

УДК 539.374

УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОГО КУПОЛА ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

ПОРКШЕЯН В. М.

Изучение связанной задачи термовязкоупругости представляет собой одно из актуальных направлений в современной механике сплошных сред. Важность задач этого класса обусловлена широким применением в промышленности полимерных и композитных материалов, в частности, для изготовления тонкостенных сферических конструкций. Известен целый ряд работ [1–7], посвященных анализу термомеханического состояния вязкоупругих сфер.

В одном из ранних исследований [1] рассмотрены малые динамические радиальные смещения полой сферы, на внешней поверхности которой заданы нестационарные деформации. Предполагается, что механические и тепловые модули материала не зависят от температуры. Решение осуществляется операционным методом с разложением искомых функций в ряд. Показано, что радиальные перемещения являются затухающими периодическими функциями.

Случай гармонических нагрузжений рассмотрен в [2, 3]. Изучено поведение сферы из несжимаемого терморологически простого материала [2], подверженной внутреннему пульсирующему давлению, внешняя поверхность которой свободна от нагрузок. На внутренней поверхности поддерживается заданная температура, с внешней осуществляется теплообмен с окружающей средой. Построены поля саморазогрева для случая неустановившегося и установившегося температурного поля. Показано, что с течением времени максимум температуры перемещается от внутреннего края к внешнему. С учетом сжимаемости материала сферы эта задача рассмотрена в [3]. В обеих работах построено квазистатическое решение. Однако, как отмечают некоторые авторы [4], учет динамических членов существенно меняет картину распределения напряжений и температур. Для анализа связанной задачи предлагается использовать метод квазилинеаризации и метод Вентцеля – Бриллюэна – Крамерса (ВБК) с последующей численной реализацией метода дискретной ортогонализации Годунова. В результате получены зависимости температуры саморазогрева от частоты нагружения, найдено распределение температуры по толщине сферы.

Для выяснения чисто теплового вклада в напряженное состояние полой сферы в [5] изучен тепловой удар на внутренней поверхности оболочки. Решение строится разложением радиальных перемещений по собственным функциям соответствующей упругой задачи. Определены значения радиальных и окружных напряжений и картина распространения фронта волны напряжений. Аналогичная схема применена в [6], где исследуется влияние внезапно приложенного давления на внутренней поверхности; получена зависимость температуры разогрева от интенсивности нагружения. В [7] рассмотрен пустотелый шар, подверженный массовым радиальным силам, внешнему и внутреннему давлению. Сравнением упругой и вязкоупругой задач проанализировано влияние вязкости на температуру саморазогрева шара.

Во всех отмеченных работах исследование крайних задач проводилось на основе трехмерной теории термовязкоупругости. Можно, однако, существенно упростить процедуру построения решения, используя оболочечные гипотезы относительно структуры полей перемещений, напряжений и температур [8, 9], где получена полная система уравнений связанной термоупругости тонких пластин и оболочек¹.

Все упомянутые крайние задачи решены для полой замкнутой сферы в центрально-симметричной постановке.

Публикуемая работа посвящена изучению напряженно-деформированного состояния тонкого сферического купола, подверженного осесимметричному циклическому давлению на внешней и внутренней поверхностях. Гипотеза терморологической простоты материала не используется, при постановке краевой задачи учтены осциллирующие составляющие температурного поля.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается замкнутая в куполе

¹ См. также: Поркшеян В. М. О постановке краевой задачи связанной термовязкоупругости. Ростов н/Д, 1983. – 12 с. Деп. в ВИНТИ 3.06.83; № 3000-83, где осуществлена постановка соответствующей краевой задачи для термовязкоупругих материалов.

изотропная сферическая оболочка толщиной h , радиусом R и раствором угла по меридиану $0 \leq x \leq x_1$. На внешней поверхности задана осциллирующая нагрузка $Q \exp(i\omega t)$, внутренняя — свободна от нагрузений; боковая поверхность жестко заделана. С внутренней и внешней поверхностей осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона, на боковой — поддерживается заданная температура.

Установившиеся колебания сферического купола описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений²:

$$T^{\circ\prime\prime} + \operatorname{ctg} x T^{\circ\prime} - \varepsilon^2 c_1 T^{\circ} + \varepsilon^{-1} c_2 (T^+ + T^- - 2T^{\circ}) + c_3 (T^+ - T^- - \varepsilon R T^{\circ}) = \\ = (RD^{\circ} + 2D^1) / \lambda \varepsilon$$

$$T^{1\prime\prime} + \operatorname{ctg} x T^{1\prime} + \varepsilon^{-2} d_1 T^1 + \varepsilon^{-1} d_2 (T^+ + T^- - 2T^{\circ}) + \varepsilon^{-2} d_3 (T^+ - T^- - \varepsilon + R T^1) = \\ = [2\varepsilon^2 D^{\circ} + (12 + 3\varepsilon^2) D^1] / \lambda R \varepsilon^3 \quad (1.1)$$

$$\theta^{\circ\prime\prime} + \operatorname{ctg} x \theta^{\circ\prime} - \varepsilon^2 c_1 \theta^{\circ} - 2\varepsilon^{-1} c_2 \theta^{\circ} - \varepsilon R c_3 \theta^{\circ} = (R F^{\circ} + 2F^1) / \lambda \varepsilon$$

$$\theta^{1\prime\prime} + \operatorname{ctg} x \theta^{1\prime} - \varepsilon^{-2} d_1 \theta^1 - 2\varepsilon^{-1} d_2 \theta^{\circ} - \varepsilon^{-1} d_3 R \theta^1 = [2\varepsilon^2 F^{\circ} + \\ + (12 + 3\varepsilon^2) F^1] / \lambda R \varepsilon^3 \quad (1.2)$$

$$a_1 u'' + a_2 u' + a_3 u + \varepsilon a_4 w''' + \varepsilon a_5 w'' + a_6 w' + a_7 w = \\ = \varepsilon^{-1} [B^{\circ} \theta^{\circ} + \varepsilon R B^1 \theta^1 + \varepsilon (B^1 \theta^{\circ} + \varepsilon R B^2 \theta^1)]'$$

$$\varepsilon b_0 u''' + \varepsilon b_1 u'' + b_2 u' + b_3 u + \varepsilon^2 b_4 w'''' + \varepsilon^2 b_5 w''' + \\ + \varepsilon b_6 w'' + \varepsilon b_7 w' + b_8 w = 2\varepsilon^{-1} (B^{\circ} \theta^{\circ} + \varepsilon R B^1 \theta^1) - (B^1 \theta^{\circ} + \varepsilon R B^2 \theta^1)'' + \\ + \operatorname{ctg} x (B^1 \theta^{\circ} + \varepsilon R B^2 \theta^1)' - \varepsilon^{-2} Q \quad (1.3)$$

$$D^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{k+2} R^{k+1} \omega \{ \varepsilon (\Lambda_2^k + 2M_2^k) \varepsilon_{jj}^{\circ} \varepsilon_{jj}^{\circ} + \varepsilon^2 (\Lambda_2^{k+1} + 2M_2^{k+1}) \operatorname{Re} (\varepsilon_{nn}^{\circ} \varepsilon_{jj}^1) + \\ + \varepsilon^3 (\Lambda_2^{k+2} + 2M_2^{k+2}) \varepsilon_{jj}^1 \varepsilon_{jj}^1 + 2\varepsilon \Lambda_2^k \operatorname{Re} (\varepsilon_{nn}^{\circ} \varepsilon_{jj}^{\circ}) + 2\varepsilon^2 \Lambda_2^{k+1} \operatorname{Re} (\varepsilon_{nn}^{\circ} \varepsilon_{jj}^1) + \\ + 2\varepsilon^3 \Lambda_2^{k+2} \operatorname{Re} (\varepsilon_{nn}^1 \varepsilon_{jj}^1) + \operatorname{Im} (\varphi^k \theta^{\circ} \varepsilon^{\circ\vee} + \\ + \varepsilon R \varphi^{k+1} \theta^1 \varepsilon^{\circ\vee} + \varepsilon \varphi^{k+1} \theta^{\circ} \varepsilon^{1\vee} + \varepsilon^2 R \varphi^{k+2} \theta^1 \varepsilon^{1\vee}) \}$$

$$F^k = (\varepsilon R)^{k+1} \omega \{ T^{\circ} (\varepsilon \varphi^k \varepsilon^{\circ\vee} + \varepsilon^2 \varphi^{k+1} \varepsilon^{1\vee} + c_v^k \theta^{\circ} + \varepsilon R c_v^{k+1} \theta^1) +$$

$$+ \varepsilon R T^1 (\varepsilon \varphi^{k+1} \varepsilon^{\circ\vee} + \varepsilon^2 \varphi^{k+2} \varepsilon^{1\vee} + c_v^{k+1} \theta^{\circ} + \varepsilon R c_v^{k+2} \theta^1) \}$$

$$\varepsilon = h/R, u = u_1 + iu_2 = \tilde{u}/h, w = w_1 + iw_2 = \tilde{w}/h$$

$$T = T^{\circ} + zT^1, \quad \theta = \theta^{\circ} + z\theta^1, \quad |z| \leq h/2$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_1(T) + i\Lambda_2(T), \quad M(T) = M_1(T) + iM_2(T), \quad \varphi(T) = \varphi_1(T) + i\varphi_2(T)$$

$$c_v(T) = c_{v1}(T) + ic_{v2}(T), \quad \varepsilon_{nj} = \varepsilon_{nj}^{\circ} + z\varepsilon_{nj}^1 = \varepsilon_{1nj} + i\varepsilon_{2nj}, \quad \varepsilon^{h\vee} = \varepsilon_{jj}^h \quad (h=0, 1)$$

$$a_j = a_{j0} + \varepsilon a_{j1} + \varepsilon^2 a_{j2}, \quad b_j = b_{j0} + \varepsilon b_{j1} + \varepsilon^2 b_{j2}, \quad B = M\varphi / (\Lambda + \frac{1}{3}M)$$

$$(\dots)^h(T^{\circ}, T^1) = h^{1-h} \int_{-h/2}^{h/2} (\dots)(T^{\circ} + zT^1, z) z^h dz$$

Здесь T^{\pm} — температуры окружающих сред со стороны внешней и внутренней поверхностей, λ — коэффициент теплопроводности, T — усредненная за цикл температура, θ — комплексная амплитуда осциллирующей составляющей температурного поля, \tilde{u} — комплексное перемещение вдоль меридиана, \tilde{w} — комплексный прогиб, Q — амплитуда нормального давления на внешней поверхности, ω — круговая частота, $\Lambda(T)$, $M(T)$ — комплексные коэффициенты Ламе, ε_{nj} — комплексный тензор деформаций.

² См. указ. публ. на с. 142.

$\varphi(T)$ — приведенный комплексный модуль теплового расширения, $c_v(T)$ — комплексный коэффициент объемной теплоемкости, γ — коэффициент теплообмена с лицевых поверхностей. Компоненты тензора деформаций имеют вид $\varepsilon_{11}^{\circ} = u' + w$, $\varepsilon_{11}^{1} = u' - w''$, $\varepsilon_{22}^{\circ} = \text{ctg } xu + w$, $\varepsilon_{22}^{1} = \text{ctg } x(u - w')$, $\varepsilon_{33}^{\circ} = B^{\circ}\theta^{\circ}/M^{\circ} - (\varepsilon_{11}^{\circ} + \varepsilon_{22}^{\circ})\Lambda^{\circ}/(\Lambda^{\circ} + 2M^{\circ})$, $\varepsilon_{33}^{1} = B^{\circ}\theta^1/M^{\circ} - (\varepsilon_{11}^{1} + \varepsilon_{22}^{1})\Lambda^{\circ}/(\Lambda^{\circ} + 2M^{\circ}) + \theta^{\circ}T^1(B^{\circ}/M^{\circ})_{T^{\circ}} - (\varepsilon_{11}^{\circ} + \varepsilon_{22}^{\circ})T^1[\Lambda^{\circ}/(\Lambda^{\circ} + 2M^{\circ})]_{T^{\circ}}$.

Граничные условия зададим в форме

$$T^h(x = \pm x_1) = T^{*h}, \quad \theta^h(x = \pm x_1) = \theta^{*h} \quad (h=0, 1) \quad (1.4)$$

$$u(x = \pm x_1) = w(x = \pm x_1) = w'(x = \pm x_1) = 0 \quad (1.5)$$

2. Низкочастотные колебания тонкой сферической оболочки. Исследуется напряженно-деформированное состояние термовязкоупругой изотропной сферы в случае, когда динамические характеристики процесса, термомеханические модули материала и геометрические параметры купола таковы, что выполняется условие

$$\varepsilon \ll \max_{0 \leq x \leq x_1} \{c_n, d_n, a_j/a_1, b_k/a_1, B^m/a_1, R^{m+2}\omega [|\Lambda_2^m| + 2|M_2^m| + |\varphi^m| + |c_v^m|]/\lambda a_1\} \quad (n=1, 2, 3; j=2, \dots, 7; k=1, \dots, 8; m=0, 1, 2).$$

При таком предположении совокупность уравнений (1.1)–(1.3) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Решение краевой задачи в этом случае может быть получено наложением погранслойных составляющих перемещений, прогибов и температур на их регулярные компоненты.

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что при построении погранслоя не удастся ввести локальную систему координат у края сферы таким образом, чтобы это позволило удовлетворить одновременно всем граничным условиям (1.4)–(1.5). Эта трудность может быть преодолена построением двух существенно различных погранслоев. Другой подход связан с предположением, что компоненты температурного поля θ^1 и T^1 , характеризующие распределение по толщине оболочки, постоянны: $T^1 = (T^+ - T^-)\gamma / (\varepsilon\gamma R + 2\lambda)$, $\theta^1 = 0$, для определенности в дальнейшем считается, что $Q/b_0 \sim 0(\varepsilon^2)$.

Регулярное решение строится в следующем виде:

$$T^{\circ(1)}(x) = T_0^{\circ(1)} + \varepsilon^{1/2}T_1^{\circ(1)} + \varepsilon T_2^{\circ(1)} + \dots$$

$$\theta^{\circ(1)}(x) = \theta_0^{\circ(1)} + \varepsilon^{1/2}\theta_1^{\circ(1)} + \varepsilon\theta_2^{\circ(1)} + \dots$$

$$u^{(1)}(x) = \varepsilon^{-1/2}(u_0^{(1)} + \varepsilon^{1/2}u_1^{(1)} + \varepsilon u_2^{(1)} + \dots)$$

$$w^{(1)}(x) = \varepsilon^{-1/2}(w_0^{(1)} + \varepsilon^{1/2}w_1^{(1)} + \varepsilon w_2^{(1)}) \quad (2.1)$$

После подстановки (2.1) в (1.1)–(1.3) определяются компоненты разложений $T^{\circ(1)}$, $\theta^{\circ(1)}$, $u^{(1)}$ и $w^{(1)}$:

$$T_0^{\circ(1)} = 1/2(T^+ + T^-), \quad T_1^{\circ(1)} = T_3^{\circ(1)} = 0$$

$$T_2^{\circ(1)} = 1/2(T^+ - T^-)c_3^{\circ}/c_2^{\circ}, \quad \theta_0^{\circ(1)} = \theta_1^{\circ(1)} = 0$$

$$\theta_2^{\circ(1)} = 0, \quad \theta_3^{\circ(1)} = -iR^2\omega\varphi_0^{\circ}\varepsilon^{\circ}T_0^{\circ(1)}/\lambda c_2^{\circ}$$

$$u_h^{(1)} = C_{h+1}P_v^{(1)}(y) \quad (h=0, 1), \quad u_2^{(1)} = C_3P_v^{(1)}(y) + u_r, \quad w_0^{(1)} = C_1\tilde{P}_v(y) \quad (2.2)$$

$$w_1^{(1)} = C_2\tilde{P}_v(y) - q/b_{80}^{\circ}, \quad w_2^{(1)} = C_3\tilde{P}_v(y) + w_r$$

$$C_h\tilde{} = -C_h\nu(\nu+1)b_{20}^{\circ}/b_{80}^{\circ}, \quad f_{nj}^{\circ} = f_{nj}(T_0^{\circ(1)})$$

$$\nu(\nu+1) = b_{80}^{\circ}(2a_{10}^{\circ} - b_{20}^{\circ} + \rho\omega^2R^2)/[b_{80}^{\circ}a_{10}^{\circ} - (a_{60}^{\circ})^2]$$

$$q = \varepsilon^{-2}Q, \quad y = \cos x$$

P, P^{-1} — полиномы Лежандра; выражения для u_r и w_r громоздки и здесь не приводятся. Постоянные C_1, C_2, C_3 будут определены дальше.

Для построения у края $x=x_1$ погранслояных решений вводится локальная координата $\xi=x_1-\varepsilon^{1/2}\xi$ и используются следующие разложения:

$$T^{\circ(2)}(\xi) = T_0^{\circ(2)} + \varepsilon^{1/2}T_1^{\circ(2)} + \varepsilon T_2^{\circ(2)} + \dots \quad (2.3)$$

$$\theta^{\circ(2)}(\xi) = \theta_0^{\circ(2)} + \varepsilon^{1/2}\theta_1^{\circ(2)} + \varepsilon\theta_2^{\circ(2)} + \dots$$

$$u^{(2)}(\xi) = \varepsilon^{-1/2}(u_0^{(2)} + \varepsilon^{1/2}u_1^{(2)} + \varepsilon u_2^{(2)} + \dots)$$

$$w^{(2)}(\xi) = \varepsilon^{-1}(w_0^{(2)} + \varepsilon^{1/2}w_1^{(2)} + \varepsilon w_2^{(2)} + \dots)$$

Компоненты $T_j^{\circ(2)}, \theta_j^{\circ(2)}, u_j^{(2)}$ и $w_j^{(2)}$ имеют вид

$$T_0^{\circ(2)} = [T^{*\circ} - 1/2(T^+ + T^-)] \exp(-s_1\xi)$$

$$T_1^{\circ(2)} = 1/2 \operatorname{ctg} x_1 T_0^{\circ(2)} \xi, \quad \theta_0^{\circ(2)} = \theta^{*\circ} \exp(-s_1\xi)$$

$$T_2^{\circ(2)} = [-T_2^{\circ(1)}(x_1) + 1/2\xi(2C^\sim - A^\sim)/s_1 + \xi^2 C^\sim] \exp(-s_1\xi)$$

$$\theta_1^{\circ(2)} = 1/2 \operatorname{ctg} x_1 \theta_0^{\circ(2)} \xi$$

$$\theta_2^{\circ(2)} = \sum_{h=2}^{\infty} A_{h+1} \exp(-t_h \xi) + (A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2) \exp(-t_1 \xi)$$

$$u_0^{(2)} = \sum_{h=1}^{\infty} H_{h+3} \exp(-t_h \xi), \quad w_0^{(2)} = \sum_{h=1}^{\infty} H_h \exp(-t_h \xi)$$

$$u_1^{(2)} = \sum_{h=1}^6 (n_{2h-1} + n_{2h} \xi) \exp(-t_h \xi) \quad (2.4)$$

$$u_2^{(2)} = \sum_{h=1}^9 (p_{3h-2} + p_{3h-1} \xi + p_{3h} \xi^2) \exp(-t_h \xi)$$

$$w_1^{(2)} = \sum_{h=1}^6 (m_{2h-1} + m_{2h} \xi) \exp(-t_h \xi)$$

$$w_2^{(2)} = \sum_{h=1}^9 (g_{3h-2} + g_{3h-1} \xi + g_{3h} \xi^2) \exp(-t_h \xi)$$

$$s_1^2 = 2\gamma R/\lambda, \quad A\lambda^4 + B\lambda^2 + C = 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$$

$$A = b_{40}^{\circ} - a_{40}^{\circ} b_{00}^{\circ} / a_{10}^{\circ}, \quad B = b_{60}^{\circ} - a_{60}^{\circ} b_{00}^{\circ} / a_{10}^{\circ} - a_{40}^{\circ} b_{20}^{\circ} / a_{10}^{\circ}$$

$$C = b_{80}^{\circ} - a_{80}^{\circ} b_{20}^{\circ} / a_{10}^{\circ}$$

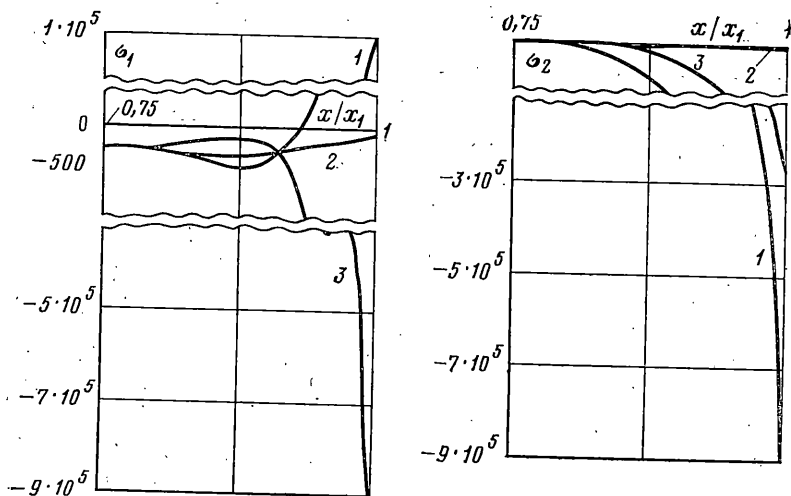
$$t = (t_h) = (s_1, \lambda_1, \lambda_2, 2s_1, s_1 + \lambda_1, s_1 + \lambda_2, 3s_1, 2s_1 + \lambda_1, 2s_1 + \lambda_2)$$

$$C_1 = -(H_4 + H_5 + H_6) y_1, \quad C_2 = - \sum_{h=1}^6 n_{2h-1} y_1$$

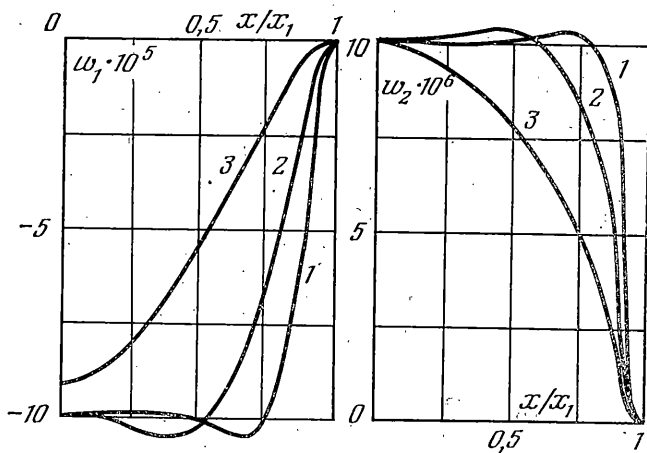
$$C_3 = - \sum_{h=1}^9 p_{3h-2} y_1, \quad f_{nj}^{\circ} = f_{nj}(T)^{* \circ}, \quad y_1 = [P_v^{-1}(\cos x_1)]^{-1}$$

коэффициенты $A^\sim, C^\sim, A_j, n_j, m_j, g_j, H_j$ не выписаны ввиду громоздкости.

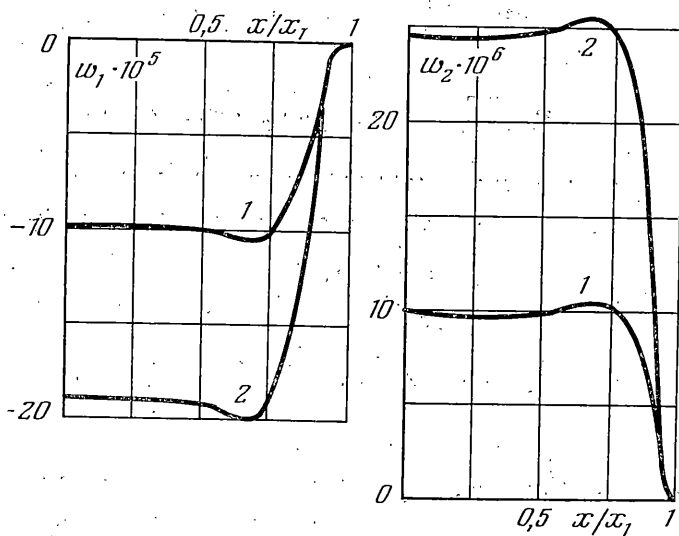
В силу осевой симметрии погранслоя у края $x=-x_1$ имеет аналогичную структуру. Совокупность выражений (2.2) и (2.4) дает решение исходной системы (1.1) — (1.3).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом, вдали от краев сферы устанавливается однородное с точностью $O(\varepsilon)$, линейное по толщине и стационарное с точностью $O(\varepsilon^{3/2})$ температурное поле. Если $T^+ = T^-$, то температура однородна и по толщине оболочки. В окрестности краев купола погранслоиные составляющие самым существенным образом меняют картину напряженного состояния.

На фиг. 1 приведено распределение меридиональных напряжений $\sigma_{xx} = \sigma_1 + i\sigma_2$ в зависимости от амплитуды температурных осцилляций на боковой поверхности сферы. Численный расчет проводился при следующих значениях параметров: $h = 10^{-4}$ м, $R = 0,1$ м, $x_1 = \pi/2$, $T^+ = 40^\circ$ С, $T^- = 20^\circ$ С, $T^{*0} = 30^\circ$ С, $Q = 0,01$ МПа, $\omega = 0,1$ Гц, $\rho = 1128$ кг/м³, $c_v = 1$ МДж/м³·град, $\lambda = 0,286$ Вт/м·град, $\gamma = 10,65$ Вт/м²·град, в качестве $\Lambda(T)$ и $M(T)$ принимались результаты из [10]. Кривые 1-3 соответствуют значениям $\theta^{*0} = i, 0, 1$.

На фиг. 2 приведены действительная и мнимая части комплексного прогиба для различных значений $x_1 = \pi/2, \pi/4, \pi/10$ (кривые 1-3). Как и предполагалось, с увеличением x_1 погранслоиные эффекты становятся все более существенными.

На фиг. 3 показано влияние температуры внешней среды T^+ на величину прогибов $T^+ = 20, 80^\circ$ С. Учет зависимости модулей материала от температуры приводит к почти двукратному увеличению прогиба в вершине купола.

3. Высокочастотные колебания сферической оболочки. Изучение установившихся процессов, реализующихся при больших частотах ω , имеет наибольший практический интерес. Обладая уникальными прочностными свойствами, вязкоупругие материалы в то же время чувствительны к температурным воздействиям. В условиях интенсивных, высокоскоростных процессов они способны рассеивать значительную часть механической энергии в тепловую.

Уравнения (1.2) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta'' + \text{ctg } x \theta' - \varepsilon^2 c_1 \theta^1 - 2\varepsilon^{-1} c_2 \theta^0 - \varepsilon R c_3 \theta^1 &= \beta^{-2} F^{\circ\sim} \\ \theta^{1''} + \text{ctg } x \theta^{1'} - \varepsilon^{-2} d_1 \theta^1 - 2\varepsilon^{-1} d_2 \theta^0 - \varepsilon^{-1} R d_3 \theta^1 &= \beta^{-2} F^{1\sim} \\ \beta^{-2} &= \omega R^2 \varphi^\sim / \lambda, \quad \varphi^\sim = \min(|\varphi(T)|) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку ω велико, то для большого диапазона геометрических параметров h и R и термомеханических модулей материала купола выполняется условие

$$\begin{aligned} \beta^{-2} \gg \max \{ \varepsilon^2 c_1, 2\varepsilon^{-1} c_2, \varepsilon R c_3, \varepsilon^{-2} d_1, 2\varepsilon^{-1} d_2, \varepsilon^{-1} R d_3, \\ a_2/a_1, \dots, a_7/a_1, \varepsilon b_0/a_1, \dots, b_8/a_1, B^0/\varepsilon a_1, B^2/a_1 \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

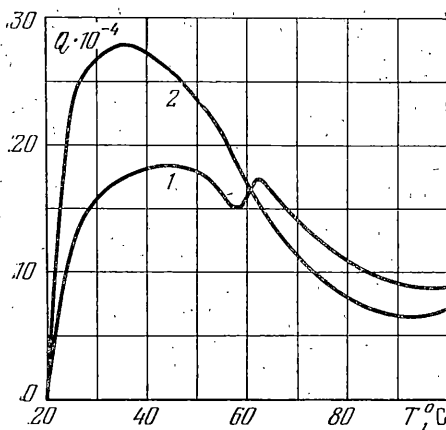
В силу этого обстоятельства два последних уравнения можно рассматривать как уравнения с малым параметром β^2 при старших производных.

Структура системы (1.1), (3.1), (1.3) такова, что построить точное аналитическое решение и провести асимптотический анализ всей системы не удастся. Предлагается другая схема исследования: в предположении, что $T^0(x)$ и $T^1(x)$ известны, проводится асимптотический анализ системы уравнений (3.1), (1.3) с соответствующими граничными условиями; по найденным значениям $u(x)$, $w(x)$, $\theta^0(x)$ и $\theta^1(x)$ восстанавливается диссипативная функция; численно решается интегродифференциальное уравнение теплопроводности, полученное подстановкой явных выражений функций D^0 и D^1 в (1.1).

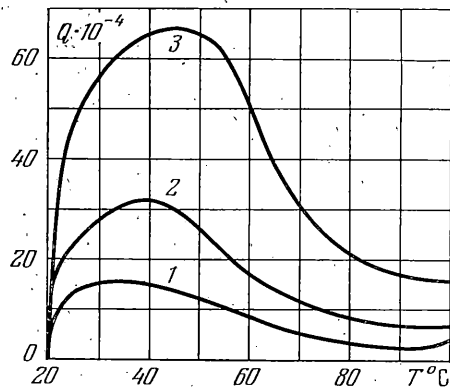
Регулярное решение строится в следующем виде:

$$\theta^{\circ(1)}(x) = \theta_0^{\circ(1)} + \beta \theta_1^{\circ(1)} + \beta^2 \theta_2^{\circ(1)} + \dots, \quad \theta^{1(1)}(x) = \theta_0^{1(1)} + \beta \theta_1^{1(1)} + \beta^2 \theta_2^{1(1)} + \dots \quad (3.3)$$

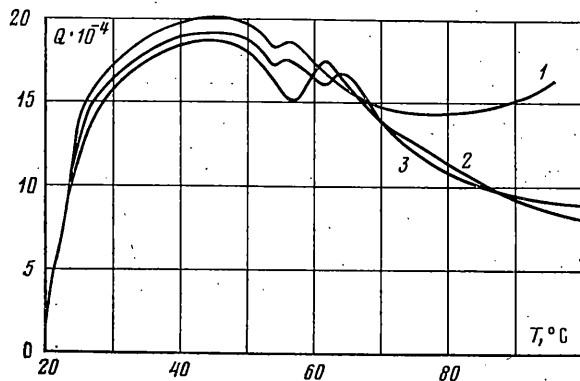
$$u^{(1)}(x) = u_0^{(1)} + \beta u_1^{(1)} + \beta^2 u_2^{(1)} + \dots, \quad w^{(1)}(x) = w_0^{(1)} + \beta w_1^{(1)} + \beta^2 w_2^{(1)} + \dots$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Из уравнений (3.1) определяются величины

$$\theta_0^{(1)} = s_1 u_0^{(1)'} + s_2 u_0^{(1)} + s_3 w_0^{(1)''} + s_4 w_0^{(1)'} + s_5 w_0^{(1)} \quad (3.4)$$

$$\theta_0^{(1)} = t_1 u_0^{(1)'} + t_2 u_0^{(1)} + t_3 w_0^{(1)''} + t_4 w_0^{(1)'} + t_5 w_0^{(1)}$$

Подставляя (3.4) в (1.3), получаем следующие уравнения движения:

$$p_1 u_0^{(1)''} + p_2 u_0^{(1)'} + p_3 u_0^{(1)} + \varepsilon p_4 w_0^{(1)''''} + \varepsilon p_5 w_0^{(1)''} + p_6 w_0^{(1)'} + p_7 w_0^{(1)} = 0 \quad (3.5)$$

$$\varepsilon q_0 u_0^{(1)''''} + \varepsilon q_1 u_0^{(1)''} + q_2 u_0^{(1)'} + q_3 u_0^{(1)} + \varepsilon^2 q_4 w_0^{(1)''''} + \varepsilon^2 q_5 w_0^{(1)''} + \varepsilon q_6 w_0^{(1)''} + \varepsilon q_7 w_0^{(1)'} + q_8 w_0^{(1)} = Q^{\sim}$$

Коэффициенты s_j , t_j , p_j , q_j , Q^{\sim} имеют сложные выражения и поэтому здесь не приводятся.

Интегрирование системы (3.5) представляет значительную трудность, поскольку коэффициенты p_j и q_j являются функциями температуры:

$$p_j = p_j[x, T^{\circ}(x), T^1(x)], \quad q_j = q_j[x, T^{\circ}(x), T^1(x)].$$

Если оболочка тонкая, можно строить асимптотическое разложение

$u_0^{(1)}$ и $w_0^{(1)}$ по ε , как и в предыдущем пункте. Если же оболочка не тонкая, можно воспользоваться тем, что ω велико, а коэффициенты s_3 и t_3 имеют структуру $s_3 = s_3^{\sim} + \rho \omega^2 R^2$, $t_3 = t_3^{\sim} - \rho \omega^2 R^2$ и применить разложение по Вентцелю — Бриллюэну — Крамерсу. Поскольку в окрестности точки $x=0$ функции s_j и t_j имеют особенность, то в этой области необходимо решать линеаризованную задачу, после чего оба решения сопрягаются.

Для определения погранслоя вводится локальная координата $x = x_1 - \beta \zeta$

и используются следующие разложения:

$$\begin{aligned} \theta^{\circ(2)}(\xi) &= \theta_0^{\circ(2)} + \beta \theta_1^{\circ(2)} + \beta^2 \theta_2^{\circ(2)} + \dots, & \theta^{1(2)}(\xi) &= \theta_0^{1(2)} + \beta \theta_1^{1(2)} + \beta^2 \theta_2^{1(2)} + \dots \\ u^{(2)}(\xi) &= \beta (u_0^{(2)} + \beta u_1^{(2)} + \beta^2 u_2^{(2)} + \dots), & w^{(2)}(\xi) &= \beta^2 (w_0^{(2)} + \beta w_1^{(2)} + \beta^2 w_2^{(2)} + \dots) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Погранслой при $x = -x_1$ строится аналогичным образом. Подстановкой полученных значений $u(x)$, $w(x)$, $\theta^{\circ}(x)$ и $\theta^1(x)$ в выражения D° и D^1 в уравнениях (1.1) восстанавливается диссипативная функция, после чего осуществляется численное исследование уравнений теплопроводности для усредненной за цикл колебаний температуры.

Предлагается использовать метод продолжения по параметру. В рассматриваемой задаче за параметр выбрана интенсивность нагружения на внешней поверхности сферы.

Нулевому значению параметра $Q=0$ соответствует статическое термонапряженное состояние, для которого температурные поля $T^{\circ}(x, 0)$ и $T^1(x, 0)$ определяются сравнительно просто. Задавая приращение параметру ΔQ , решаем уже связанную задачу в окрестности статического равновесия, находим $T^{\circ}(x, \Delta Q)$ и $T^1(x, \Delta Q)$ и т.д. На каждом шаге интегрирование системы осуществляется методом Рунге-Кутты с использованием процедур итерационного уточнения, что обусловлено интегродифференциальным характером уравнений теплопроводности. Удовлетворение граничным условиям проводится методом сведения краевой задачи к системе алгебраических уравнений.

После определения $T^{\circ}(x, Q)$ и $T^1(x, Q)$ легко восстанавливаются значения θ° , θ^1 , u и w . Характер кривых $T^{\circ}(0, Q)$ и $T^1(0, Q)$ позволяет судить о наличии и количестве установившихся термомеханических режимов в исследуемой сфере. Расчет (фиг. 4-6) проводился для $T^1 = \text{const}$ при $R=0,1$ м, $T^+ = 20^{\circ}\text{C}$, $T^- = 20^{\circ}\text{C}$, $T^{*0} = 10^{\circ}\text{C}$, $\omega = 1885$ Гц, $\theta^{*1} = 0$.

Кривые 1, 2 на фиг. 4 соответствуют $h=0,001$ м и $h=0,01$ м ($x_1 = \pi/4$, $\theta^{*0} = 0$); кривые 1-3 на фиг. 5 построены при $x_1 = \pi/8, \pi/4, \pi/2$ ($\theta^{*0} = i$, $h=0,01$ м), а кривые 1-3 на фиг. 6 соответствуют $\theta^{*0} = 1, i$ ($x_1 = \pi/4$, $h = 0,001$ м).

Как показывает численный анализ, подбирая геометрические и кинематические параметры, в сферическом куполе можно реализовать до четырех установившихся режимов. Если продолжить расчеты в области выше температуры стеклования, то появляется также и пятый режим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Simonis J. C., Stoneking C. E., Colp J.* The response of a spherical shell fabricated from a strain-rate sensitive material. - In: Recent Advances in Engineering Science, N. Y.: Gordon and Breach, 1969, v. 4, p. 209-216.
2. *Johnsson A.* Heat generation due to cyclic loading of a viscoelastic hollow sphere. - In: Creep in Structures. B.: Springer, 1972, p. 220-231.
3. *Johnsson A.* Temperature fields due to thermomechanical coupling in a compressible viscoelastic sphere. - Acta mech., 1973, v. 17, No. 3/4, p. 201-209.
4. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Гуменюк В. П.* Термомеханическое поведение подкрепленной вязкоупругой сферы при циклическом внутреннем давлении. - Прикл. механика, 1975, т. 11, № 7, с. 22-29.
5. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Кучер Н. К.* Тепловой удар на поверхности полой вязкоупругой сферы. - В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1976, вып. 16, с. 13-17.
6. *Кучер Н. К., Карнаухов В. Г., Козлов В. И.* Распространение нестационарных возмущений в вязкоупругой сфере с учетом связанности полей деформации и температуры. - Пробл. прочности, 1980, № 4, с. 91-95.
7. *Победря Б. Е., Булгару О. Е.* Эффект тепловыделения в деформируемой линейной среде. - Прикл. механика, 1979, т. 15, № 5, с. 92-94.
8. *Huang T. C., Chen T. F.* Thermoelastic vibrations of plates and shells. - Proc. 6th Can. Congr. of Appl. Mech. Vancouver, 1977. Vancouver, e. a., v. 1, p. 409-410.
9. *Williams H. E.* Axisymmetric thermal stress in a thin spherical shell. - Proc. 6th Can. Cong. of Appl. Mech. Vancouver, 1977. Vancouver, s. a., vol. 1, p. 35-36.
10. *Срепаненко Ю. П.* К вопросу об уравнении состояния изотропного полимерного материала. - В кн.: Механика сплошной среды. Ростов/н/д: Изд-во Рост. ун-та, 1981, с. 115-133.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
20.IX.1984