

УДК 539.3

ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ ПАРАМЕТРЫ ПЛАСТИНЫ
С РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ РАВНОПРОЧНЫХ ОТВЕРСТИЙ

ВИГДЕРГАУЗ С. Б.

В рамках двоякопериодической задачи об изгибе или растяжении плоскости с равнопрочными [1] отверстиями, эквивалентной в среднем сплошной линейно-упругой анизотропной пластине, найдены аналитические выражения для ее приведенных [2] коэффициентов, построено интегральное уравнение, определяющее форму этих отверстий, и получено его численное решение.

1. Эффективные параметры пластины. Рассмотрим бесконечную пластину толщины h и цилиндрической жесткости D из упругого материала с модулями E и ν , ослабленную двоякопериодической системой свободных от нагрузок отверстий, образующей прямоугольную решетку с основными периодами ω_1, ω_2 ($\text{Im } \omega_1 = \text{Re } \omega_2 = 0$). Занятую пластиной область комплексного переменного z обозначим S , гладкую границу отверстий — L , границу ячейки — Π , их площади — f и $F = -i\omega_1\omega_2$ соответственно.

Напряженное состояние изгибаемой пластины определяется решением краевой задачи на ячейке с одним отверстием (d — произвольная постоянная, $t \in L$):

$$(1-\kappa)At + B\bar{t} - \kappa\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = d \quad (1.1)$$

для голоморфных в S функций $\varphi(z), \psi(z)$, представимых с учетом периодичности в виде [3]:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L u(t) \zeta(t-z) dt, \quad \kappa = \frac{3+\nu}{1-\nu} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_L [\kappa u(t) + \bar{t}u'(t)] \zeta(t-z) dt + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L u(t) \rho_1(t-z) dt, \quad z \in S \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса [4], $\rho_1(z)$ — мероморфная функция В. Я. Натансона [2], $u(t)$ — подлежащая определению гладкая функция точек контура L .

Постоянные A, B в (1.1) выражаются через средние моменты M_1, M_2, M_{12} , нагружающие пластину [3]:

$$A = \frac{M_1 + M_2}{2D(1-\nu)(1-\kappa)} - \left(\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{F} \right) a - \frac{\pi(b + \kappa\bar{b})}{F(1-\kappa^2)} \quad (1.4)$$

$$B = \frac{M_2 - M_1 + 2iM_{12}}{2D(1-\nu)} + \kappa \frac{\pi}{F} \bar{a} + \left(\frac{\eta_1 - \gamma_1}{\omega_1} + \frac{\eta_2 + \gamma_2}{\omega_2} \right) a - \left(\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{F} \right) b$$

$$\gamma_k = 2\rho_1(\omega_k/2) - \omega_k \rho(\omega_k/2), \quad \rho(z) = -\zeta'(z), \quad \eta_k = 2\zeta(\omega_k/2) \quad (k=1, 2)$$

где a, b — вычеты функций $\varphi(z), \psi(z)$ на ячейке

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(t) dt, \quad b = \frac{1}{2\pi i} \int_L \psi(t) dt$$

Интегралы берутся против часовой стрелки. Выражение для B в [3] дано неточно.

С учетом свойств $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ при переносе [5] из (1.2), (1.3) следует, что

$$\Delta_k \varphi(z) \equiv \varphi(z - \omega_k) - \varphi(z) = \eta_k a \quad (k=1, 2) \quad (1.5)$$

$$\Delta_k \psi(z) \equiv \psi(z - \omega_k) - \psi(z) = \eta_k b + \bar{\omega}_k \varphi'(z - \omega_k)$$

В [3] показано, что эффективные жесткостные параметры пластины, определяемые как коэффициенты линейной связи между M_1 , M_2 , M_{12} и средними кривизнами κ_1 , κ_2 , а также кручением τ :

$$M_1 = D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + D_{16}\tau, \quad M_2 = D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2 + D_{26}\tau$$

$$M_{12} = D_{16}\kappa_1 + D_{26}\kappa_2 + D_{66}\tau$$

выражаются через E , ν и рациональные комбинации величин a_k , b_k , $k=1, 2, 3$ — вычетов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для нагрузок M_1^0 ($M_2=M_{12}=0$), $M_2=1$ ($M_1=-M_{12}=0$), $M_{12}=1$ ($M_1=M_2=0$). В прямоугольной решетке значения a_3 , b_3 — чисто мнимые, а остальные действительны, при этом $D_{16}=D_{26}=0$.

Для круговых и эллиптических отверстий в ячейках различной формы вычеты находились в [3] на основе численного решения регулярного интегрального уравнения типа уравнений Шермана. Напротив, равнопрочные границы отверстий допускают для искомых величин простые аналитические выражения, которые строятся следующим образом.

Как известно [6], граница Γ отверстия в пластине, изгибаемой заданными моментами $M_1=P$, $M_2=Q$, $M_{12}=0$, называется равнопрочной для данных значений P и Q , если на ней момент $M_l = \text{const}$, l — единичный вектор по касательной к контуру. Снабжая величины, относящиеся к Γ под данной нагрузкой, значком «0», имеем: $\varphi_0(z) \equiv 0$ в S [6], а значит, $a_0=0$. Условие (1.1) принимает вид

$$(1-\kappa)A_0 t + \bar{B}_0 \bar{t} + \overline{\psi_0(t)} = d, \quad t \in \Gamma \quad (1.6)$$

Интегрируя его по $d\bar{t}$ вдоль Γ , получим

$$b_0 = (\kappa-1)A_0 f / \pi \quad (1.7)$$

Здесь использовано соотношение [7]:

$$\int_{\Gamma} t d\bar{t} = 2if \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в (1.2), (1.3), получим

$$A_0 = \frac{P+Q}{2D(1-\nu)(1-\kappa)(1-c)}; \quad c = \frac{f}{F} \quad (1.9)$$

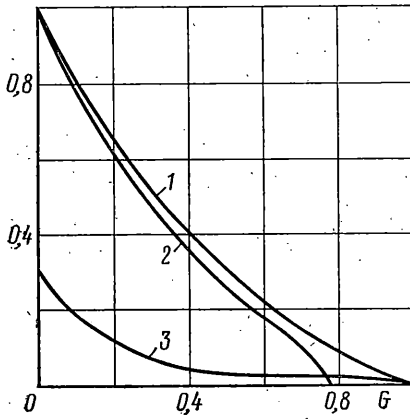
$$B_0 = \frac{Q-P}{2D(1-\nu)} + \left(\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{\pi'}{F} \right) \frac{f}{2\pi} \frac{P+Q}{D(1-\nu)(1-c)}$$

$$M_l = -4(1+\nu)D \operatorname{Re}(\varphi_0'(z) + A) = (P+Q)/(1-c) \quad (1.10)$$

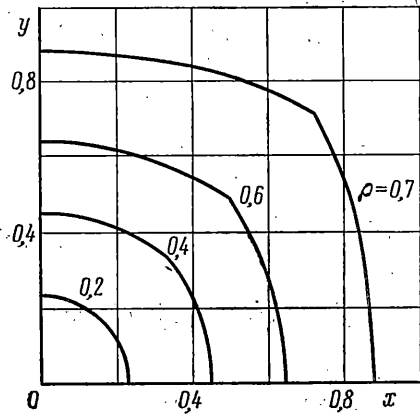
Отметим, что величина M_l на Γ не зависит от параметров ячейки ω_1 , ω_2 . При $c=0$ соотношение (1.10) совпадает с полученным в [6] для непериодического случая — плоскости с конечным числом отверстий.

Интегрируя тождество (1.1) вдоль Γ поочередно по dt и $d\bar{t}$, имеем с учетом (1.8) для произвольной нагрузки

$$\begin{aligned} -\kappa a + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{t\varphi'(t)} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{\psi(t)} dt &= -\frac{Bf}{\pi} \\ -\frac{\kappa}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(t) d\bar{t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{t\varphi'(t)} dt - \bar{b} &= \frac{(\kappa-1)\pi f}{A} \end{aligned} \quad (1.11)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Интегралы в (1.11) преобразуются при помощи тождества (1.6), продифференцированного по t : $d\bar{t}/dt = (\psi_0'(t) - B_0) / ((1-\kappa)A_0)$ и соотношений (1.5). Так, например ($\beta = \kappa / ((1-\kappa)A_0)$):

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(t) d\bar{t} &= -\frac{\beta}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(t) (\psi_0'(t) - B_0) dt = \beta B_0 a + \frac{\beta}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(t) \varphi_0'(t) dt = \\ &= \beta B_0 a + \frac{\beta}{2\pi i} \left[\int_{-\omega_1 - \omega_2}^{-\omega_1 + \omega_2} \psi_0'(t) \Delta_1 \varphi(t) dt + \int_{-\omega_1 + \omega_2}^{\omega_1 + \omega_2} \psi_0'(t) \Delta_2 \varphi(t) dt \right] = \\ &= \beta B_0 a - \frac{\beta}{2\pi i} [2\eta_1 a 2\eta_2 b_0 - 2\eta_1 a 2\eta_2 b_0] = \beta B_0 a \end{aligned}$$

В результате (1.11) приводится к виду ($m = B_0/A_0$):

$$\left(\kappa - \frac{m^2}{(\kappa-1)^2} \right) a - \frac{m\bar{b}}{\kappa-1} = -\frac{Bf}{\pi} \quad (1.12)$$

$$ma - b = (\kappa A - \bar{A})/\pi$$

Подстановкой в правые части (1.12) вместо A и B их выражений из (1.4) заканчивается построение линейной алгебраической системы двух уравнений относительно a и b . Определитель системы обращается в нуль только при $s=1$. При этом и все $D_{ik}=0$.

На фиг. 1 построены зависимости коэффициентов D_{11}/D (кривая 1) и D_{12}/D (кривая 3) от s для равнопрочных контуров и квадратной ($\omega_2 = i\omega_1$) решетки. Кривая 2 для круглых отверстий в такой же решетке взята из [3]. С очевидными изменениями результаты переносятся на случай растяжения пластинки средними усилиями P, Q .

2. Определение формы равнопрочных контуров. В общем случае решение этой задачи основано на использовании конформного отображения голоморфной функцией $z = C\xi + \omega(\xi)$ стандартной (с параллельными разрезами или выброшенными кругами) области Σ той же связности на искомого; ξ — комплексная переменная на Σ , C — масштабный множитель. Функция $\omega(\xi)$ определяется из краевого условия типа (1.6), принимающего вид

$$\omega(\tau) + \overline{\psi_1(\tau)} = d_1 + C(\kappa-1)A_0\tau - CB_0\bar{\tau} \quad (2.1)$$

$$\psi_1(\xi) = B_0\omega(\xi) + \psi_0(C\xi + \omega(\xi)), \quad \tau \in \gamma$$

где γ — граница Σ , отображаемая на Γ .

Для плоскости с конечным числом отверстий при различном относительном их расположении известно аналитическое или численное решение задачи (2.1) [8, 9], однако в двоякопериодическом случае в [8] допущена досадная неточность: найденная там функция $\omega(\xi)$ отображает, как легко убедиться, ячейку с тремя, а не одним разрезом, соответственно, на внешность трех отверстий. Предпочтительнее представляется поэтому способ [9] — построение интегрального уравнения, эквивалентного (2.1).

Считая Σ внешностью регулярной системы единичных кругов, представим $\omega(\xi)$ и $\psi_1(\xi)$ с учетом их квазипериодичности интегралами типа Коши:

$$\omega(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} v(\tau) \zeta(\tau - \xi) d\tau, \quad \psi_1(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{v(\tau)} \zeta(\tau - \xi) d\tau \quad (2.2)$$

а постоянную d_1 определим соотношением

$$d_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega(\tau) ds, \quad ds = |d\tau|$$

Подстановка вычисленных по формулам [10] предельных значений из (2.2) в (2.1) приводит к интегральному уравнению типа Фредгольма с вещественным симметричным ядром

$$\begin{aligned} v(\tau_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} v(\tau) d \ln \frac{\sigma'(\tau - \tau_0)}{\sigma(\tau - \tau_0)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} v(\tau) ds = \\ = C(\kappa - 1) A_0 \tau_0 - C B_0 \bar{\tau}, \quad \tau, \tau_0 \in \gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\sigma(\xi)$ — сигма-функция Вейерштрасса [4].

Уравнение (2.3) однозначно разрешимо при любой правой части. Доказательство аналогично проведенному в [9]. Для численного решения (2.3) методом наименьших квадратов в $L_2(\gamma)$ функция $v(\tau)$ заменяется конечномерным приближением из элементов фундаментальной системы:

$$v(\tau) = \sum_{k=-n-1}^n d_{2k+1} \tau^{2k+1}$$

В силу симметрии задачи коэффициенты d_k с четными номерами равны нулю, остальные — действительны. Обозначая через T интегральный оператор в левой части (2.3), имеем, исходя из ряда для $\zeta(\xi)$ [4]:

$$T(\tau^{2k+1}) = \sum_{l,j} (\tau - \Omega_{l,j})^{-2k+1} - C_1 g \delta_{0,|k|} \bar{\tau}, \quad g = \sum_{l,j} \Omega_{l,j}^{-2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

(для отрицательных степеней τ в правой части (2.4) отсутствует знак комплексного сопряжения).

Здесь $\Omega_{l,j} = l\omega_1 + j\omega_2$, ω_1, ω_2 — периоды $\zeta(\xi)$ на плоскости Σ ; суммирование распространяется по всем целым значениям l, j ; $\delta_{l,h}$ — дельта-символ Кронекера. На основе (2.4) коэффициенты нормальной алгебраической системы для определения $\{d_{2k+1}\}$ находятся с помощью вычетов. Они не приводятся из-за своей громоздкости.

Система решалась численно методом квадратных корней. Установлена быстрая сходимость при любой близости γ к сторонам ячейки. На фиг. 2 приведены четверти искомого контура в квадратной ячейке для единственного независимого параметра $\rho = 2/\omega_1$. Видно, что с приближением ρ к единице равнопрочное отверстие «удаляет» материал из всей ячейки, превращая перфорированную плоскость в стержневую систему.

Автор благодарит Н. В. Баничука за постановку задачи, К. А. Лурье и А. В. Черкаева — за ценное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
2. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
3. Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Об изгибе упругих пластин с регулярной структурой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 124—130.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
5. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. Баничук Н. В. Задача оптимизации формы отверстия в пластинке, работающей на изгиб.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3, с. 81—88.
7. Маркушевич А. Н. Теория аналитических функций. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 703 с.
8. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 963—979.
9. Вигдергауз С. Б. Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 566—569.
10. Мухомелишвили Н. Н. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
22.I.1985