МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 539.214; 539.374

ОБ ОСУЩЕСТВИМОСТИ СОСТОЯНИЙ МАТЕРИАЛА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ «ПАДАЮЩЕМУ» УЧАСТКУ ДИАГРАММЫ

НИКИТИН Л. В., РЫЖАК Е. И.

В литературе по механике деформируемого твердого тела часто встречаются кривые деформирования материалов, содержащие падающий участок. Однако вопрос о том, действительно ли этот падающий участок соответствует каким-либо объективно существующим свойствам материала, или его наличие является результатом неверного истолкования экспериментальных данных, остается дискуссионным.

Стандартным возражением против возможности регистрации в эксперименте падающего участка диаграммы является следующее: материал, описываемый падающей диаграммой, неустойчив, и поэтому наблюдать его квазистатическое однородное деформирование (необходимое для снятия диаграммы) принципиально невозможно. Такое утверждение является результатом безоговорочного перенесения на реальные тела выводов, полученных для одномерных моделей сплошной среды (нить при растяжении, тонкий стержень при изгибе). Однако реальные тела трехмерны, функционируют при определенных граничных условиях, и для них интуитивно ясные (в одномерном случае) понятия падающей диаграммы и неустойчивости материала, а также их связь с устойчивостью тела в целом (которая как раз и является условием реализуемости того или иного состояния) нуждаются в уточнении.

Целью публикуемой работы является такое уточнение понятий, а именно выяснение тех эффектов, которые обусловлены неодномерностью тел и не имеют одномерных аналогов. Анализ основывается на теоремах Адамара и Ван Хофа (дающих локальные необходимые и достаточные условия устойчивости для упругих тел) и их обобщениях на случай упругопластических тел. Результатом работы является вывод о том, что при определенных условиях «неустойчивость» материала не противоречит требованию устойчивости тела в целом. В этих случаях неустойчивые состояния материала осуществимы и могут быть зарегистрированы.

Достаточные условия устойчивости сформулированы и проиллюстрированы на примере традиционных упругопластических определяющих соотношений.

1. Определение падающей диаграммы. Ограничимся рассмотрением упругопластических (в частности, упругих) материалов (для них и имеет смысл традиционная диаграмма «деформации — напряжения»). Для дальнейшего анализа понадобится только инкрементальная форма записи определяющего закона материала:

$$\delta^J\mathbf{T}=\begin{cases}\mathbf{L}^p:\delta\mathbf{D}, & \delta\mathbf{D}:\mathbf{S}>0\\ \mathbf{L}^e:\delta\mathbf{D}, & \delta\mathbf{D}:\mathbf{S}\leqslant 0\end{cases} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\delta^J\mathbf{T}$ — яуманово приращение этого тензора в данной материальной точке, $\mathbf{L}^p$ и $\mathbf{L}^e$ — тензоры пластических и упругих модулей соответственно, $\delta\mathbf{D}$ — тензор малых деформаций, отсчитываемых от состояния с напряжениями $\mathbf{T}$; двоеточие соответствует свертке по двум индексам, $\mathbf{S}$ — тензор, задающий нормаль к поверхности текучести (чаще всего это девиатор напряжений или заданная линейная комбинация девиатора напряжений и единичного тензора $\mathbf{I}$).

Тензор $\mathbf{L}^p$, соответствующий активному пластическому нагружению, зависит от параметров нагружения, определяющих данную точку на диаграмме материала. Будем считать, что в данной точке диаграмма является падающей, если найдется такой тензор $\delta\mathbf{D}\neq0$, что

$$\delta\mathbf{D}:\mathbf{L}:\delta\mathbf{D}<0 \tag{1.2}$$

т. е. нарушается постулат Друккера [1]. Заметим, что, поскольку тензором $\mathbf{L}$ определяется приращение напряжений Коши, рассчитываемых на единицу площади поверхности в текущей конфигурации тела, выполнение (1.2) не может быть обусловлено уменьшением площади элемента поверхности при деформировании.

Для упругопластических тел, видимо, естественно считать (и это принимается в дальнейшем), что неравенство (1.2) может выполняться только при активном пластическом нагружении, а квадратичная форма $\delta\mathbf{D} : \mathbf{L}^e : \delta\mathbf{D}$, соответствующая упругой разгрузке, положительно определена.

2. Устойчивость по Адамару. Теоремы Адамара и Ван Хофа. Будем считать реализуемыми состояния материала, для которых существует устойчивая механическая система, в составе которой имеется данный материал в указанном состоянии.

Понятие устойчивой механической системы требует конкретизации. В качестве механических систем ограничимся рассмотрением упругопластических тел (в том числе составных, причем некоторые части тела могут быть упругими) с закрепленной граничной поверхностью. Последнее требование не столь ограничительно, поскольку тело с произвольной упругой и упругопластической заделкой на границе может быть представлено как составное тело с закрепленной границей. Под устойчивостью будем понимать устойчивость по отношению к малым деформациям в смысле статического энергетического критерия для тела в целом [1—3]. Тогда математическая формулировка условия устойчивости сводится к требованию положительной определенности некоторого кусочно-квадратичного функционала от поля градиента малых виртуальных перемещений $R\{\nabla\delta\mathbf{u}\}$, что в случае упругого тела совпадает с условием устойчивости по Адамару по отношению к малым деформациям [4].

Чтобы выписать явный вид функционала R, введем некоторые обозначения: $\varkappa$ — конфигурация тела в равновесном состоянии, исследуемом на устойчивость, $\mathbf{T}_\varkappa$ — тензор Пиолы по отношению к конфигурации $\varkappa$, $\delta\mathbf{H}\equiv(\nabla\delta\mathbf{u})^T$ — тензор малых виртуальных дисторсий по отношению к $\varkappa$, $\mathbf{A}$ — тензор жесткостей, определяемый равенством

$$\delta\mathbf{T}_\varkappa=\mathbf{A} : \delta\mathbf{H} \tag{2.1}$$

Тензор $\mathbf{A}$ связан с тензором $\mathbf{L}$ (который нужно понимать либо как $\mathbf{L}^p$, либо как $\mathbf{L}^e$ в зависимости от знака $\delta\mathbf{H} : \mathbf{S}$) следующим соотношением [4]:

$$\mathbf{A}=\mathbf{L}+\mathbf{T}\otimes\mathbf{I}+{}^1/_2(\mathbf{I}\otimes\mathbf{T}-\mathbf{T}\otimes\mathbf{I})^{(1324)}-{}^1/_2(\mathbf{I}\otimes\mathbf{T}+\mathbf{T}\otimes\mathbf{I})^{(1324)} \tag{2.2}$$

где (1324) означает соответствующую перестановку векторов в тензорном произведении (обобщенное транспонирование): $(\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{a}_4)^{(1324)}\equiv\equiv\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_4$.

Воспользовавшись введенными обозначениями и отбрасывая знак приращения δ, получим

$$R\{\mathbf{H}\}=\int\limits_\varkappa \mathbf{H}:\mathbf{A}:\mathbf{H}\,dV \tag{2.3}$$

Необходимые локальные условия положительной определенности $R\{\mathbf{H}\}$ дает основная теорема Адамара об устойчивости: $R\{\mathbf{H}\}$ положительно определен только тогда, когда $\forall\mathbf{x}\in\varkappa$, $\forall\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\neq0$ имеет место неравенство Адамара

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} : \mathbf{A} : \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\geqslant0 \tag{2.4}$$

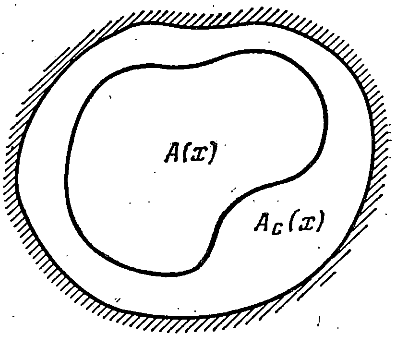
Доказательство для упругих тел приведено в [4], идея доказательства для упругопластических тел сформулирована в [2, 3].

Для случая, когда $\varkappa$ — однородная конфигурация упругого тела ($\mathbf{A}(\mathbf{x})=\mathrm{const}$), Ван Хофом доказана обратная теорема [5, 6]: если (2.4) выполняется в строгом смысле, то $R\{\mathbf{H}\}$ положительно определен для тела с закрепленной границей ($\mathbf{u}|_{\partial\varkappa}=0$).

Таким образом, однородное упругое тело с закрепленной границей может быть устойчиво и в том случае, когда квадратичная форма (1.2) не является неотрицательно-определенной, лишь бы выполнялось строгое неравенство Адамара. Поскольку не все тензоры второго ранга представимы в виде диад, неравенства (1.2) и (2.4) вполне совместимы.

3. Следствия из теоремы Ван Хофа. При кажущейся ограничительности условий, в которых сформулирована теорема Ван Хофа, на ее основе могут быть получены достаточные условия устойчивости для неоднородных упругих и упругопластических тел с закрепленной границей и с упругой и упругопластической заделкой на границе.

Рассмотрим, прежде всего, неоднородное упругое тело ($\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x})\neq\neq\mathrm{const}$) с закрепленной границей. Допустим, что существует такой тензор $\mathbf{A}_0$, что для него выполняется неравенство Адамара (будем называть такие тензоры адамаровыми) и, кроме того, во всех точках тела и для любых тензоров второго ранга



$$\mathbf{H}:\mathbf{A}_0:\mathbf{H}\leqslant\mathbf{H}:\mathbf{A}(\mathbf{x}):\mathbf{H} \tag{3.1}$$

Тогда для любого поля малых виртуальных смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})\neq 0$; $\mathbf{u}|_{\partial\varkappa}=0$:

$$R\{\nabla\mathbf{u}\}\geqslant\int_\varkappa \nabla\mathbf{u}:\mathbf{A}_0:\nabla\mathbf{u}\,dV>0$$

(по теореме Ван Хофа). Следовательно, выполнение (3.1) достаточно для того, чтобы такое тело, будучи закрепленным на границе, было устойчиво (*следствие 1*).

Совершенно аналогично для неоднородного упругопластического тела с закрепленной границей достаточным условием устойчивости (*следствие 2*) является наличие такого адамарова тензора $\mathbf{A}_0$, что во всех точках тела и для любых тензоров второго ранга $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}:\mathbf{A}_0:\mathbf{H}\leqslant\mathbf{H}:\mathbf{A}^p(\mathbf{x}):\mathbf{H},\quad \mathbf{H}:\mathbf{A}_0:\mathbf{H}\leqslant\mathbf{H}:\mathbf{A}^e(\mathbf{x}):\mathbf{H} \tag{3.2}$$

Под телом с упругой или упругопластической заделкой на границе будем понимать составное тело (фиг.), состоящее из собственно тела ($\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{x})$), скрепленного без проскальзывания с охватывающим его телом ($\mathbf{A}=\mathbf{A}_c(\mathbf{x})$), осуществляющим заделку. Внешняя граница тела, осуществляющего заделку, жестко закреплена. Тогда составное тело является неоднородным телом с закрепленной границей, и к нему применимо следствие 2. В частности, тело с заделкой устойчиво, если тело, осуществляющее заделку, жестче, чем собственно тело, которое, в свою очередь, удовлетворяет (3.2).

Заметим, что предположение о малости толщины тела, осуществляющего заделку, не делалось. Если сделать такое предположение и считать, что смещения по толщине этого тела распределены, скажем, линейно, то принятое определение тела с заделкой совпадает с традиционным. Для составного тела это означает наложение некоторых кинематических ограничений на его движения, что, очевидно, не нарушает неравенств (3.2) и оценки снизу для $R\{\nabla\mathbf{u}\}$, так что вывод об устойчивости тела с заделкой остается в силе.

До сих пор рассматривались случаи, когда «тело сравнения» ($\mathbf{A}=\mathbf{A}_0$) было однородным. Рассмотрим теперь один из вариантов неоднородного тела сравнения. Пусть для него $\mathbf{A}=k(\mathbf{x})\mathbf{A}_0$, $k(\mathbf{x})$ — кусочно-непрерывная положительная функция, $\mathbf{A}_0$ — адамаров тензор. Введем обозначения:

$$a_m\equiv\min_{|\mathbf{g}||\mathbf{f}|=1}\mathbf{g}\otimes\mathbf{f}:\mathbf{A}_0:\mathbf{g}\otimes\mathbf{f}>0,\quad \alpha_m\equiv\min_{\mathbf{H}:\mathbf{H}=1}\mathbf{H}:\mathbf{A}_0:\mathbf{H} \tag{3.3}$$

Здесь α_m — наименьшее собственное значение тензора $\mathbf{A}_0^{\mathrm{sym}}$, рассматриваемого как самосопряженный линейный оператор в пространстве тензоров второго ранга [7].

Поскольку рассматриваются тела с падающей диаграммой, то и тело сравнения должно быть таковым, т. е. $\alpha_m<0$. Оценим снизу функционал $R_0\{\nabla\mathbf{u}\}$ для тела сравнения (по-прежнему считается, что $\mathbf{u}|_{\partial\varkappa}=0$). Представим $\mathbf{A}$ в виде суммы неотрицательно-определенного тензора и отрицательно-определенного:

$$\mathbf{A}=k(\mathbf{x})\,(\mathbf{A}_0+|\alpha_m|\mathbf{1})-k(\mathbf{x})\,|\alpha_m|\mathbf{1} \tag{3.4}$$

где $\mathbf{1}=\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}^{(1324)}$ — единичный тензор четвертого ранга. Тогда, вводя обозначение $\mathbf{A}_{0+}\equiv\mathbf{A}_0+|\alpha_m|\mathbf{1}$, получим

$$R_0\{\mathbf{H}\}=\int\limits_{\varkappa} k\mathbf{H}:\mathbf{A}_{0+}:\mathbf{H}\,dV-|\alpha_m|\int\limits_{\varkappa} k\mathbf{H}:\mathbf{H}\,dV\geqslant$$

$$\geqslant k_m\int\limits_{\varkappa}\mathbf{H}:\mathbf{A}_{0+}:\mathbf{H}\,dV-k_M|\alpha_m|\int\limits_{\varkappa}\mathbf{H}:\mathbf{H}\,dV$$

$$k_m\equiv\inf_{\mathbf{x}\in\varkappa}k(\mathbf{x});\qquad k_M\equiv\sup_{\mathbf{x}\in\varkappa}k(\mathbf{x}).$$

Из теоремы Ван Хофа можно получить, что при $\mathbf{u}|_{\partial\varkappa}=0$, $\mathbf{B}_0=\mathrm{const}$:

$$b_m\int\limits_{\varkappa}\mathbf{H}:\mathbf{H}\,dV\leqslant\int\limits_{\varkappa}\mathbf{H}:\mathbf{B}_0:\mathbf{H}\,dV,\qquad b_m\equiv\min_{|\mathbf{g}||\mathbf{f}|=1}\mathbf{g}\otimes\mathbf{f}:\mathbf{B}_0:\mathbf{g}\otimes\mathbf{f}$$

Замечая, что $a_{+m}=a_m+|\alpha_m|$, получим

$$R_0\{\mathbf{H}\}\geqslant[k_m(a_m+|\alpha_m|)-k_M|\alpha_m|]\int\limits_{\varkappa}\mathbf{H}:\mathbf{H}\,dV$$

Чтобы правая часть неравенства была положительна (а вместе с ней и $R_0\{\mathbf{H}\}$), нужно ограничить степень неоднородности функции $k(\mathbf{x})$:

$$(k_M-k_m)/k_m\leqslant a_m/|\alpha_m| \tag{3.5}$$

Таким образом, получаем *следствие 3*: тело с закрепленной границей устойчиво, если существует такой адамаров тензор $\mathbf{A}_0$ и такая положительная кусочно-непрерывная функция $k(\mathbf{x})$, удовлетворяющая (3.5), что $\forall\mathbf{H}$, $\forall\mathbf{x}\in\varkappa$:

$$k(\mathbf{x})\mathbf{H}:\mathbf{A}_0:\mathbf{H}\leqslant\mathbf{H}:\mathbf{A}^p(\mathbf{x}):\mathbf{H},\quad k(\mathbf{x})\mathbf{H}:\mathbf{A}_0:\mathbf{H}\leqslant\mathbf{H}:\mathbf{A}^e(\mathbf{x}):\mathbf{H} \tag{3.6}$$

В качестве тела с закрепленной границей, как и прежде, может выступать составное тело, представляющее собой совокупность тела, закрепленного на границе с конечной жесткостью, и тела, реализующего эту заделку конечной жесткости.

4. О возможности (в принципе) регистрации падающей диаграммы в эксперименте. Примеры. Прежде поясним, почему нельзя ограничиться рассмотрением однородных тел с абсолютно жестким закреплением границы. Хотя, конечно, не существует абсолютно жестких испытательных машин, но допущение их существования является не большей идеализацией, чем допущение существования упругопластических тел, не обладающих, скажем, вязкостью или ползучестью. Однако в такой умозрительной испытательной машине, в которой полностью задается квазистатическое движение границы испытуемого тела, принципиально отсутствует возможность прямого измерения напряжения, так что идеальная абсолютно жесткая машина непригодна для получения диаграммы деформации — напряжения. Если же граница испытуемого тела связана с конечной (и при том известной) жесткостью с поверхностью, движение которой задается машиной, то по деформациям тела заделки как раз и могут быть рассчитаны напряжения в испытуемом теле.

Результаты п. 3 показывают, что даже при наличии падающей диаграммы тело, закрепленное на границе с достаточной (даже не обязательно очень большой) жесткостью, может быть устойчиво, так что нет принципиальных препятствий к регистрации таких состояний в эксперименте.

Рассмотрим два примера с определяющими соотношениями, традиционными для теории пластичности, и определим для них реализуемые состояния с падающей диаграммой.

Обозначим проектор на подпространство симметричных тензоров второго ранга через $\mathbf{1}^{\mathrm{def}}={}^1\!/_2\mathbf{1}+{}^1\!/_4(\mathbf{1}^{(1243)}+\mathbf{1}^{(4312)})$. Пусть $\mathbf{\Omega}$ — некоторый нормированный ($\mathbf{\Omega}:\mathbf{\Omega}=1$) симметричный тензор второго ранга. Введем два ортогональных проектора [7]:

$$\mathbf{P}^{\Omega}\equiv\mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{\Omega},\quad \mathbf{P}^{\perp}\equiv\mathbf{1}^{\mathrm{def}}-\mathbf{P}^{\Omega} \tag{4.1}$$

Для обоих рассматриваемых примеров примем закон пластичности в виде [8]:

$$\mathbf{L}^p\equiv\mathbf{L}^e-\mathbf{S}\otimes\mathbf{S}/(h+\mathbf{\Omega}:\mathbf{L}^e:\mathbf{\Omega}),\quad \mathbf{S}\equiv\mathbf{L}^e:\mathbf{\Omega} \tag{4.2}$$

где h — пластический модуль. Условие активного пластического нагружения прежнее: $\mathbf{D}:\mathbf{S}>0$. Если представить $\mathbf{D}$ в виде: $\mathbf{D}=\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2$; $\mathbf{D}_1\equiv\equiv\mathbf{P}^\Omega:\mathbf{D}$; $\mathbf{D}_2:\mathbf{S}=0$, то $\mathbf{L}^p:\mathbf{D}=(h/(h+\mathbf{\Omega}:\mathbf{L}^e:\mathbf{\Omega}))\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}:\mathbf{D}_1)+\mathbf{L}^e:\mathbf{D}_2$.

Вводя приведенный безразмерный пластический модуль

$$h'\equiv h/(h+\mathbf{\Omega}:\mathbf{L}^e:\mathbf{\Omega}) \tag{4.3}$$

получим

$$\mathbf{D}:\mathbf{L}^p:\mathbf{D}=h'\mathbf{D}_1:\mathbf{L}^e:\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2:\mathbf{L}^e:\mathbf{D}_2 \tag{4.4}$$

Поскольку $\mathbf{L}^e$ — положительно-определенный тензор четвертого ранга, то для того, чтобы определяющий закон (4.2) соответствовал падающему участку диаграммы, необходимо и достаточно, чтобы приведенный модуль h' был отрицателен.

В соответствии с рассуждениями п. 4 и в силу следствия 2 п. 3 однородные состояния материала с определяющим законом (4.2) при $h'<0$ реализуемы и могут быть в принципе зарегистрированы в эксперименте, если тензор $\mathbf{A}^p$ (2.2), отвечающий (4.2), адамаров. Представляет интерес задача определения наибольшего по модулю отрицательного значения h', при котором тензор $\mathbf{A}^p$ еще остается адамаровым. Чтобы упростить решение задачи (несколько сузив множество допустимых значений h'), заменим $\mathbf{A}^p$ на другой тензор $\mathbf{B}$, такой, чтобы при $\mathbf{H}=\mathbf{f}\otimes\mathbf{g}$, $\mathbf{D}=(\mathbf{f}\otimes\mathbf{g}+\mathbf{g}\otimes\mathbf{f})/2$ выполнялось неравенство:

$$\mathbf{H}:\mathbf{B}:\mathbf{H}=\mathbf{D}:\mathbf{B}:\mathbf{D}\leqslant\mathbf{H}:\mathbf{A}^p:\mathbf{H} \tag{4.5}$$

и определим предельное значение h_*' для тензора $\mathbf{B}$. Пржде всего заметим, что для диадных $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}:\mathbf{A}:\mathbf{H}=\mathbf{H}:\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{T}-\mathbf{T}\otimes\mathbf{I})^{(1324)}+\mathbf{L}\right\}:\mathbf{H} \tag{4.6}$$

Очевидно, что в (4.6) можно заменить тензор напряжений его девиатором. Вводя нормированный девиатор напряжений $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}:\mathbf{N}=1$), получим $\mathbf{H}:\mathbf{A}:\mathbf{H}=\mathbf{H}:\{(\sqrt{2}/2)\tau(\mathbf{I}\otimes\mathbf{N}-\mathbf{N}\otimes\mathbf{I})^{(1324)}+\mathbf{L}\}:\mathbf{H}$, где τ — интенсивность касательных напряжений. Заметим также, что $\mathbf{H}:(\mathbf{I}\otimes\mathbf{N}-\mathbf{N}\otimes\mathbf{I})^{(1324)}:\mathbf{H}\geqslant-(n_M-n_m)\mathbf{H}:\mathbf{H}\geqslant-2(n_M-n_m)\mathbf{D}:\mathbf{D}$, где n_M — наибольшее, а n_m — наименьшее собственные значения $\mathbf{N}$. Кроме того, $\mathbf{H}:\mathbf{L}:\mathbf{H}=\mathbf{D}:\mathbf{L}:\mathbf{D}$. Таким образом, получим

$$\mathbf{B}=\mathbf{L}-\sqrt{2}\tau(n_M-n_m)\mathbf{1}^{\mathrm{def}} \tag{4.7}$$

При исследовании $\mathbf{B}$ на многообразии симметризованных диад не будем пользоваться явным представлением $\mathbf{D}$ через векторы. Удобнее, оказывается, воспользоваться равносильным условием диадности $\mathbf{D}$, налагаемым на его собственные числа: одно из них должно быть равно нулю, а произведение двух других — неположительно. Это можно записать так:

$$\det\mathbf{D}=0,\quad (\mathbf{D}:\mathbf{I})^2-\mathbf{D}:\mathbf{D}\leqslant0 \tag{4.8}$$

Предельное значение $h'=h_*'$ будем искать как максимальное значение h', при котором квадратичная форма $\mathbf{D}:\mathbf{B}:\mathbf{D}$ имеет нулевые значения при $\mathbf{D}\neq0$: $h'=\max$ при условиях $\mathbf{D}:\mathbf{B}(h'):\mathbf{D}=0$, $\mathbf{D}:(\mathbf{S}/\sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S}})=1$ (условие нормировки с учетом условия активного пластического нагружения) и (4.8).

Примеры. 1. Пусть $\mathbf{\Omega}=\mathbf{N}$ (нормированному девиатору напряжений), а разгрузке соответствует изотропный закон Гука: $\mathbf{L}^e=2G\mathbf{P}_1+3K\mathbf{P}_2$, где $\mathbf{P}_1$ — проектор на подпространство симметричных девиаторов, $\mathbf{P}_2$ — проектор на подпространство шаровых тензоров. Тогда $\mathbf{\Omega}=\mathbf{N}$ — собственный тензор для $\mathbf{L}^e$ и $\mathbf{S}=2G\mathbf{N}$; $\mathbf{L}^p=h'\mathbf{P}^N:\mathbf{L}^e:\mathbf{P}^N+\mathbf{P}^\perp:\mathbf{L}^e:\mathbf{P}^\perp$. Поскольку $\mathbf{P}^N:\mathbf{P}_1:\mathbf{P}^N=\mathbf{P}^N$, $\mathbf{P}^N:\mathbf{P}_2:\mathbf{P}^N=0$, $\mathbf{P}^\perp:\mathbf{P}_2:\mathbf{P}^\perp=\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}^\perp:\mathbf{P}_1:\mathbf{P}^\perp=\mathbf{P}_1^\perp$ — проектор на подпространство девиаторов, ортогональных $\mathbf{N}$, то

$$\mathbf{L}^p=h'2G\mathbf{P}^N+2G\mathbf{P}_1^\perp+3K\mathbf{P}_2 \tag{4.9}$$

Так как $\mathbf{1}^{\mathrm{def}}=\mathbf{P}^N+\mathbf{P}_1^\perp+\mathbf{P}_2$, то

$$\mathbf{B}=[h'2G-\sqrt{2}\tau(n_M-n_m)]\mathbf{P}^N+$$
$$+[2G-\sqrt{2}\tau(n_M-n_m)]\mathbf{P}_1^{\perp}+[3K-\sqrt{2}\tau(n_M-n_m)]\mathbf{P}_2 \qquad (4.10)$$

Для всех видов напряженного состояния $n_M-n_m\leqslant\sqrt{2}$. Будем считать, что τ мало по сравнению с упругими модулями, так что коэффициенты при $\mathbf{P}_1^{\perp}$ и $\mathbf{P}_2$ в (4.10) положительны; вырождение может происходить только за счет обращения в нуль коэффициента при $\mathbf{P}^N$; при этом соответствующий нулевой тензор коллинеарен $\mathbf{N}$. Если $\mathbf{N}$ не является девиатором чистого сдвига $(\mathbf{N}\neq\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1/\sqrt{2}-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2/\sqrt{2})$, то для него не выполняются условия (4.8) (так как тогда $\det\mathbf{N}\neq0$).

Пусть $\mathbf{N}$ — девиатор одноосного растяжения: $\mathbf{N}=2/\sqrt{6}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1-1/\sqrt{6}\times\times(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3)$; $n_M-n_m=\sqrt{3}/\sqrt{2}$. Обезразмеривая модули и τ с масштабом $2G$ и снабжая безразмерные величины штрихом, получим

$$\mathbf{B}=(h'-\sqrt{3}\tau')\mathbf{P}^N+(1-\sqrt{3}\tau')\mathbf{P}_1^{\perp}+(3K'-\sqrt{3}\tau')\mathbf{P}_2 \qquad (4.11)$$

Приравнивая $\mathbf{D}:\mathbf{B}:\mathbf{D}$ нулю и учитывая условие нормировки, сводящееся к $\mathbf{D}:\mathbf{N}=1$, получим

$$-(h'-\sqrt{3}\tau')=\alpha_1\mathbf{D}:\mathbf{P}_1^{\perp}:\mathbf{D}+\alpha_2\mathbf{D}:\mathbf{P}_2:\mathbf{D}=\min \qquad (4.12)$$

где $\alpha_1\equiv1-\sqrt{3}\tau'$, $\alpha_2=3K'-\sqrt{3}\tau'$. Будем искать минимум методом неопределенных множителей Лагранжа, первоначально не принимая во внимание условия, выраженные неравенством

$$d/d\mathbf{D}((\alpha_1/2)\mathbf{D}:\mathbf{P}_1^{\perp}:\mathbf{D}+(\alpha_2/2)\mathbf{D}:\mathbf{P}_2:\mathbf{D}-\lambda_1\mathbf{N}:\mathbf{D}-\lambda_2\det\mathbf{D})=0$$
$$\alpha_1\mathbf{P}_1^{\perp}:\mathbf{D}+\alpha_2\mathbf{P}_2:\mathbf{D}-\lambda_1\mathbf{N}-\lambda_2 d(\det\mathbf{D})/d\mathbf{D}=0 \qquad (4.13)$$

Заметим, что $\alpha_1\mathbf{P}_1^{\perp}:\mathbf{D}+\alpha_2\mathbf{P}_2:\mathbf{D}=\alpha_1\mathbf{P}_1:\mathbf{D}+\alpha_2\mathbf{P}_2:\mathbf{D}-\alpha_1\mathbf{N}=\alpha_1\mathbf{D}+{}^1/_3(\alpha_2-\alpha_1)\mathbf{I}(\mathbf{D}:\mathbf{I})-\alpha_1\mathbf{N}$. Кроме того, если $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ — ортонормированный собственный базис $\mathbf{D}$, то $d(\det\mathbf{D})/d\mathbf{D}=d_2d_3\mathbf{g}_1\otimes\mathbf{g}_1+d_1d_3\mathbf{g}_2\otimes\mathbf{g}_2+d_1d_2\mathbf{g}_3\otimes\otimes\mathbf{g}_3$ (d_i — соответствующие собственные числа $\mathbf{D}$). Таким образом, (4.13) означает равенство нулю некоторой линейной комбинации тензора $\mathbf{N}$ и тензоров, соосных с $\mathbf{D}$. Значит, $\mathbf{D}$ соосен с $\mathbf{N}$, т. е. $\mathbf{g}_i=\mathbf{e}_i$.

Допустим, что нулю равно собственное число d_3 (в принципе, надо было бы проверить случаи $d_1=0$ и $d_2=0$, но d_2 и d_3, очевидно, равноценны, а при $d_1=0$ нельзя удовлетворить условию, выраженному неравенством). Тогда $d(\det\mathbf{D})/d\mathbf{D}=d_1d_2\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3$ и (4.13) дает:

$$\alpha_1(d_1\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+d_2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)+(\alpha_2-\alpha_1)(d_1+d_2)\mathbf{I}/3-(\lambda_1+\alpha_1)\mathbf{N}-\lambda_2d_1d_2\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3=0 \qquad (4.14)$$

Проектируя (4.14) на плоскость $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, получим

$$\alpha_1(d_1\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+d_2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)+(\alpha_2-\alpha_1)(d_1+d_2)/3(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)=$$
$$=(\lambda_1+\alpha_1)(2/\sqrt{6}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1-1/\sqrt{6}\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2) \qquad (4.15)$$

Исключая $(d_1+d_2)/3$ и используя условие нормировки $\mathbf{D}:\mathbf{N}=1$, находим из (4.15) значение λ_1. Можно получить, что предельное значение $-(h_*'-\sqrt{3}\tau')=\lambda_1$. Окончательно

$$h_*'=\sqrt{3}\tau'-\alpha_1\alpha_2/(2\alpha_1+3\alpha_2) \qquad (4.16)$$

Можно убедиться, что при небольших значениях τ', а именно таких, когда $\alpha_1>0$ и $\alpha_2>0$, d_1 и d_2 действительно имеют разные знаки; проверка случая, когда $d_1=0$ или $d_2=0$, ничего нового не дает.

В случае, когда коэффициент Пуассона равен нулю $(\alpha_1=\alpha_2)$, равенство (4.16) принимает наиболее наглядную форму

$$h_*'=-({}^1/_5)(1-3\sqrt{3}\tau/G) \qquad (4.17)$$

Если $\tau/G<1/3\sqrt{3}$, то $h_*'<0$, т. е. имеется достижимый при одноосном растяжении падающий участок диаграммы.

2. Пусть $\Omega=\sqrt{1-\beta^2/3}\,\mathbf{N}+(\beta/3)\mathbf{I}$. Это соответствует упругопластическому

телу с внутренним трением и дилатансией [8] в том случае, когда коэффициенты последних равны между собой.

Положим $\mathbf{N}=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1/\sqrt{2}-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2/\sqrt{2}$ (девиатор чистого сдвига); коэффициент Пуассона для простоты сразу положим равным нулю. Учитывая, что $n_M-n_m=\sqrt{2}$, получим

$$\mathbf{B}=\mathbf{L}-2\tau\mathbf{1}^{\mathrm{def}}=2G(h'\mathbf{P}^{\Omega}+\mathbf{P}^{\perp}-2\tau'\mathbf{1}^{\mathrm{def}})=$$
$$=2G\{(h'-\tau/G)\mathbf{P}^{\Omega}+(1-\tau/G)\mathbf{P}^{\perp}\} \tag{4.18}$$

Повторяя все рассуждения и выкладки предыдущего примера, получим

$$h_*'=\tau/G-(1-\tau/G)(\beta^2/9)/(1-\beta^2/9) \tag{4.19}$$

Если $\tau/G<\beta^2/9$, то $h_*'<0$, т. е. имеется достижимый падающий участок при сдвиговом (в девиаторном смысле) деформировании.

В обоих примерах найденные значения h_*' являются несколько завышенными (т. е. на самом деле достижимый падающий участок диаграммы несколько больше найденного) и, следовательно, ограничения на τ, достаточные для существования падающего участка, несколько более жесткие, чем необходимо. Отличие исследовавшегося тензора $\mathbf{B}$ от тензора $\mathbf{A}^p$, который должен был бы исследоваться на самом деле, порядка $O(\tau)\mathbf{1}$.

Таким образом, для трехмерных тел, деформируемых в определенных условиях стеснения, наличие падающей диаграммы, вообще говоря, еще не означает неустойчивости. Если считать устойчивые состояния тела реализуемыми, то в этом смысле имеется класс реализуемых состояний, соответствующих падающей диаграмме; устойчивость гарантируется теоремой Ван Хофа и следствиями 1, 2 и 3. Границы этого класса достижимых состояний определяются теоремой Адамара, обобщенной на случай упругопластических тел. При нарушении условий Адамара, т. е. при наличии падающей диаграммы для виртуальных деформаций, имеющих диадное строение, заведомо имелись бы формы потери устойчивости, совместимые с любыми граничными условиями (локализационные формы [2, 3]). Иначе говоря, в тех сечениях диаграммы, которые соответствуют путям деформирования с виртуальными скоростями деформаций диадного строения, диаграмма не может быть падающей; она оканчивается в том месте, где перестает быть восходящей (так же, как для привычных одномерных моделей). В других же сечениях наличие падающего участка не запрещено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Друккер Д.* О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды.— Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1964, № 3, с. 115–128.
2. *Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Разрушение горной породы с внутренним трением и дилатансией.— Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 5, с. 1203–1206.
3. *Рыжак Е. И.* Об эшелонной структуре как форме потери устойчивости горной породы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 127–136.
4. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
5. *Van Hove L.* Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues.— Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch., 1947, v. 50, p. 18–23.
6. *Gurtin M.* The linear theory of elasticity.— In: Handbuch der Physik, v. 6a/2, p. 105. B.: Springer, 1972, p. 1–295.
7. *Рыхлевский Я.* О законе Гука.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 420–435.
8. *Rice J. R.* The localization of plastic deformation.— In: Theoretical and applied mechanics. Proc. 14th IUTAM Congr. Amsterdam: North-Holland, 1976, p. 207–220.— Рус. перев.: М.: Мир, 1979, с. 439–471.

Москва

Поступила в редакцию 10.VII.1985