МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 539.374

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВЯЗКОУПРУГОГО КОЛЬЦА

ЕГАРМИН Н. Е.

Рассматриваются плоские колебания нерастяжимого кольца, медленно вращающегося вокруг оси, перпендикулярной его плоскости. Угловая скорость вращения может быть функцией времени. Материал кольца описывается линейной наследственной теорией вязкоупругости. Установлено, что, как и в случае идеально упругого кольца, рассмотренного в [1], форма стоячей волны колебаний будет прецессировать как относительно кольца, так и относительно инерциального пространства, однако скорость прецессии может быть иной. Рассматривается один из возможных способов поддержания незатухающих колебаний. Показано, что вынужденные колебания также будут обладать свойством инертности, и получена формула для скорости их прецессии.

1. В [1] показано, что колебания нерастяжимого упругого кольца, медленно вращающегося вокруг своей оси, при ряде упрощающих предположений могут быть описаны следующим уравнением:

$$w^{\cdot\cdot\prime\prime}-w^{\cdot\cdot}+4\Omega(t)w^{\cdot\prime}+\varkappa^2 L(w)=0 \qquad (1.1)$$

Здесь $w=w(\varphi,\ t)$ — величина прогиба; t — время; точка над буквой означает дифференцирование по времени; φ — угловая координата точки кольца; штрих означает дифференцирование по углу φ; $\Omega=\Omega(t)$ — угловая скорость вращения кольца; $\varkappa^2$ — некий параметр, зависящий от размеров кольца и таких характеристик его материала, как ρ — объемная плотность, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга. Оператор L определяется принятой реологической моделью и для идеально упругого тела (модель Гука), рассмотренного в [1], имеет вид $L=L_G=(\partial^2/\partial\varphi^2+1)^2$.

В публикуемой работе будем считать, что материал кольца описывается линейной наследственной теорией вязкоупругости. При этом, как известно [2], коэффициент Пуассона можно по-прежнему считать постоянным, а модуль Юнга E следует заменить на некий линейный интегральный оператор $E^\vee$. Тогда для описания вязкоупругих свойств материала достаточно заменить во всех соотношениях для идеально упругих тел выражения типа $Ef(t)$, где $f(t)$ — функция времени, на следующие (E_0 — статическое значение модуля Юнга):

$$E^\vee f(t)=E_0 f(t)+E_1^\vee f(t)=E_0\left[f(t)+\int_0^\infty R(s)f(t-s)\,ds\right]$$

Ядро $R(s)$ определяется экспериментально или строится из той или иной модели вязкоупругости. Член $E_0f(t)$ выделен из интегрального оператора для удобства.

Сделав указанную замену, придем к следующему интегродифференциальному уравнению для поставленной задачи:

$$w^{\cdot\cdot\prime\prime}-w^{\cdot\cdot}+4\Omega(t)w^{\cdot\prime}+\varkappa^2(w^{\mathrm{VI}}+2w^{\mathrm{IV}}+w'')+ \qquad (1.2)$$
$$+\varkappa^2\int_0^\infty R(s)\left[w^{\mathrm{VI}}(t-s)+2w^{\mathrm{IV}}(t-s)+w''(t-s)\right]ds=0$$

Будем считать, что ядро $R(s)$ мало в том смысле, что для любой рассматриваемой функции $f(t)$ будет иметь место сильное неравенство $\|E_1{}^\sim f\| \ll \|E_0 f\|$. При этом будут малы и коэффициенты R_c, R_s, определяемые следующим образом:

$$R_c(\omega)=\int\limits_0^\infty R(s)\cos\omega s\,ds,\qquad R_s(\omega)=\int\limits_0^\infty R(s)\sin\omega s\,ds$$

Можно показать, что они связаны с определяемым экспериментально комплексным модулем упругости $E^*(\omega)=E'(\omega)+iE''(\omega)$ формулами

$$E^*=E_0(1+R_c-iR_s),\qquad R_c=(E'-E_0)/E_0,\qquad R_s=-E''/E_0 \tag{1.3}$$

Коэффициенты R_c, R_s можно представить и через действительную и мнимую части комплексной податливости J', J'' — величины обратной к $E^*(\omega)$.

2. Решение уравнения (1.2) ищем в виде суперпозиции бегущих волн. В силу линейности задачи волны с различными номерами n можно рассматривать независимо друг от друга:

$$w=A\cos(n\varphi+y_1)+B\cos(n\varphi+y_2) \tag{2.1}$$

$$y_1=\omega_0 t+\alpha,\qquad y_2=-\omega_0 t+\beta$$

где ω_0 — частота колебаний невращающегося упругого кольца, определяемая из уравнения (1.1) при $\Omega=0$, $L=L_G$ формулой

$$\omega_0{}^2=\varkappa^2 n^2(n^2-1)^2/(n^2+1) \tag{2.2}$$

Для приведения уравнения (1.2) к стандартной форме метода осреднения дополняем формулу (2.1) следующим соотношением:

$$w^\bullet=-A\omega_0\sin(n\varphi+y_1)+B\omega_0\sin(n\varphi+y_2) \tag{2.3}$$

При $\Omega=0$ величины A, B, α, β постоянны и определяются выбором начальных условий. При отличном от нуля, но малом значении Ω переменные A, B, α, β будут медленными функциями времени, зависящими от номера гармоники n как от параметра. Выполнив осреднение в уравнениях для A, B, y_1, y_2 согласно схеме метода осреднения в интегродифференциальных уравнениях, изложенной в [3], получим

$$A^\bullet={}^1/_2 A\omega_0 R_s(\omega_0),\qquad B^\bullet={}^1/_2 B\omega_0 R_s(\omega_0) \tag{2.4}$$

$$y_1{}^\bullet=\omega_0+2\Omega n/(n^2+1)+{}^1/_2\omega_0 R_c(\omega_0),\qquad y_2{}^\bullet=-\omega_0+2\Omega n/(n^2+1)-{}^1/_2\omega_0 R_c(\omega_0)$$

Пусть $A=B$, тогда из формулы (2.1) следует, что колебания кольца представимы в виде стоячей волны с частотой $(y_1{}^\bullet-y_2{}^\bullet)/2$, поворачивающейся относительно кольца с угловой скоростью $\Delta=-{}^1/_2(y_1{}^\bullet+y_2{}^\bullet)/n$. Величина этой угловой скорости (скорости прецессии стоячей волны) определяется из уравнений (2.4):

$$\Delta=-2\Omega/(n^2+1) \tag{2.5}$$

что совпадает со значением, полученным в [1] для кольца из идеально упругого материала. Таким образом, если принять порождающее решение в виде (2.1), то зависимость скорости прецессии стоячей волны Δ от вязкоупругих свойств материала обнаружить не удается.

Применим другой способ рассуждения. Параметры $R_c(\omega)$ и $R_s(\omega)$, фигурирующие в осредненных уравнениях (2.4), вычисляются для частоты ω_0, определяемой формулой (2.2). Но наличие вращения приводит к тому, что частоты волн, бегущих вперед и назад, становятся несколько отличными одна от другой и от частоты порождающего решения. В связи с этим будем вычислять коэффициенты R_c и R_s для этих волн при разных значениях ω. Этому могут способствовать два обстоятельства.

Как показано в ряде работ (например, [4]), для многих материалов, в том числе для плавленного кварца, существуют области частот, в которых динамические модули упругости испытывают резкие изменения. Далее, задача о колебании вращающегося кольца может возникнуть и при исследовании достаточно быстрого вращения осесимметричных конструкций, например деталей турбин. В этом случае нет оснований считать угловую скорость вращения малой. При этом возникает необходимость учета центробежных сил. Однако, как показано в [1], центробежные силы изменяют лишь среднее значение частоты для волн, бегущих вперед и назад, но не изменяют разности между ними.

Исходя из изложенного, в соотношениях (2.1) положим: $y_1=\omega_1 t+\alpha$, $y_2=-\omega_2 t+\beta$, где значения частот ω_1, ω_2 определяются так, чтобы A, B, α, β были медленными переменными. Оказывается, что они должны удовлетворять следующим уравнениям: $\omega_1^2-4\Omega n\omega_1/(n^2+1)-\omega_0^2=0$, $\omega_2^2+4\Omega n\omega_2/(n^2+1)-\omega_0^2=0$, причем берутся положительные корни этих уравнений. При любом значении Ω будет иметь место точное соотношение

$$\omega_1-\omega_2=4\Omega n/(n^2+1) \tag{2.6}$$

Вновь переходя к системе уравнений в стандартной форме метода осреднения для A, B, α, β и выполнив осреднение, получим вместо уравнений (2.4) следующую систему:

$$A^{\bullet}={}^1/_2 A\omega_* R_s(\omega_1),\qquad B^{\bullet}={}^1/_2 B\omega_* R_s(\omega_2),\qquad \alpha^{\bullet}={}^1/_2\omega_* R_c(\omega_1)$$
$$\beta^{\bullet}=-{}^1/_2\omega_* R_c(\omega_2),\qquad \omega_*=2\omega_0^2/(\omega_1+\omega_2) \tag{2.7}$$

Из полученных уравнений находим значение скорости прецессии стоячей волны:

$$\Delta=-{}^1/_2(y_1^{\bullet}+y_2^{\bullet})/n={}^1/_2(\omega_2-\omega_1-\alpha^{\bullet}-\beta^{\bullet})/n=$$
$$=-2\Omega/(n^2+1)+{}^1/_4\omega_*[R_c(\omega_2)-R_c(\omega_1)] \tag{2.8}$$

В том случае, когда действительная часть комплексного модуля упругости E' не зависит от частоты, из формул (1.3) получаем $R_c(\omega_2)=R_c(\omega_1)$ и формула (2.8) приводит к прежнему результату (2.5). Это имеет место при использовании для описания вязкоупругих свойств материала модели Кельвина — Фохта. Полагая в системе (2.7) $\omega_1\simeq\omega_2\simeq\omega_0$, получим систему, отличающуюся от уравнений (2.4) лишь обозначениями.

Отметим, что предложенный вывод соотношения (2.8) формально верен только для случая постоянной угловой скорости. Такой же результат должен иметь место и при переменной, но достаточно медленно меняющейся угловой скорости, но его обоснование сопряжено с бо́льшими математическими трудностями.

При достаточно малых значениях угловой скорости из формулы (2.8) с учетом соотношения (2.6) можно получить следующее выражение:

$$\Delta\simeq-\frac{2\Omega}{n^2+1}\left[1+\frac{\omega_0}{2E_0}\frac{dE'(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}\right]=$$
$$=-\frac{2\Omega}{n^2+1}\left[1-\frac{\omega_0}{2J_0}\frac{dJ'(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}\right] \tag{2.9}$$

В зависимости от знака производной скорость прецессии стоячей волны в вязкоупругом кольце может быть как больше, так и меньше идеального значения (2.5). Описание свойств вязкоупругих материалов простейшими моделями является, как правило, в количественном отношении неудовлетворительным. Поэтому зависимости $E'(\omega)$ или $J'(\omega)$ необходимо брать из результатов экспериментов. В качестве примера возьмем данные из [4]. Выберем участок «средней» крутизны в районе частоты 2000 Гц. Здесь $dJ'/d\omega\simeq5\cdot10^{-13}$ м²/Н·Гц, а $J_0\simeq10^{-9}$ м²/Н. Подставив эти значения в формулу (2.9), получим значение Δ, отличающееся от идеального примерно в два раза. Вблизи резонансов это отличие резко возрастает, так что скорость прецессии может даже изменить знак. Отметим, что посредством E' или J' в формулу для скорости прецессии стоячей волны проникает зависимость от температуры и предыстории образца.

3. Коэффициенты R_s, входящие в уравнения (2.4) и (2.7), отрицательны, так что колебания вязкоупругого кольца будут затухающими.

Простейшим, а потому наиболее удобным способом их поддержания является приложение к точкам кольца распределенной силы $F=K\cos n\varphi\cos\lambda t$, где λ — частота силы, а K — ее амплитуда. Однако такой способ позволяет создать лишь датчик угловой скорости [5], а не датчик угла. Для компенсации этого недостатка указанного способа поддержания колебаний предлагается управлять силой F таким образом, чтобы ее профиль поворачивался относительно кольца вслед за поворотом стоячей волны колебания. Силу F при этом задаем формулой $F=K\cos(n\varphi+u(t))\cos\lambda t$, где $u(t)$ — некоторая медленная, пока не определенная функция времени. Для описания внутреннего трения примем простейшую реологическую модель диссипации — модель Кельвина — Фохта. Ядро $R(s)$ является при этом экспоненциальным [2], и уравнение (1.2) становится дифференциальным и принимает с учетом действия силы F следующий вид:

$$w^{\cdot\cdot\prime\prime}-w^{\cdot\cdot}+4\Omega(t)w^{\cdot\prime}+\varkappa^2(w^{\mathrm{VI}}+2w^{\mathrm{IV}}+w'')+ \tag{3.1}$$

$$+\varkappa^2\xi(w^{\cdot\mathrm{VI}}+2w^{\cdot\mathrm{IV}}+w^{\cdot\prime\prime})=(K/\rho)\cos(n\varphi+u)\cos\lambda t$$

где ξ — параметр, характеризующий диссипацию и обратно пропорциональный времени τ затухания свободных колебаний.

Решения уравнения (3.1) ищем в виде (2.1). Для преобразования уравнения (3.1) к стандартной форме метода осреднения дополним, так же как в п. 2, формулу (2.1) соотношением (2.3).

Анализ получаемой системы уравнений показывает, что в нерезонансных ситуациях члены, пропорциональные K, при осреднении исчезнут, так что осредненная система будет при этом иметь тот же вид, что и при отсутствии возбуждения. Поэтому рассмотрим только случай резонанса. Пусть это будет главный резонанс. Тогда $\omega_0=\lambda+h$, где h — малая расстройка частоты, а $y_1=\lambda t+\theta_1$, $y_2=-\lambda t+\theta_2$. Осредненные уравнения будут иметь следующий вид:

$$A^{\cdot}=-{}^1/_2\eta A+{}^1/_4k\sin(\theta_1-u),\qquad B^{\cdot}=-{}^1/_2\eta B-{}^1/_4k\sin(\theta_2-u)$$

$$\theta_1^{\cdot}=2\Omega n/(n^2+1)+k/(4A)\cos(\theta_1-u)+h$$

$$\theta_2^{\cdot}=2\Omega n/(n^2+1)-k/(4B)\cos(\theta_2-u)-h$$

$$\eta=\omega_0^2\xi,\qquad k=K/\omega_0(n^2+1)\rho \tag{3.2}$$

В идеальном случае, когда профиль возбуждающей силы F точно отслеживает поворот стоячей волны прогиба w, выполняется следующее соотношение:

$$u={}^1/_2(\theta_1+\theta_2) \tag{3.3}$$

Стационарным будем называть такое решение системы уравнений (3.2), для которого помимо амплитуд A и B постоянной будет и величина $\Phi={}^1/_2(\theta_1-\theta_2)$, а сами переменные θ_1 и θ_2 будут при этом функциями времени. При выполнении условия (3.3) система (3.2) будет иметь стационарное решение, для которого $A=B=A_0=\mathrm{const}$:

$$\sin\Phi=2\eta A_0/k,\qquad {}^1/_4(k/A_0)\cos\Phi+h=0 \tag{3.4}$$

а скорость прецессии стоячей волны колебаний Δ определяется той же формулой (2.5), что и в случае свободных колебаний идеально упругого кольца. Отметим, что формулы (3.4), определяющие амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики вращающейся системы, имеют такой же вид, как и для неподвижной системы, возбуждаемой силой $F=K\cos n\varphi\cos\lambda t$.

В реальных системах выполнение идеального условия (3.3) не возможно. Одним из основных факторов, препятствующих этому, является инерционность системы управления, которая обладает хотя и малой, но конечной постоянной τ_0 времени: $\tau_0u^{\cdot}+u={}^1/_2(\theta_1+\theta_2)$.

Введем новую переменную $\psi=[u-{}^1/_2(\theta_1+\theta_2)]/n$; она равна углу рассогласования между стоячими волнами F и w и удовлетворяет следующему уравнению:

$$\psi^{\cdot}=-\psi/\tau_0+\Delta \tag{3.5}$$

Пусть $h=0$, т. е. система настроена точно в резонанс. Линеаризуем уравнения (3.2) вблизи стационарного решения. При этом уравнения для вариаций амплитуд отделяются в независимую подсистему, а из двух последних уравнений системы (3.2) получим еще одно соотношение, связывающее ψ и Δ:

$$\Delta=-2\Omega/(n^2+1)-\psi/\tau \qquad (3.6)$$

при выводе которого учитывается, что $\tau=2/\eta$ и $^1/_4(k/A_0)={}^1/_2\eta$ при $\Phi=\pi/2$.

Разрешив уравнения (3.5), (3.6) относительно Δ, получим

$$\Delta^{\cdot}+\frac{2\Omega^{\cdot}}{n^2+1}+\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau_0}\right)\Delta+\frac{1}{\tau_0}\frac{2\Omega}{n^2+1}=0$$

откуда с точностью до членов первого порядка по τ_0 будем иметь $\Delta=-2\Omega/[(n^2+1)(1+\tau_0/\tau)]$.

При $\Omega=\mathrm{const}$ полученное значение будет точным. Из найденной формулы следует, что влияние системы поддержания колебаний тем меньше, чем меньше τ_0 и чем больше τ. В самом деле, чем меньше τ_0, тем ближе система управления к идеальному случаю, когда стоячая волна прецессирует точно так же, как в свободном кольце. С другой стороны, чем больше τ, тем меньше затухание колебаний и тем меньшая сила необходима для их поддержания. А чем меньше сила, тем меньше различные нежелательные эффекты, связанные со всевозможными дефектами прибора, в частности с неидеальностью системы управления. Согласно [6], время τ может быть доведено до величины $\tau=900$ с, а τ_0 можно сделать порядка долей секунды. Таким образом, влияние системы возбуждения может быть сделано совершенно незначительным. В заключение отметим, что подобная система управления силой может быть с пользой применена и в датчике угловой скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 17–23.
2. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974. 216 с.
4. *Fitzgerald E. R.* Mechanical resonance dispersion in quartz at audio-frequencies.– Phys. Rev., 1958, v. 112, No. 3, p. 765–784.
5. *Горенштейн И. А., Шульман И. А.* Инерциальные навигационные системы. М.: Машиностроение, 1970. 231 с.
6. *Scott W. B.* Delco makes low-cost gyro prototype.– Aviation Week and Space Technol., 1982, No. 25, p. 64–72.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1985