. И.* Об оптимальном подкреплении края оболочки.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1975, № 1, с. 42–51.
13. *Тимошенко С. П.* Сопrotивление материалов. Т. 1. М.: Наука, 1965. 363 с.
14. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
15. *Лурье А. И.* О малых деформациях криволинейных стержней.— *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*, 1941, № 3, с. 148–157.

Новосибирск

Поступила в редакцию
25.IV.1985