МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1986

УДК 539.3

ФАКТОРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО ОПЕРАТОРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ЛОКШИН А. А.

С помощью факторизации нелинейного волнового оператора уточняются известные результаты о распространении нелинейной ударной волны в одномерной среде. Строится асимптотическое решение для волны, отраженной от нелинейно-наследственной в линейно-упругую часть составного стержня.

1. Рассмотрим уравнения продольных колебаний однородного стержня плотности $\rho=1$ в лагранжевых координатах

$$\partial\sigma/\partial x=\partial v/\partial t,\qquad \partial v/\partial x=\partial\varepsilon/\partial t \tag{1.1}$$

Здесь σ — напряжение, ε — деформация, v — скорость материального элемента стержня. Будем предполагать, что материал стержня является нелинейно-упругим: $\varepsilon=a(\sigma)$, где $a(\sigma)$ — монотонно возрастающая гладкая функция, $a(0)=0$. В дальнейшем на $a(\sigma)$ будут наложены еще и другие ограничения. Тогда из уравнений движения (1.1) и определяющего соотношения $\varepsilon=a(\sigma)$, очевидно, получим нелинейное волновое уравнение, справедливое в области гладкого изменения $\sigma(t,x)$:

$$\partial^2 a(\sigma)/\partial t^2-\partial^2\sigma/\partial x^2=0 \tag{1.2}$$

Это уравнение и будет предметом дальнейшего исследования.

Как известно [1], уравнениям движения (1.1) соответствуют условия на разрыве: $[\sigma]=-[v]U$, $[v]=-[\varepsilon]U$, где U — скорость ударного фронта; $[f(t,x)]=f(t+0,x)-f(t-0,x)$, если точка (t,x) принадлежит ударному фронту. Из условий на разрыве следует, что $[\sigma]=[\varepsilon]U^2$, однако в силу того, что $[\varepsilon]=[a(\sigma)]$, имеем

$$1/U^2=[a(\sigma)]/[\sigma] \tag{1.3}$$

Справедлива следующая *теорема* [2]:

В области гладкого изменения $\sigma(t,x)$ оператор из левой части (1.2) может быть разложен на множители, причем двумя способами:

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) \tag{1.5}$$

Здесь при раскрытии скобок предполагается, что оператор, стоящий правее, действует раньше.

2. Особый интерес представляют разрывные решения уравнения (1.2), точнее, решения, удовлетворяющие (1.2) в области гладкости и соотношению (1.3) на разрыве (ударные волны). В дальнейшем будем рассматривать только ударную волну, распространяющуюся вправо. Поэтому будет использоваться разложение (1.4).

Считаем, что стержень полубесконечен, расположен на полуоси $x\geqslant0$ и при $t\leqslant0$ находился в ненапряженном состоянии:

$$\sigma(t,x)=0\quad\text{при}\quad x>0,\ t\leqslant0 \tag{2.1}$$

Пусть, далее, в момент $t=0$ к концу стержня $x=0$ прикладывается нагрузка. Этот факт удобно записать в виде

$$\sigma(t,\ 0)=\sigma_0(t), \quad \sigma_0(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0 \tag{2.2}$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде решения уравнения

$$\sqrt{a'(\sigma)}\,\partial\sigma/\partial t+\partial\sigma/\partial x=0 \tag{2.3}$$

удовлетворяющего также условию на разрыве (1.3) и граничным и начальным условиям (2.1), (2.2). Ясно, что в тех областях, где $\sigma(t,\ x)$ — гладкая функция, решение уравнения (2.3) является по теореме из п. 1 также решением уравнения (1.2), поэтому поиск решения поставленной задачи в таком виде оправдан.

Отметим, что решение уравнения (2.3), удовлетворяющее на разрыве условию (1.3), не будет слабым решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\sigma \sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma+\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0$$

поскольку для слабого решения этого уравнения на разрыве выполнялось бы условие (см. [3]):

$$-U\left[\int_0^\sigma \sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma\right]+[\sigma]=0$$

которое не совпадает с (1.3) ни для какой функции $a(\sigma)$, за исключением линейной.

3. Будем временно считать функцию $\sigma(t,\ x)$ гладкой и умножим (2.3) на некоторую неизвестную функцию $g(\sigma)$. В результате получим $g(\sigma)\sqrt{a'(\sigma)}\,\partial\sigma/\partial t+g(\sigma)\,\partial\sigma/\partial x=0$, откуда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\sigma g(\sigma)\sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\sigma g(\sigma)\,d\sigma=0 \tag{3.1}$$

Известно [3], что слабые решения уравнения (3.1) удовлетворяют на разрывах соотношению

$$-U\left[\int_0^\sigma g(\sigma)\sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma\right]+\left[\int_0^\sigma g(\sigma)\,d\sigma\right]=0 \tag{3.2}$$

Цель дальнейших преобразований в подборе такой функции $g(\sigma)$, чтобы соотношение (3.2) совпало с (1.3). При этом существенно используется тот факт, что перед разрывом $\sigma=0$.

При этом предположении (3.2) можно переписать в виде

$$1/U=\int_0^{[\sigma]} g(\sigma)\sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma \Big/ \int_0^{[\sigma]} g(\sigma)\,d\sigma \tag{3.3}$$

в то время как из (1.3) будет следовать

$$1/U=(a([\sigma])/[\sigma])^{1/2} \tag{3.4}$$

В дальнейшем, учитывая, что при сделанном предположении $\sigma=\sigma(t+0,\ x)-0$, будем вместо $[\sigma]$ писать σ.

Итак, из (3.3), (3.4) следует, что должно выполняться равенство, определяющее $g(\sigma)$:

$$\int_0^\sigma g(\sigma)\sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma \Big/ \int_0^\sigma g(\sigma)\,d\sigma=\sqrt{(a\sigma)}/\sigma \tag{3.5}$$

Домножая обе части (3.5) на знаменатель левой части (3.5) и дифференцируя, легко получаем

$$g(\sigma)\left(\sqrt{a'(\sigma)}-\sqrt{a(\sigma)/\sigma}\right)=\left(\sqrt{a(\sigma)/\sigma}\right)'_{\sigma}\int_{0}^{\sigma} g(\sigma)\,d\sigma$$

Предполагая, что $g(\sigma)\geqslant 0$ при $\sigma\geqslant 0$, получаем отсюда, что должно быть

$$d\ln\int_{0}^{\sigma} g(\sigma)\,d\sigma=d\int_{A}^{\sigma}\frac{\left(\sqrt{a(\sigma)/\sigma}\right)'_{\sigma}}{\sqrt{a'(\sigma)}-\sqrt{a(\sigma)/\sigma}}\,d\sigma \tag{3.6}$$

где $A=\text{const}>0$. Положим

$$G(\sigma)\equiv\int_{0}^{\sigma} g(\sigma)\,d\sigma \tag{3.7}$$

тогда из (3.6), очевидно, следует, что должно быть

$$G(\sigma)=C\cdot\exp\int_{A}^{\sigma}\frac{\left(\sqrt{a(\sigma)/\sigma}\right)'_{\sigma}}{\sqrt{a'(\sigma)}-\sqrt{a(\sigma)/\sigma}}\,d\sigma,\quad C=\text{const}>0 \tag{3.8}$$

Тот факт, что функция (3.8) действительно представима в виде интеграла от некоторой неотрицательной функции $g(\sigma)$, вытекает из следующей леммы.

Лемма. Пусть $a(\sigma)$ — гладкая функция, такая, что $a(0)=0$ и $a'(\sigma)>0$, $a''(\sigma)<0$ при $\sigma\geqslant 0$. Тогда $G'(\sigma)$ — локально и ограниченная функция при $\sigma\geqslant 0$; $G(0)=0$; $G(\sigma)$ монотонно возрастает при $\sigma\geqslant 0$.

4. Уравнение (3.1), очевидно, перепишется так:

$$\partial F(\sigma)/\partial t+\partial G(\sigma)/\partial x=0 \qquad \left(F\equiv\int_{0}^{\sigma} g(\sigma)\sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma\right) \tag{4.1}$$

а условие на разрыве (3.3) примет вид

$$-UF([\sigma])+G([\sigma])=0 \tag{4.2}$$

Введем теперь новую функцию $z=G(\sigma)$. Тогда задача (4.1), (4.2), (2.1), (2.2) примет вид

$$\begin{gathered}\partial F(G^{-1}(z))/\partial t+\partial z/\partial x=0,\qquad -UF(G^{-1}([z]))+[z]=0\\ z(t,\,x)=0 \text{ при } x>0,\ t\leqslant 0,\qquad z(t,\,0)=G(\sigma_0(t))\end{gathered} \tag{4.3}$$

Однако точное решение задачи (4.3) методом характеристик хорошо известно и содержится, например, в [3].

Заметим теперь следующее. Из (1.1) и (2.3) нетрудно вывести, что инвариант Римана $r\equiv v+\int\sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma_1$ $(0\leqslant\sigma_1\leqslant\sigma)$ должен быть тождественно равен нулю всюду во всей области движения. При этом функция $v=-\int\sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma$ совместно с функцией $\sigma=G^{-1}(z)$ будут решением системы (1.1). Однако эта пара функций будет удовлетворять условиям на разрыве $[\sigma]=-[v]U$, $[v]=-[a(\sigma)]U$ лишь с точностью до бесконечно малых 3-го порядка (по σ). Таким образом, указанная пара функций представляет собой лишь приближенное (а не точное!) решение задачи (1.1), (2.1), (2.2), (4.6). Причина возникающей невязки в том, что при образовании ударной волны из простой волны образуется и сравнительно слабая волна разрежения, направленная в противоположную сторону, которую невозможно учесть, решая вместо системы (1.1) уравнение (2.3). С иным подходом к исследованию ударных фронтов можно познакомиться, например, по работе [4].

5. Факторизация нелинейного волнового оператора позволяет также аналитически решить следующую задачу об отражении волны от нелинейного стержня. Рассмотрим составной стержень; пусть отрезок $0 \leqslant x < l$ этого стержня является абсолютно упругим с модулем Юнга E_1 и плотностью $\rho_1 = \text{const}$, а часть стержня $x > l$ является нелинейно-упругой ($\varepsilon = a(\sigma)$, где $a'(\sigma) > 0$), причем ее плотность равна $\rho_2 = \text{const}$. Пусть, далее, при $t < 0$ стержень не напряжен, а в момент $t = 0$ к его концу $x = 0$ прикладывается непрерывная возрастающая нагрузка. Как и выше, будем записывать этот факт в виде

$$\sigma(t,\ x) = 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant 0,\ t < 0 \tag{5.1}$$

$$\sigma(t, 0) = \sigma_0(t), \quad \sigma_0(t) = 0 \text{ при } t \leqslant 0$$

Будем предполагать также, что функция $\sigma_0(t)$ является гладкой. Задача состоит в том, чтобы при $t < 2l/(E_1/\rho_1)^{1/2}$ (т. е. до возникновения повторных отражений) определить в области $0 \leqslant x < l$ волну, отраженную от границы двух сред ($x = l$).

Очевидно, имеем уравнения

$$\partial^2\sigma/\partial t^2 - (E_1/\rho_1)\,\partial^2\sigma/\partial x^2 = 0 \quad (0 < x < l) \tag{5.2}$$

$$\partial^2 a(\sigma)/\partial t^2 - (1/\rho_2)\,\partial^2\sigma/\partial x^2 = 0 \quad (x > l) \tag{5.3}$$

(Для простоты предполагаем, что в правой части стержня ударная волна не возникает). Условия на границе раздела таковы:

$$\sigma^-|_{x=l} = \sigma^+|_{x=l} \tag{5.4}$$

$$(1/\rho_1)\,\partial\sigma^-/\partial x|_{x=l} = (1/\rho_2)\,\partial\sigma^+/\partial x|_{x=l} \tag{5.5}$$

Здесь σ^- — напряжение в левой части стержня, σ^+ — напряжение в правой части стержня.

В левой части стержня (для $t < 2l/(E_1/\rho_1)^{1/2}$) будем искать решение задачи в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$\sigma^- = \sigma_0(t - x/c_1) + \sigma_1(t + x/c_1); \qquad c_1 \equiv (E_1/\rho_1)^{1/2} \tag{5.6}$$

где σ_1 — неизвестная функция, а σ_0 берется из граничного условия (5.1), Ясно, что функция (5.6) при любых σ_0 и σ_1 удовлетворяет уравнению (5.2).

Далее, в правой части стержня функция σ^+ должна, очевидно, удовлетворять уравнению 1-го порядка, получающемуся из факторизации нелинейного уравнения (5.3):

$$\sqrt{a'(\sigma^+)}\,\partial\sigma^+/\partial t + (1/\sqrt{\rho_2})\,\partial\sigma^+/\partial x = 0 \quad (x > l) \tag{5.7}$$

Перепишем теперь условия (5.4) и (5.5) с помощью (5.6) и (5.7), Прежде всего, из (5.4) и (5.6) имеем

$$\sigma_0(t - l/c_1) + \sigma_1(t + l/c_1) = \sigma^+(t, l) \tag{5.8}$$

Далее, условие (5.5) в силу (5.6) запишется в виде

$$(\rho_1 c_1)^{-1}\{-\sigma_0'(t - l/c_1) + \sigma_1'(t + l/c_1)\} = (\rho_2)^{-1}\partial\sigma^+(t, l)/dx \tag{5.9}$$

Однако в силу (5.7):

$$\partial\sigma^+(t,\ l)/\partial x = -\sqrt{\rho_2 a'(\sigma^+(t,\ l)}\,\partial\sigma^+(t,\ l)/\partial t \tag{5.10}$$

Подставляя теперь (5.10) в (5.9), имеем

$$\frac{1}{\rho_1 c_1}\frac{d}{dt}\left\{-\sigma_0\left(t - \frac{l}{c_1}\right) + \sigma_1\left(t + \frac{l}{c_1}\right)\right\} = -\sqrt{\frac{a'(\sigma^+(t,l))}{\rho_2}}\,\frac{d\sigma^+(t,l)}{dt} \tag{5.11}$$

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$\frac{1}{\rho_1 c_1}\left\{-\sigma_0\left(t - \frac{l}{c_1}\right) + \sigma_1\left(t + \frac{l}{c_1}\right)\right\} = -\int\limits_0^{\sigma^+(t,l)}\sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho_2}}\,d\sigma + \text{const}$$

Исключим отсюда σ_1 при помощи (5.8):

$$\frac{2\sigma_0(t-l/c_1)}{\rho_1 c_1}=\frac{\sigma^+(t,l)}{\rho_1 c_1}+\int\limits_0^{\sigma^+(t,l)}\sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho_2}}\,d\sigma+\mathrm{const}$$

Для того чтобы определить неизвестную константу в последнем равенстве, возьмем любое $t<l/c_1$. По условию, $\sigma_0(t-l/c_1)=0$ при $t<l/c_1$. Очевидно также, что $\sigma^+(t,l)=0$ при $t<l/c_1$. Поэтому в последнем равенстве $\mathrm{const}=0$. Итак, окончательно имеем

$$2\sigma_0\left(t-\frac{l}{c_1}\right)=\sigma^+(t,l)+\rho_1 c_1\int\limits_0^{\sigma^+(t,l)}\sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho_2}}\,d\sigma \tag{5.12}$$

Заметим, что уравнение (5.12) определяет функцию $\sigma^+(t,l)$ однозначно, ибо его правая часть является монотонной функцией от σ^+.

Наконец, отраженная волна $\sigma_1(t+x/c_1)$ вычисляется с помощью (5.12) из равенства (5.8), в котором t следует заменить на $t+x/c_1-l/c_1$:

$$\sigma_1(t+x/c_1)=\sigma^+(t+x/c_1-l/c_1,\ l)-\sigma_0(t+x/c_1-2l/c_1) \tag{5.13}$$

Таким образом, однократно отраженную волну удается найти аналитически, не решая задачи о распространении волны в правой части стержня.

6. Результаты п. 5 можно было бы получить, не пользуясь теоремой о факторизации, а используя подход, основанный на инвариантах Римана. Однако точка зрения, основанная на факторизации нелинейного волнового оператора, позволяет получать результаты и в следующей ситуации, когда инварианты Римана отсутствуют.

Рассмотрим ту же задачу, что и в п. 6, с той разницей, что материал правой части стержня будем предполагать нелинейно-наследственным. А именно, пусть при $x>l$ справедливо определяющее соотношение

$$\varepsilon=\frac{1}{E_2}\left(\sigma+\alpha\sigma^2+k\int\limits_{-\infty}^{t}R(t-\tau)\sigma(\tau)\,d\tau\right) \tag{6.1}$$

Тогда при $x>l$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\sigma+\alpha\sigma^2+kR^{\smile}\sigma)-\frac{E_2}{\rho_2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=0\qquad\left(R^{\smile}\sigma\equiv\int\limits_{-\infty}^{t}R(t-\tau)\sigma(\tau)\,d\tau\right) \tag{6.2}$$

(здесь $R(t)$ — неотрицательная убывающая интегрируемая функция). Уравнение (6.2) можно приближенно факторизовать, считая α и k малыми и отбрасывая члены второго порядка малости. А именно, с точностью до $O(\alpha^2+k^2)$ (6.2) представимо в виде [2]:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}(1+\alpha\sigma+kR^{\smile})-\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\left\{(1+\alpha\sigma+kR^{\smile})\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right\}=0 \tag{6.3}$$

Справедливость разложения (6.3) проверяется непосредственно.

Из (6.3) очевидно, что при $x>l$ напряжение (с точностью до $O(\alpha^2+k^2)$) должно удовлетворять уравнению

$$(1+\alpha\sigma+kR^{\smile})\,\partial\sigma/\partial t+c_2\,\partial\sigma/\partial x,\qquad c_2\equiv(E_2/\rho_2)^{1/2} \tag{6.4}$$

(см. по этому поводу также [5, 6] [1]).

Как и в п. 5, будем писать σ^- вместо σ при $0\leqslant x<l$ и σ^+ вместо σ при $x>l$. Тогда предыдущее соотношение даст

$$\left.\frac{\partial\sigma^+}{\partial x}\right|_{x=l}=-\frac{1}{c_2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{1+\frac{\alpha}{2}(\sigma^+)^2+kR^{\smile}\sigma^+\right\}\Bigg|_{x=l} \tag{6.5}$$

[1] *Нигул У. К.* Модифицированная теория вязкоупругости. Препринт Ин-та кибернетики АН ЭССР. Таллин, 1983, № 309. 62 с.

Снова ищем в области $0 \leqslant x < l$ решение σ^- в виде (5.6). Тогда с учетом (6.5) условия на границе раздела (5.4) и (5.5) запишутся в виде

$$\sigma_0(t-l/c_1)+\sigma_1(t+l/c_1)=\sigma^+(t,\ l) \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{\rho_1 c_1}\left\{-\sigma_0'\left(t-\frac{l}{c_1}\right)+\sigma_1'\left(t+\frac{l}{c_1}\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\rho_2 c_2}\frac{d}{dt}\left\{\sigma^+ + \frac{\alpha}{2}(\sigma^+)^2+kR^{\vee}\sigma^+\right\}\Bigg|_{x=l} \tag{6.7}$$

Интегрируя (6.7), получаем

$$\frac{1}{\rho_1 c_1}\left\{-\sigma_0\left(t-\frac{l}{c_1}\right)+\sigma_1\left(t+\frac{l}{c_1}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\rho_2 c_2}\left\{\sigma^+(t,l)+\frac{\alpha}{2}(\sigma^+(t,l))^2+k\int\limits_{-\infty}^{t}R(t-\tau)\sigma^+(\tau,l)\,d\tau\right\}+\mathrm{const}$$

Исключая отсюда σ_1 с помощью (6.6), имеем

$$\frac{2\sigma_0(t-l/c_1)}{\rho_1 c_1}=\frac{\sigma^+(t,l)}{\rho_1 c_1}+\frac{1}{\rho_2 c_2}\left\{\sigma^+(t,l)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{2}(\sigma^+(t,l))^2+k\int\limits_{-\infty}^{t}R(t-\tau)\sigma^+(\tau,l)\,d\tau\right\}+\mathrm{const}.$$

Взяв произвольное $t<l/c_1$, получим (подобно тому, как это делалось в п. 5), что в последнем равенстве const=0. Итак, будем иметь

$$2\sigma_0\left(t-\frac{l}{c_1}\right)=\sigma^+(t,l)+\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\left\{\sigma^+(t,l)+\frac{\alpha}{2}(\sigma^+(t,l))^2+k\int\limits_{-\infty}^{t}R(t-\tau)\sigma^+(\tau,l)\,d\tau\right. \tag{6.8}$$

Таким образом, получено нелинейное интегральное уравнение вольтерровского типа для определения функции $\sigma^+(t,\ l)$. Уравнение (6.8) нетрудно решить методом последовательных приближений, рассматривая его как квадратное относительно σ^+ и относя интегральное слагаемое к свободному члену. (В качестве решения нужно выбрать ветвь, которая при $\alpha\to 0$ переходит в решение линейного уравнения).

Здесь будет получено решение этого уравнения с точностью до $O(\alpha^2+k^2)$ (к большей точности и не следует стремиться, поскольку само уравнение (6.8) справедливо лишь с указанной точностью $O(\alpha^2+k^2)$).

Положим для упрощения вычислений $\alpha\rho_1 c_1/(2\rho_2 c_2)=a$, $1+\rho_1 c_1/(\rho_2 c_2)=$ $=b$, $k\rho_1 c_1/(\rho_2 c_2)=\gamma$, $2\sigma_0(t-l/c_1)=f$. Тогда (6.8) перепишется в виде

$$a(\sigma^+)^2+b\sigma^+ +\gamma R^{\vee}\sigma^+ +f=0 \tag{6.9}$$

Из (6.9), выбирая нужную ветвь корня и разлагая его в ряд Тейлора, будем иметь

$$\sigma^+=\frac{-b+\sqrt{b^2-4a(\gamma R^{\vee}\sigma^+ -f)}}{2a}=\frac{f}{b}-\frac{a}{b^3}f^2-\frac{\gamma}{b}R^{\vee}\sigma^+ +\ldots$$

(многоточием обозначены члены порядка $O(a^2+\gamma^2)$, или, что то же самое, порядка $O(\alpha^2+k^2)$). Следовательно, подставляя вместо σ^+ в правую часть предыдущего равенства выражение для σ^+, даваемое всей правой частью предыдущего равенства, имеем с указанной точностью: $\sigma^+=f/b-af^2/b^3-$ $-(\gamma/b)R^{\vee}(f/b-af^2/b^3-(\gamma/b)R^{\vee}\sigma^+)$, откуда $\sigma^+=f/b-af^2/b^3-(\gamma/b^2)R^{\vee}f$, или, что то же самое

$$\sigma^+=\frac{2\sigma_0(t-l/c_1)}{1+\rho_1 c_1/\rho_2 c_2}-\frac{\alpha}{2}\frac{\rho_1 c_1/\rho_2 c_2}{(1+\rho_1 c_1/\rho_2 c_2)^3}\left(2\sigma_0\left(t-\frac{l}{c_1}\right)\right)^2-$$

$$-k\frac{\rho_1 c_1/\rho_2 c_2}{(1+\rho_1 c_1/\rho_2 c_2)^2}\int\limits_{l/c_1}^{t}R(t-\tau)\,2\sigma_0(\tau-l/c_1)\,d\tau \tag{6.10}$$

Отсюда отраженная волна находится, как и в п. 5, по формуле (5.13).

7. Факторизация нелинейного волнового оператора (см. п. 1) дает возможность аналитически описать волну, движущуюся в определенном направлении (вправо или влево). Однако эта факторизация непосредственно не приспособлена для описания взаимодействия волн, движущихся в противоположных направлениях. Действительно, сведя, например, разложение (1.4) к системе $\sqrt{a'(\sigma)}\,\partial\sigma/\partial t+\partial\sigma/\partial x=w$, $\partial(\sqrt{a'(\sigma)}\,w)/\partial t+\partial w/\partial x=0$, необходимо решать оба уравнения этой системы одновременно (а не последовательно), поскольку из второго уравнения системы невозможно исключить σ. Решать такую систему не проще, чем исходное уравнение второго порядка.

Однако факторизация все же оказывается полезной для описания взаимодействия волн. Рассмотрим уравнение

$$\partial^2 a(\sigma)/\partial t^2-\partial^2\sigma/\partial x^2=0 \tag{7.1}$$

с начальными условиями

$$\sigma|_{t=0}=\sigma_0(x),\quad \partial\sigma/\partial t|_{t=0}=\sigma_1(x) \tag{7.2}$$

предполагая, что $\sigma_0(x)=\sigma_1(x)=0$ при $|x|\geqslant A$. Положим

$$\sigma=W \text{ при } x>A,\quad \sigma\equiv V \text{ при } x<-A \tag{7.3}$$

(Эффектами, связанными с образованием ударных волн, будем пренебрегать.) Ясно, что при $x>A$ волна будет распространяться вправо, и в силу теоремы п. 1 будет справедливо уравнение

$$\sqrt{a'(W)}\,\partial W/\partial t+\partial W/\partial x=0 \tag{7.4}$$

а при $x<-A$ волна будет распространяться влево и будет справедливо уравнение

$$\sqrt{a'(V)}\,\partial V/\partial t-\partial V/\partial x=0 \tag{7.5}$$

Будем считать, что $A>0$ достаточно мало для того, чтобы в области $|x|\leqslant A$ можно было пренебречь взаимодействием волн, распространяющихся вправо и влево. Иными словами, будем считать, что (7.4) и (7.5) справедливы при всех x и

$$\sigma=W+V \tag{7.6}$$

Таким образом, чтобы решить систему (7.1), (7.2) в рассматриваемом приближении, нужно найти решения уравнений (7.4) и (7.5). Однако нужно знать начальные условия для этих уравнений. Чтобы найти начальные условия для уравнений (7.4) и (7.5), поступим следующим образом. Обозначим $W_0(x)\equiv W|_{t=0}$; $V_0(x)\equiv V|_{t=0}$. Тогда из (7.4), (7.5) имеем

$$\left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{W_0'(x)}{\sqrt{a'(W_0(x))}},\qquad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{V_0'(x)}{\sqrt{a'(V_0(x))}} \tag{7.7}$$

Теперь из (7.6), (7.7), очевидно, следует

$$\sigma_0(x)=W_0(x)+V_0(x) \tag{7.8}$$

$$\sigma_1(x)=\frac{\partial}{\partial t}(W+V)\,|_{t=0}=-\frac{W_0'(x)}{\sqrt{a'(W_0(x))}}+\frac{V_0'(x)}{\sqrt{a'(V_0(x))}} \tag{7.9}$$

Положим

$$F(y)\equiv\int[a'(y_1)]^{1/2}\,dy_1\quad (0\leqslant y_1\leqslant y)$$

Ясно, что $F(y)$ — возрастающая функция, причем $F(0)=0$. Интегрируя равенство (7.9), имеем

$$\int_{-\infty}^{x} \sigma_1\, dx = -F(W_0(x)) + F(V_0(x)) + \text{const} \tag{7.10}$$

где следует положить const=0, ибо, очевидно, $\sigma_1(x)=W_0(x)=V_0(x)=0$ при $x\to-\infty$. Таким образом, из (7.8), (7.10) имеем

$$\int_{-\infty}^{x} \sigma_1\, dx = F(V_0) - F(\sigma_0(x) - V_0) \tag{7.11}$$

В силу возрастания функции F ясно, что при каждом x в правой части последнего равенства стоит возрастающая функция от V_0, поэтому (7.11) однозначно разрешимо относительно V_0. Теперь W_0 находится из (7.8), а решение задачи (7.1), (7.2) (в силу представления $\sigma=W+V$) сводится к независимому решению (методом характеристик) уравнений (7.4) и (7.5) с начальными условиями W_0 и V_0.

Автор благодарен Н. В. Зволинскому за обсуждение результатов и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 427 с.
2. *Локшин А. А.* Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 6, с. 104–108.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. *Гринфельд М. А.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 883–898.
5. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1977. 287 с.
6. *Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984. 154 с.

Москва

Поступила в редакцию 5.X.1984